АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

11127—12348

*

№ 10 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биологич. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 3
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 13
Алгебра 18
Многочлены и линейная алгебра 19
Группы 23
Поля, кольца и структуры 30
Алгебраическая теория схем связи и управления 36
Топология 42
Теория функций действительного переменного 49
Теория множеств 51
Приближение функций полиномами и их обобщениями 53
Теория функций комплексного переменного . . . 55
Дифференциальные уравнения 78
Обыкновенные дифференциальные уравнения 78
Уравнения в частных производных 83
Приложения к физике, технике и естественным наукам 91
Интегральные уравнения 104
Вариационное исчисление 105
Анализ (другие вопросы) 107
Числовые ряды 110
Специальные функции 113
Интегральные преобразования и операционное исчисление 116
Приложения общих методов математического анализа 118
Функциональный анализ 118
Теория вероятностей 130
Математическая статистика 133
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 136
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 141
Геометрия 143
Приложения геометрии 143
Элементарная геометрия 144
Аналитическая геометрия 148
Проективная и неевклидовы геометрии 148
Начертательная геометрия 148
Алгебраическая геометрия 149
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 154
Геометрия n-мерного пространства 155
Теория относительности 163
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 169
Метрические методы в геометрии 173
Выпуклые многообразия 174
Численные и графические методы 175
Таблицы 193
Вычислительные машины и математические приборы 195
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 207
Авторский указатель 212

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Yu. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 3
Foundations. Mathematical logic 4
Theory of numbers 13
Algebra 18
Polynomials, linear algebra 19
Groups 23
Fields, rings, lattices 30
Algebraic theory of communication and control circuits 36
Topology 42
Theory of functions of real variables 49
Theory of sets 51
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 53
Theory of functions of complex variables 55
Differential equations 78
Ordinary differential equations 73
Partial differential equations 83
Applications to physics, technology and natural sciences 91
Integral equations 104
Calculus of variations 105
Analysis (other aspects) 107
Numerical series 110
Special functions 113
Integral transforms, operational calculus . . . 116
Applications of general methods of mathematical analysis 118
Functional analysis 118
Theory of probability 130
Mathematical statistics 133
Theory of games, operational research, mathematical economics 136
Applications of probabilities and statistical methods 141
Geometry 143
Applications of geometry 143
Elementary geometry 144
Analytical geometry 148
Projective and non-euclidean geometries . . 148
Descriptive geometry 148
Algebraic geometry 149
Differential geometry of 3-dimensional space 154
Geometry of *n*-dimensional space 155
Theory of relativity 163
Global theory of differentiable manifolds . . . 167
Metric methods in geometry 173
Convex manifolds 174
Numerical and graphical methods 175
Tables 193
Computers and mathematical devices 195
Application of computer devices 207
Author index 212

Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

Технический редактор *Г. А. Шевченко*

Поправки к РЖ „Математика“ № 10—1960 г.

К реф. 11 294

В строках 6—7 сверху вместо „Ввиду“ должно быть „Ввиду того, что $x_{m-1} = -x_1$, $\sum_{i=0}^{m} x_i^{2k+1} = 0$,“

К реф. 11 350

В строке 4 снизу вместо „а 81“ должно быть „содержащей 81.“

К реф. 11 492

Выражение „(I) неверно“ из строки 3 снизу следует читать в конце примечания редакции.

К реф. 11 598

В строке 15 снизу на стр. 82 вместо ; дожно быть :. В строке 11 снизу должно быть „Осгуда“.

Зак. 3569

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Л. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 11127—12348 **№ 10** **Октябрь 1960 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

11127. Сообщение о втором Венгерском математическом съезде. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1959, 2, 3 (обл.) (русск., франц., англ., нем.)

Информация о съезде, намеченном на 24—31 августа 1960 г. в Будапеште.

11128. Вторая конференция по математике и механике в Казахской ССР. Алма-Ата, 26—30 окт. 1959 г. Мостовой А. И. Матем. в школе, 1960, № 2, 89

11129. Счетно-решающие устройства в нервной системе. Атли (Computing in the nervous system. Uttley A. M.), Impulse, 1958, № 6, 6—9 (англ.)

Рассматривается вопрос о постройке машины, обладающей способностью к распознаванию изображений. В такой машине должны быть запроектированы способность к классификации и подсчету условной вероятности. С. А. Стебаков

11130. Машина и мозг. Джордж (Machines and brain. George F. H.), Science, 1958, **127**, № 3309, 1269—1274 (англ.)

В популярной форме излагаются некоторые идеи, относящиеся к теории Питтса и Мак-Каллока о логических сетях нервной системы. С. А. Стебаков

11131. Математика в мире растений. Рёслер (Mathematisches im Pflanzenreich. Rössler Wilhelm), Universum, 1958, **13**, № 3, 86—91 (нем.)

Рассматриваются некоторые численные характеристики явлений симметрии из области морфологии растений. С. А. Стебаков

11132. К вопросу о взаимосвязи кибернетики с некоторыми физиологическими процессами. Мдивани Вахтанг Студентта самецниеро шромебис кребули. Тбилисис. унив., Сб. научн. тр. студ., Тбилисск. ун-т, 1958, № 8, 69—88

Популярное изложение некоторых идей Винера, Маккола, Мак-Калока и др. Сопровождается сравнениями процессов, возникающих в живом организме и технических системах с обратной связью. Например: 1) сравнение электротерапевтических процедур с теми «встряхиваниями», которые способствуют срыву реверберации в технических системах; 2) роль обратной связи при сокращении зрачка; 3) сравнение устройств машинной памяти с некоторыми частями нервной системы; 4) роль избыточной информации в процессе зрительного восприятия. С. А. Стебаков

11133. О математических проблемах кибернетики. Ляпунов А. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 166—174

Формулировка основной проблемы кибернетики и краткий обзор работ советских математиков по вопросам алгоритмизации и логической схемат зации алгоритмов, теории информации и реализации алгоритмов минимальными средствами. Библ. 41 назв.

С. А. Стебаков

11134. Система наименований для двоичных чисел. Стерн (A system of names for binary numbers Stern Joshua), Science, 1958, **128**, № 3324, 594—595 (англ.)

Предлагается система, позволяющая по-новому читать двоичные числа. Двоичное число разбивается на группы по 4 разряда, начиная с младших. Каждая единица в четверке получает свое наименование. Кроме того, каждой четверке, исключая младшую, присваивается свое наименование. Слово, обозначающее число, складывается из наименований единиц в четверке и следующих за ними наименований четверок, начиная со старших разрядов. Если какой-то разряд в четверке равен нулю, то он просто не читается. Система годится как для целых, так и для дробных чисел.

А. Н. Чуйкин

11135. Замечания о недесятичных системах счисления. Нолль (Bemerkungen zu nichtdezimalen Zahlensystemen. Noll H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1959, **12**, № 7, 318—319 (нем.)

Указываются примеры применения недесятичных систем счисления.

11136. Попарное соединение команд. Дейвис (Pairing teams. Davis Edmund E.), Math. Mag., 1958, **32**, № 2, 99—100 (англ.)

Проводится решение задачи по определению способа попарного соединения команд. Ставятся условия: 1) каждая команда должна играть с любой другой командой без повторения в течение недель, число которых должно быть на одну меньше, чем число встречающихся команд; 2) любая данная команда может встретиться с каждой из остальных команд только один раз; 3) любая команда должна быть поставлена в расписание дважды в один и тот же вечер; 5) произвольное составление расписания для команд не разрешается. Составлена таблица-расписание игры команд для $n=12$.

Е. В. Вандышева

11137 К. Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь-июль 1956. Т. 4. Краткое содержание секционных докладов. Доклады иностранных ученых. М., АН СССР, 1959, 250 стр., 15 р.

Т. 1, 2, 3 см. РЖМат, 1957, 1968 К, 1969 К; 1959, 8671 К.

11138 К. Труды IV конгресса румынских математиков (27 мая—4 июня 1956 г., Бухарест) (Lucrările celui de al IV-lea congres al matematicienilor romîni. [27 mai—4 iunie 1956, Bucureşti]. Bucureşti, Acad. RPR, 1960, 227 p., 8,55 lei) (рум.)

11139 К. Труды Международного симпозиума по теории алгебраических цепей, 2—5 апреля 1957 г. Ч. I, II (Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching. 2nd—5th Apr., 1957. Parts I, II. (Ann. Comput. Lab. Harvard Univ., Vol. 29-30). Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1959, XL, 305 pp., ill; VIII, 345 pp., ill.) (англ.)

11140 К. Логика в элементарной математике. Экснер, Роскопф (Logic in elementary mathematics. Exner Robert M., Rosskopf Myron Frederick. New York-London, McGraw-Hill, 1959, XI, 274 pp., ill., 52 sh. 6d.) (англ.)

11141 К. Очерки о кибернетике. Теплов Л. М., «Моск. рабочий», 1959, 231 стр.; илл., 5 р.

11142 К. Вопросы математики и механики. (Сб. научн. статей. Ташкентск. ин-т инж. ж.-д. трансп., вып. 9). Ташкент, 1959, 159 стр., илл., 11 р.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

11143. Некоторый обзор развития советской математики. Коутский (Několik pohledů na vývoj sovětské matematiky. Koutský Karel), Mat. škole, 1958, 8, № 5, 258—267 (чешск.)

11144. Десять лет «Историко-математических исследований». Гнеденко Б., Погребысский И., Укр. матем. ж., 1958, 10, № 2, 229—230

Краткий обзор работ, опубликованных за 10 лет в сборнике «Историко-математические исследования». Авторы отмечают недостаточное количество работ по истории отдельных математических наук, их важнейших направлений и методов. Н. И. Симонов

11145. Древнейшие магические квадраты высшего порядка и способ их образования. Хермелинк (Die ältesten magischen Quadrate höherer Ordnung und ihre Bildungsweise. Hermelink Heinrich), Sudhoffs Arch. Geschichte Med. und Naturwiss., 1958, 42, № 3, 199—217 (нем.)

Обзор средневековой арабской литературы по магическим квадратам. Показано, что к XIII в. была создана теория магических квадратов и разработан ряд методов их составления. Б. А. Розенфельд

11146. Десятичные дроби у аль-Каши. Стройк (De tiendelige breuken bij Al-Kashi. Struik D. J.), Simon Stevin, 1959, 33, № 2, 65—71 (гол.)

Краткое изложение применения десятичных дробей в сочинениях самаркандского математика XV в. Джемшида Гиясэддина аль-Каши «Ключ арифметики» и «Трактат об окружности» по немецким и советским публикациям этих сочинений, а также сравнение десятичных дробей у аль-Каши, у математиков древнего Китая и Европы, средних веков и эпохи Возрождения. Б. А. Розенфельд

11147. Об одной неопределенной задаче Ибн Хамзы. Дильган (Sur un problème indéterminé d'Ibni Hamza. Dilgan H.), Istanbul tekn. üniv. bül., 1957, 10, № 3, 31—35 (франц.; рез. турецк.)

Краткий обзор «Числового подарка» (Тухфат ал-Адад) турецкого математика конца XVI в. Али ибн Хамзы ал-Марибди и подробное рассмотрение решения одной из задач этого сочинения, сводящейся к распределению натуральных чисел от 1 до 81 на 9 групп по 9 чисел с равными суммами. Б. А. Розенфельд

11148. Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафы. Медовой М. И. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 11. М., Физматгиз, 1958, 593—598

Рассматривается единственный случай применения отрицательных чисел в странах ислама математиком X в. Абу-л-Вафой ал-Бузджани. В его арифметическом трактате „О том, что нужно знать писцам и дельцам из науки арифметики" (рукопись Лейденской библиотеки (Cod. or. 103)) рассмотрено правило умножения двузначных чисел $(10a+b)(10a+c)=[10a+b-\{10(a+1)-(10a+c)\}]\times 10(a+1)+[10(a+1)-(10a+b)][10(a+1)-(10a+b)]$. Это правило применяется к случаю $a=0$ на примере $3\cdot 5=(3-5)\cdot 10+(10-3)(10-5)$; $3-5$ называется „долг (дайн) 2", произведение $(3-5)10$ — „долг 20". Подчеркивается, что, так же как у китайцев и индийцев, здесь отрицательные числа появляются при применении единого алгоритма. Б. А. Розенфельд

11149. Хасан ибн Хайсам и рукописи имеющиеся в библиотеках Стамбула. Дильган (Hassan Ben Haithem et les manuscrits existants dans les bibliothèques d'Istanbul. Dilgan H.), Istanbul tekn. üniv. bül., 1955, 8, 36—41 (франц.; рез. турецк.)

Краткие сведения о крупном арабском математике Абу Али ал-Хасане Ибн ал-Хайсаме (в работе называемом Мухаммедом Ибн Хасаном), работавшем в X—XI в. в Египте, и перечисление 57 рукописей математических трактатов Ибн ал-Хайсама, хранящихся в библиотеках Стамбула. Б. А. Розенфельд

11150. Развитие и тенденции механического счета с 1623 по 1958 г. Флад (Évolution et tendances du calcul mécanique en 1623 et en 1958. Flad J. P.), Méthodes (France), 1959, 27, № 154, 19—32 (франц.)

Сообщается, что первую счетную машину изобрел Вильгельм Шиккард (1592—1635), профессор астрономии Тюбингенского университета, в 1623 г. (год рождения Б. Паскаля). Освещается история и тенденции развития механических счетных машин со времен Шиккарда до наших дней. Описаны принципы устройства и действия 13 таких машин, включая изобретение Шиккарда, арифмометр Паскаля, «Мерседес» и др. А. А. Гусак

11151. «Геометрия» Декарта и обоснование высшего анализа. Мюллер (Descartes' «Geometrie» und die Begründung der höheren Analysis. Müller Conrad), Sudhoffs Arch. Geschichte Med. und Naturwiss., 1956, 40, № 3, 240—258 (нем.)

Очерк жизни и научной деятельности Р. Декарта (1596—1650). Основное внимание уделено «Геометрии» и значению ее для дальнейшего развития математики. Имеются ссылки на советские издания сочинений Декарта. А. А. Гусак

11152. Историческая заметка к учебнику начертательной геометрии Винценце Яролимка (1846—1921). Фольта (Historická poznámka k učebnicím deskriptivní geometrie Vincence Jarolímka. Folta Jaroslav), Mat. škole, 1958, 8, № 3, 165—172 (чешск.)

11153. К шестидесятилетию академика Владимира Коржинека (род. 1899 г.). Голубарж, Ярник, Вильгельм (K šedesátinám akademika Vladimíra Kořínka. Holubář Josef, Jarník Vojtěch, Vilhelm Václav), Pokroky mat., fys. a astron., 1959, 4, № 6, 724—730 (чешск.)

11154. Шестидесятилетие проф. Отакара Борувки (род. 1899 г.), лауреата государственной премии. Коутский (Prof. Otakar Borůvka šedesátníkem a laureátem státní ceny. Koutský Karel), Pokroky mat., fys. a astron., 1959, 4, № 6, 730—733 (чешск.)

11155. Анисим Федорович Бермант (1904—1959). (Некролог). Курош А. Г., Люстерник Л. А., Маркушевич А. И., Рыбкин Г. Ф., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 5, 117—121

11156. К столетию со дня смерти профессора Йозефа Яндера (1776—1857). Балада (Před sto lety zemřel

profesor Josef Jandera. Balada František), Mat. škole, 1958, 8, № 1, 49—57 (чешск.)

11157. Николас Фачио Дуилье (1664—1753) — математик и ремесленник. Эммот (Nicolas Facio De Duillier (1664—1753) — mathematician and mystery man. Emmott W.), Optician, 1958, 136, № 3518, 195—198 (англ.)

11158. Филипп Коралек — чешский математик XIX столетия живший во Франции (1819—1852). Псота (Filip Korálek — český matematik 19. století usedlý ve Francii. Psota František). Pokroky mat., fys. a astron., 1958, 3, № 3, 361—365 (чешск.)

11159. Некролог профессора Иоганна Радона. Функ (Nachruf auf Prof. Johann Radon. Funk Paul), Monatsh. Math., 1958, 62 № 3, 189—199 (нем.)

Развернутое описание жизни и деятельности члена Австрийской Академии наук, профессора Иоганна Радона (16 декабря 1887—25 мая 1956 гг.). Радон опубликовал 45 научных работ, относящихся почти ко всем разделам математики. Наиболее известные работы Радона относятся к вариационному исчислению, теории функций действительного переменного, функциональному анализу и геометрии. М. К. Керимов

11160. Памяти Самнера Майера. 1910—1955 (In memorian Sumner B. Myers. 1910—1955), Michigan Math. J., 1958, 5, № 1, 1—4 (англ.)

Описание личной и научно-общественной деятельности профессора Мичиганского университета Самнера Майера (19 февраля 1910 — 8 октября 1955 г.), специалиста по вариационному исчислению, геометрии и функциональному анализу. М. К. Керимов

11161 К. История математики. Т. 1. Общий обзор истории элементарной математики. Т. 2. Специальные дисциплины элементарной математики. Смит (History of mathematics. Smith David Eugene. New York, Dover, 1958. Vol. 1. General survey of the history of elementary mathematics, 618 pp., ill., 5.00 doll. Vol. 2. Special topics of elementary mathematics, 737 pp., ill., 2.75 doll.), Publishers' Weekly, 1958, 174, № 4, 170 (англ.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

11162. Действующие школьные программы по математике в Советском Союзе и других коммунистических странах. Виршуп (Current school mathematics curricula in the Soviet Union and other communist countries. Wirszup Izaak), Math. Teacher, 1959, 52, № 5, 334—346 (англ.)

Дается анализ системы народного образования и программ по математике для средней школы Советского Союза, Чехословакии, ГДР, Румынии, Польши, КНР. Указывается также, что русские внимательно изучают развитие образования в Америке, знакомы с недостатками программ по математике американской школы.

Е. В. Вандышева

11163. Что воздействует на американских преподавателей математики. Сойер (Pressures on American mathematics teachers. Sawyer W. Warwick), SIAM Rev., 1959, 1 № 1, 32—37 (англ.)

Анализ состояния преподавания математики в колледжах и школах США. По мнению автора, преподаватели математики испытывают воздействие в следующих четырех направлениях: 1) математика нередко трактуется как серия правил, которые надлежит запомнить; 2) во многих европейских странах (включая СССР) учащиеся начинают изучать соответствующие математические дисциплины раньше, чем делают это американские дети; 3) существующая программа по математике американской средней школы соответствует примерно уровню развития математики 1640 г.; 4) автоматика, электронные счетные машины, общественные науки требуют новых видов математических знаний. Е. В. Вандышева

11164. Развитие преподавания математики в Германии с 1945 г. I, II, III. Клейн (Vývoj vyučování matematice v Německu od roku 1945. I, II, III. Klein Helmut), Mat. škole, 1958, 8, № 1, 12—22; № 2, 84—96 (чешск.)

11165. Вопросы вычислительной техники в учебниках математики для VII—XII классов средней школы Германской демократической республики. Марченко Д. И., Матем. в школе, 1958, № 5, 62—65

После сообщения основных сведений о характере и структуре общеобразовательной средней школы в ГДР и общей характеристики содержания учебников математики для VII—XII классов этой школы (издательство Volk und Wissen—Verlag, Berlin, 1955; авторы учебников в статье не названы. *Реф.*) дается обзор тех материалов в этих учебниках, которые относятся к вопросам вычислительной техники.

Примечание референта. Статья принадлежит к циклу статей об указанных учебниках, опубликованных в данном номере журнала «Математика в школе».

Ю. М. Гайдук

11166. Обзор учебников по математике средней школы ГДР. Топольницкая К. Ф., Матем. в школе, 1958, № 5, 76—78

Обзор части содержания стабильных учебников по математике для VIII—XII классов средней школы ГДР, изданных в Берлине в 1954—1955 гг. Авторы учебников и издательства в статье не названы. Рассмотрены те материалы в указанных учебниках, которые относятся к учению о функциональной зависимости и к элементам дифференциального и интегрального исчисления. (Поэтому название статьи чрезмерно общо. *Реф.*)

Ю. М. Гайдук

11167. Математические школы второй ступени в Федеративной Республике Германии. Боденман (Secondary school mathematics in the Federal Republic of Germany. Bodenman Paul S.), Math. Teacher, 1959, 52 № 6, 465—470 (англ.)

Описание программ по математике.

11168. Перевороты в математической мысли. Фер (Breakthroughs in mathematical thought. Fehr Howard F.), Math. Teacher, 1959, 52, № 1, 15—19 (англ.)

Отмечается, что программы по математике средней школы в США по существу являются программами 100-летней давности. С 1900 г. в них прибавилось очень мало новых идей. Указывается на необходимость полного переворота в преподавании математики. Приводится краткий обзор некоторых крупных открытий в области математики. Среди них: создание Декартом аналитической геометрии, открытие неевклидовой геометрии Лобачевского и Римана, работы Кантора по теории рядов и др. Отмечается, что учитель математики должен быть также и ученым, влюбленным в свое дело, должен постоянно повышать свой научный уровень. Указывается на необходимость широкого общения между преподавателями математики и создания для учителей соответствующих условий жизни. Е. В. Вандышева

11169. Мы преподаватели математики, — инженеры, закладывающие фундамент (As mathematics teachers we're foundation engineers), Math. Teacher, 1959, 52, № 1, 34—39 (англ.)

Приведены примеры наиболее важных и трудных для усвоения учащимися разделов курса математики. Работа учителя сравнивается с деятельностью инженера, закладывающего фундамент здания. Е. В. Вандышева

11170. Алгебра множеств в преподавании тригонометрии. Шумейкер (The algebra of sets in the teaching of trigonometry. Schumaker John A.), Math. Teacher, 1959, 52, № 1. 20—23 (англ.)

Сообщается об использовании понятия множества и подмножества в преподавании курса тригонометрии в средних школах США. Рассматривается метод ка изучения с помощью этих понятий знаков синуса и косинуса в различных квадрантах. Е. В. Вандышева

11171. Дисциплина в числах — способ стимулирования одаренных. Амир-Моэз (Discipline in numbers — a way to stimulate the gifted. Amir-Moez R.), School Sci. and Math., 1959, 59 № 8, 599—600 (англ.)

Чтобы установить наличие математических способностей, не обязательно требовать новых и оригинальных изысканий. Поиски доказательств могут привести к этому важному результату — выяснению способностей. Автор приводит примеры остроумных вычислений Ибн Баннаа (1258—1339), математика из Марокко, и предлагает юным читателям самостоятельно дать им объяснения. Р. А. Симонов

11172. Обсуждение проектов программ (по математике). Матем. в школе, 1960, № 2, 6—16

11173. Проект перспективного плана издания учебно-наглядных пособий по математике на 1960—1965 гг. Матем. в школе, 1960, № 2, 90

11174 К. Сборник задач по курсу высшей математики. [В 5-ти вып.]. Вып. I. Аналитическая геометрия на плоскости. Глаголева Н. Н. Ивашев-Мусатов О. С., Истратов В. И. Всес. заочн. энерг. ин-т, М., 1959, 70 стр., илл., 1 р. 35 к.

11175 К. Математика для экономистов. Т. 1, 2. Расмуссен, Стеттинг (Matematik for økonomer. Rasmussen P. Nørregaard, Stetting Lauge. S. l., Harck, 50,00 kr. Bd. 1. 1958, 273 s., ill.; Bd. 2. 1959, s. 275—475, ill.) (датск.)

11176 К. Преподавание математики физикам (The teaching of mathematics to physicists. Rev. Rept. Inst. Phys. London, 1959, 25 pp., 2 sh. 6 d.) (англ.)

11177 К. Математические понятия и математическая терминология. Линдстрём (Matematiska föreställningar och matematisk terminologi. Ett diskussionsinlägg. Lindström Sven Stockholm, Almqvist & Wiksell/Geber, 1958, 16 s., 0,75 kr.). Svensk bokförteckn., 1959, jan.—juni, 63 (шведск.)

11178 К. Основы математики. Учебник для Софийского университета. Петканчин (Основи на математиката. Учебник за Соф. ун-т. Петканчин Боян. София, Наука и изкуство, 1959, VIII, 755 с., 30.70 лв.) (Солг.)

11179 К. Математические развлечения. 333 задачи, фокусы остроумные игры, рискованные выводы шутки, сюрпризы. То же о числах и формах. Миттенцвей, Рюгер (Mathematische Kurzweil. 333. Aufgaben, Kunststücke, geistanregende Spiele, verfängliche Schlüsse, Scherze, Überraschungen und dergleichen aus der Zahlen- und Formenlehre. 8. Aufl. Bearb. Rüger Bruno, Mittenzwey L. Bad, Julius Klinhardt, Heilbrunn Obb. 1955, 84 S., 3.80 DM) (нем.)

См. также: 11228, 11230, 11231, 11968 К, 11992, 11993, 11998 К.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

11180. Алгорифмические операторы в конструктивных полных сепарабельных метрических пространствах. Цейтин Г. С., Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 1, 49—52

В конструктивной математике естественными аналогами понятий метрического пространства, полного метрического пространства и сепарабельного метрического пространства являются соответственно понятия конструктивного метрического пространства, конструктивного полного метрического пространства и конструктивного сепарабельного метрического пространства. О точках x и y конструктивного метрического пространства говорят, что они эквивалентны, если расстояние между ними равно нулю. Алгорифм Ψ называется алгорифмическим оператором из конструктивного метрического пространства A в конструктивное метрическое пространство B, если для всякой точки x пространства A, к которой применим алгорифм Ψ, мы имеем: 1) $\Psi(x)\in B$ и 2) какова бы ни была точка y пространства A, эквивалентная x в A, алгорифм Ψ применим к y, $\Psi(y)\in B$ и точки $\Psi(y)$ и $\Psi(x)$ эквивалентны в B.

Основной результат реферируемой работы состоит в следующем. Для любого алгорифмического оператора Ψ из конструктивного полного сепарабельного метрического пространства A в конструктивное метрическое пространство B и для любого натурального числа d можно построить алгорифмически перечислимое множество сфер в пространстве A, образующее покрытие области определения оператора Ψ, и алгорифмически сопоставить каждой сфере S из этого множества такой элемент $T(S)$ пространства B, что сфера S отображается оператором Ψ в замыкание сферы радиуса 2^{-d} с центром в $T(S)$.

С помощью основной теоремы автор доказывает следующую теорему, устанавливающую связь между эффективными операциями на множестве общерекурсивных функций одной переменной (РЖМат, 195 , 1178) и частично рекурсивными операторами (Клини С. К., РЖМат, 1957, 7591 К). Пусть Φ есть эффективная операция на множестве общерекурсивных функций одной переменной. Тогда существует частично рекурсивный оператор F, переводящий функцию одной переменной в функцию одной переменной и такой, что если φ есть общерекурсивная функция одной переменной, $\Phi(\varphi)=\chi$ и $F(\varphi)=\psi$, то для любых m и n из равенства $\chi(m)=n$ следует $\psi(m)=n$.

Другое применение основной теоремы связано с конструктивными функциями действительной переменной (РЖМат, 195 , 6528). Автор вводит в рассмотрение конструктивные функции одного простого типа, называемые им псевдополигональными, и доказывает, что любую конструктивную функцию действительной переменной можно с любой заданной точностью равномерно аппроксимировать во всей области определения рассматриваемой функции посредством псевдополигональных функций. В качестве следствия этого результата автор получает следующую теорему о непрерывности конструктивных функций: Если F — конструктивная функция действительной переменной, X — конструктивное действительное число и F определена в точке X, то по всякому n можно найти такое m, что если Y есть конструктивное действительное число, $|Y-X|<2^{-m}$ и F определена в точке Y, то $|F(Y)-F(X)|<2^{-n}$.

Н. А. Шанин

11181. Рекурсивные функционалы и кванторы конечных типов. I. Клини (Recursive functionals and quantifiers of finite types. I. Kleene S. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 1, 1—52 (англ.)

Объектами типа 0 называются натуральные числа. Объектами типа $n+1$ называются функции, отображаю-

щие множество объектов типа n во множество натуральных чисел. Автор прежде всего строит теорию «рекурсивных» функций, аргументами которых являются объекты любых заданных конечных типов. Определения примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций таковы, что если ограничиться рассмотрением объектов типа 0 и типа 1, то получаются соответствующие понятия обычной теории рекурсивных функций (включая частично и общерекурсивные операторы). Далее рассматриваются предикаты, которые могут быть образованы из общерекурсивных предикатов (общерекурсивных—в упомянутом расширенном смысле) средствами узкого исчисления предикатов. Проводится исследование таких предикатов, во многом обобщающее факты, известные для частного случая предикатов над областью натуральных чисел (в частности, устанавливается некоторая теорема о нормальной форме). Автор указывает также на ряд различий между общим и частным случаем. Следует отметить, что, кроме новых результатов, работа содержит изложение основ теории обычных рекурсивных функций с некоторой новой точки зрения. Ю. Т. Медведев

11182. К вопросу о соотношении между различными системами конструктивных действительных чисел. Успенский В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1960, № 2, 199—208

Рассматриваются следующие определения вычислимых действительных чисел: а) действительное число ξ называется q-ично вычислимым, если оно разлагается в систематическую дробь с основанием q, знаки которой образуют вычислимую последовательность; б) действительное число ξ называется сегментно вычислимым, если существует вычислимая последовательность вложенных сегментов с рациональными концами, единственной общей точкой которых является ξ; в) действительное число ξ называется вычислимым по Дедекинду, если существует вычислимая функция, определенная для любого отличного от ξ рационального числа и принимающая значение 0 для всех рациональных чисел, больших, чем ξ, и значение 1 для всех рациональных чисел, меньших, чем ξ; г) действительное число ξ называется вычислимым по Кантору, если существует вычислимая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к ξ и обладающая вычислимым регулятором сходимости.

Каждое из определений б), в) и г), а также определение а) при любом $q=2, 3, 4,\ldots$ порождает свою систему обозначений (нулевых номеров) вычислимых действительных чисел. Вводится определение (конструктивной) сводимости одной системы обозначений к другой. Согласно этому определению система обозначений I сводится к системе обозначений II, если существует вычислимая функция, переводящая произвольное обозначение произвольного вычислимого действительного числа в системе I в одно из обозначений того же числа в системе II. Легко видеть, что системы обозначений, соответствующие определениям б), в) и г), эквивалентны, т. е. попарно сводятся одна к другой, и что q-ичная система обозначений при любом q сводится к каждой из систем б), в) и г). Автор устанавливает следующий факт:

Теорема. Для того чтобы s-ичная система обозначений сводилась к q-ичной, необходимо и достаточно, чтобы множество простых делителей числа q содержалось в множестве простых делителей числа s.

Из этой теоремы, в частности, следует, что ни при каком q ни одна из систем обозначений б), в) и г) не эквивалентна q-ичной системе обозначений.

Ю. Т. Медведев

11183. Проблема слов. Бун (The word problem. Boone William W.), Ann. Math., 1959, **70**, № 2, 207—265 (англ.)

Основная цель работы — подробное доказательство результатов, сформулированных в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1959, 9680). Строится простой пример группы с неразрешимой проблемой тождества и приводится более простое доказательство неразрешимости проблемы тождества, чем доказательство, опубликованное П. С. Новиковым в 1955 г. (РЖМат, 1956, 112). Отметим один результат, не содержащийся в цитированной выше заметке автора. Пусть группа F задана образующими

$$g_1, g_2, \ldots, g_N, g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_N^{-1} \qquad (1)$$

и определяющими соотношениями $\sum_\nu = \sum_\nu'$, $\nu = 1,2,\ldots,M$. Обобщенной проблемой тождества группы F относительно системы образующих

$$g_1, g_2, \ldots, g_m, g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_m^{-1} (m \leqslant N) \qquad (2)$$

называется проблема нахождения алгоритма, определяющего для любого слова W в алфавите (1), существует или нет слово W' в алфавите (2), равное W в группе F. В реферируемой работе доказывается, что из разрешимости проблемы тождества в группе F' с образующими $g_1, \ldots, g_N, k, g_1^{-1}, \ldots, g_N^{-1}, k^{-1}$ и определяющими соотношениями $\sum_\nu = \sum_\nu'$ $(\nu = 1, 2, \ldots, M)$, $kg_i = g_i k$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ следует разрешимость обобщенной проблемы тождества группы F относительно системы образующих (2). С. И. Адян

11184. Замечания к доказательствам существования стандартных моделей. Мостовский А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**, М., АН СССР, 1959, 232—236

Россер и Ван Хао (Rosser J. B., Wang H., J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 113—125) ввели понятие стандартной модели аксиоматической теории. Автор уточняет это понятие посредством определения так называемой абсолютной (для некоторой фиксированной формулы) модели. Формула, относительно которой рассматривается модель, может, в частности, служить для определения натуральных или порядковых чисел.

Автор приводит два результата Рыль-Нардзевского, усиливающие результаты Россера и Ван Хао: 1) пусть Φ — конъюнкция аксиом рассматриваемой системы, а N_0 — любая совместная с Φ арифметическая формула; тогда существование модели этой системы, абсолютной для натуральных чисел, на основе аксиом $\Phi + N_0$ доказать нельзя; 2) существование абсолютной для натуральных чисел модели доказуемо в системе $\Phi + N_\omega$, где N_ω — неарифметическая аксиома, утверждающая непротиворечивость системы, полученной присоединением к Φ в качестве правила вывода ω-правила Гильберта (правила Карнапа).

В дальнейших рассуждениях автора Φ — система теоретико-множественных аксиом, N_1 и N_2 — формулы, выражающие существование модели Φ, абсолютной для натуральных и соответственно порядковых чисел. Оказывается, что N_2 недоказуема в системе $\Phi + N_1$ и, более того, в каждой системе, возникающей на основе Φ и произвольного числа формул строения $\exists\gamma F(\gamma)$ (такой вид имеет, в частности, N_1) или $\forall\gamma F(\gamma)$. Эти результаты вытекают из следующей теоремы: Если модель R абсолютна для порядковых чисел, то в R выполняются все истинные формулы строения $\exists\gamma F(\gamma)$ и $\forall\gamma F(\gamma)$.

Доказательства этих утверждений (автор их не приводит) могут быть получены двумя путями: на основе теории конструктивных порядковых чисел Клини (РЖМат, 1956, 4280) и при помощи результатов Серпинского (Sierpinski W., Fundam. math., 1926, 8, 362—

369) о разложении A-множеств на B-компоненты. Автор подробно обсуждает значение своих результатов, приводит многочисленные следствия из них и в заключение подчеркивает тесную связь между логическими и теоретико-множественными понятиями и теориями, в которой он видит путь к решению многих еще не решенных задач. Имеются опечатки, затрудняющие чтение.

Ю. А. Гастев

11185. Основные пропозициональные свойства формальных систем. Шютте (Aussagenlogische Grundeigenschaften formaler Systeme. Schütte Kurt), Dialectica, 1958, 12, № 3-4, 422—442 (нем.; рез. франц., англ.)

Опыт показывает, что не удается построить непротиворечивую формальную систему, допускающую сравнительно простое построение таких областей математики, как теория множеств, и отражающую в то же время все закономерности обычной двузначной логики высказываний. Это положение вещей оправдывает постановку автором вопроса о пропозициональных свойствах весьма широкого класса непротиворечивых формальных систем. В начале работы автор описывает весьма широкий класс формальных систем. Формулами системы являются последовательности символов, при этом предполагается, что всегда можно решить, является ли некоторая последовательность символов формулой или нет. В качестве логических связок используются отрицание $\sim$, конъюнкция $\wedge$ и дизъюнкция $\vee$. Множество теорем системы описывается дедуктивно, т. е. как множество всех формул, выводимых с помощью определенных правил вывода из некоторого разрешимого множества аксиом.

Формула называется пропозиционально истинной (соответственно пропозиционально ложной), если при всяком распределении истинностных значений по таким ее частям, которые не содержат знаков логических связок, она всегда принимает значение истина (соответственно ложь). Формальная система называется пропозиционально полной (соответственно пропозиционально непротиворечивой), если в ней выводима всякая пропозиционально истинная (соответственно никакая пропозиционально ложная) формула. Наконец, правило вывода системы называется пропозициональным, если по пропозиционально истинным формулам оно дает всегда пропозиционально истинную формулу. Задается некоторая система пропозициональных правил вывода, которые принимаются во всех рассматриваемых формальных системах.

При сделанных предположениях (в частности, относящихся к пропозициональным правилам вывода) автору удается характеризовать пропозициональную полноту (соответственно пропозициональную непротиворечивость) рассматриваемых систем через наличие в системе закона исключенного третьего (соответственно правила вывода «из противоречия следует все, что угодно»). Далее строятся разрешающие процедуры, позволяющие установить, является ли некоторое пропозициональное правило вывода производным правилом во всякой формальной системе рассматриваемого класса систем (соответственно во всякой пропозиционально непротиворечивой, соответственно во всякой пропозиционально полной системе).

Эта работа относится к тому кругу идей оснований математики, который обычно называется теорией доказательства в смысле Гильберта. Это обстоятельство подчеркивается замечанием автора в конце работы, что изложенные в статье идеи и намеченные в ней доказательства, а также и применения ее результатов к различным формальным системам, играющим важную роль в обосновании математики, будут подробно изложены в книге автора под названием «Теория доказательства».

H. Thiele

11186. Об интерпретациях исчислений предикатов высших ступеней. Хазенйегер (Über Interpretationen der Prädikatenkalküle höherer Stufe. Hasenjaeger G.), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1958, 4, № 3-4, 71—80 (нем.)

Как известно, наряду с обычными интерпретациями неразветвленных исчислений предикатов высших ступеней (так называемые стандартные интерпретации), можно также рассматривать и так называемые нестандартные интерпретации. Эти последние отличаются от стандартных тем, что переменные и кванторы высших ступеней относятся в общем случае лишь к части всех предикатов соответствующей ступени.

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что не всякое доказательство невыводимости в некотором исчислении предикатов высшей ступени может быть проведено с помощью стандартных интерпретаций. Нестандартные интерпретации предоставляют дополнительные возможности для проведения доказательств невыводимости. Более того, теорема Хенкина о полноте для таких исчислений в смысле нестандартных интерпретаций утверждает, что каждое доказательство невыводимости может быть проведено с помощью некоторой нестандартной интерпретации, если только в числе аксиом исчисления, наряду с обычными логическими аксиомами, имеются и аксиомы экстенсиональности. Для того, чтобы провести доказательство невыводимости, надо построить такую (быть может, нестандартную) интерпретацию, в которой аксиомы исчисления и отрицание предложения, невыводимость которого доказывается, становятся истинными. Теорема Хенкина, являющаяся чистой теоремой существования, не указывает никаких методов построения нужной интерпретации.

В настоящей работе сначала для исчисления предикатов второй ступени указывается метод построения такого рода интерпретаций, в которых выполнены аксиомы свертывания в обычной форме. Основой этого метода построения является некоторая произвольная, но фиксированная группа взаимно однозначных отображений индивидной области на себя. Исходя из такой группы, автор строит некоторый класс предикатов, замкнутый относительно элементов этой группы. Истинность аксиомы свертывания в построенной нестандартной интерпретации автор доказывает на основе замкнутости этого класса предикатов. В заключение работы дается несколько примеров и метод построения переносится на полную теорию типов в формулировке Чёрча. H. Thiele

11187. Исследование логической структуры математики. V. Противоречия расселовского типа. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics (V). Contradictions of Russell's type. Kuroda Sigekatu), J. Symbolic Logic, 1958 (1959), 23, № 4, 393—407 (англ.)

Части I—IV см. РЖМат, 1960, 8512—8515.

Если при помощи определяющей формулы некоторого множества в UL (РЖМат, 1960, 8512) может быть выведено противоречие, то такое множество называется противоречивым, а само противоречие — противоречием расселовского типа. Непротиворечивым называется множество, из определяющей формулы которого нельзя вывести противоречие. Пусть p определяется при помощи определяющей формулы вида

$$\forall x_0(x_0 \in p \equiv F^{x_0}), \qquad (1$$

где F^{x_0} содержит в точности одну свободную переменную x_0; тогда p называется константой порядка 0 (или просто константой). Пусть F^{x_0} задана в предваренной нормальной форме:

$$F^{x_0} \equiv Q x_1 \ldots Q x_n (G^{x_0, x_1, \ldots, x_n}),$$

где $Qx_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant n)$ есть $\forall x_\nu$ или $\exists x_\nu$. Будем называть p $\forall$-константой или $\exists$-константой, в зависимости от того, какой из кванторов стоит на самом левом месте в предваренной нормальной форме F^{x_0}: $\forall$ или $\exists$. G может быть задана в конъюнктивной нормальной форме: $G \equiv C_1 \& \ldots \& C_r$ $(r \geqslant 1)$, $C_i \equiv g_{i,1} \vee \ldots \vee g_{i,k_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r;$ $k_i \geqslant 1)$, где g_{i,x_i} $(1 \leqslant x_i \leqslant k_i)$ есть формула вида

$$x_\mu \in x_\nu \quad \text{или} \quad \neg x_\mu \in x_\nu \quad (0 \leqslant \mu, \nu \leqslant n), \tag{2}$$

или в дизъюнктивной нормальной форме: $G \equiv D_1 \vee \ldots \vee D_s$ $(s \geqslant 1)$, $D_j \equiv h_{j,1} \& \ldots \& h_{j\,l_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant s,$ $l_j \geqslant 1)$, где $h_{j,\lambda_j} (1 \leqslant \lambda_j \leqslant l_j)$ есть формула вида (2). Обозначим теперь $\gamma_i = \{g_{i,1}, \ldots, g_{i,k_i}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, $\delta_j = \{h_{j,1}, \ldots$ $\ldots, h_{j\,l_j}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Без ограничения общности можно считать, что как γ_i, так и δ_j не содержат ни совпадающих, ни противоречащих друг другу формул. Если p есть $\forall$-или $\exists$-константа и если каждая γ_i и каждая δ_j состоят исключительно из отрицательных формул, то p называется $\forall^\neg$-соответственно $\exists^\neg$-константой. Через $\Gamma_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ и $\Delta_j (1 \leqslant j \leqslant s)$ обозначим соответственно совокупность упорядоченных пар (μ, ν) индексов всех формул $\neg x_\mu \in x_\nu$, принадлежащих γ_i или соответственно δ_j для $\forall^\neg$- или $\exists^\neg$-константы p.

Пусть α — непустая совокупность упорядоченных пар натуральных чисел. Тогда конечная или бесконечная последовательность

$$\langle a_1, a_0\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_3, a_2\rangle, \ldots \tag{3}$$

элементов α называется цепью α. Цепь α (3) называется 0-цепью, если $a_0 = 0$. Цепь α вида $\langle a_1, a_0\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle a_m, a_{m-1}\rangle, \langle a_0, a_m\rangle$ $(m \geqslant 0)$ называется циклом α. В работе доказываются следующие теоремы (критерии противоречивости множеств-констант):

Теорема A. Для того чтобы $\forall^\neg$-константа p была противоречивой, достаточно, чтобы для каждого натурального числа $N (1 \leqslant N \leqslant r)$ существовало отображение $\tau = \tau(N)$ множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ в себя и число $M (1 \leqslant M \leqslant r)$ такое, что $\langle 0^\tau, 0\rangle \in \Gamma_N$ и $\Gamma_{M^\tau} \equiv \Gamma_N$.

Теорема B. Если $\forall^\neg$-константа p противоречива, то каждая $\Gamma_N (1 \leqslant N \leqslant r)$ имеет 0-цикл.

Теорема C. Пусть p есть константа с определяющей формулой (1), а p^* — константа с определяющей формулой $\forall x_0 (x_0 \in p^* \equiv \neg F^*)$, где F^* получается из F, входящей в (1), заменой каждой формулы $x_\mu \in x_\nu (0 \leqslant \mu, \nu \leqslant n)$ на ее отрицание. Тогда p^* противоречива или непротиворечива одновременно с p.

Для каждой из этих теорем может быть доказана ей двойственная, например.

Теорема A*. Для того чтобы $\exists^\neg$-константа p была противоречивой, достаточно, чтобы для каждого натурального числа $N (1 \leqslant N \leqslant s)$ существовало отображение $\tau = \tau(N)$ множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ в себя и число $M (1 \leqslant M \leqslant s)$ такое, что $\langle 0^\tau, 0\rangle \in \Delta_N$ и $\Delta_{M^\tau} \equiv \Delta_N$.

Ю. А. Гастев

11188. Исследование логической структуры математики. VI. Непротиворечивая система $T(V)$. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. VI. Consistent V-system $T(V)$ (with corrections to part. XII.) Kuroda Sigekatu), Nagoya Math. J., 1959, 14, 95—107 (англ.)

Части I—IV см. РЖМат, 1960, 8512—8515; часть V см. реф. 11187. Для произвольной формулы UL (РЖМат, 1960, 8512) индуктивно определяется специального вида дерево, называемое разложением этой формулы. У каждой формулы имеется, с точностью до переименования переменных, конечное число разложений (в том числе сама формула). Формула называется положительной, если она не имеет вида $\neg\mathfrak{A}$, и отрицательной, если она имеет вид $\neg\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — положительная формула. Ряд дерева называется положительным (отрицательным), если он состоит из положительных (отрицательных) элементарных формул. Если в разложении некоторой формулы G имеется положительный (отрицательный) ряд, то G называется формулой положительного (соответственно отрицательного) типа (из этого определения видно, что формула может быть одновременно положительного и отрицательного типа; с другой стороны, есть формулы, не имеющие типа в смысле этого определения).

Предыдущие определения позволяют дать рекурсивное определение так называемых $T(V)$-множеств и V-системы $T(V)$, объектами которой являются эти $T(V)$-множества. $T(V)$ непротиворечива (доказательство проводится при помощи теоремы об у транимости сечений (РЖМат, 1960, 8513). Далее в $T(V)$ доказывается формула $\forall x (x = V)$ — таким образом, $T(V)$ оказывается тривиальной системой (между прочим, 0 не является $T(V)$-множеством). При помощи формулы $\forall u (u \in \widetilde{N} \equiv$ $\equiv \forall x (V \in x \,\&\, \forall y (y \in x \supset y' \in x) \supset u \in x))$ (y' — сокращение для $\{y\}$) определяется „натуральный ряд“ $\widetilde{N}$ и оперирующая этим понятием арифметическая система $T_1(\widetilde{N})$, в которой формула $\forall x (x = V)$ оказывается недоказуемой ($T_1(\widetilde{N})$ отличается от описанной в следующей части работы (реф. 11189) системы $T_1(N)$ заменой в определении натурального ряда универсальным множеством V пустого множества 0). $T_1(\widetilde{N})$ не есть подсистема $T(V)$. Подсистема $T(V) \cap T_1(\widetilde{N})$ есть часть системы $T_1(\widetilde{N})$, в которой допустима индукция по $T(V)$-множествам. $N \neq V$ доказуемо в $T_1(N)$, но не в $T(V)$. Выводима ли в $T_1(\widetilde{N})$ формула $\widetilde{N} \neq V$, автору неизвестно.

После обсуждения связи между системами $T_1(N)$, $T_1(\widetilde{N})$ и $T(V) \cap T_1(\widetilde{N})$ автор определяет так называемую 0-систему $T(0)$. Зависимая переменная p является $T(0)$-множеством, если все зависимые переменные, встречающиеся в определении F переменной p, суть $T(0)$-множества, и F имеет утвердительный тип. 0 есть $T(0)$-множество, а V — нет. $T(0)$ непротиворечива. Элементарные множества $\{a\}$, $\{a, b\}$, ... и упорядоченные n-ки $\langle a, b\rangle$, ... не являются $T(0)$-множествами. Введем следующие определения:

$$\forall u (u \in^* \{a\} \equiv u \neq a),$$

$$\forall u (u \in^* \{a, b\} \equiv u \neq a \,\&\, u \neq b),$$

$$\forall u (u \in^* \langle a, b\rangle \equiv u \neq^* \{a\} \,\&\, u \neq^* \{a, b\}) \quad \text{и т. д.}$$

Определенные таким образом зависимые переменные являются $T(0)$-множествами, причем $^*\langle a_1, \ldots, a_n\rangle =$ $=^* \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \equiv a_1 = b \,\&\, \ldots \,\&\, a_n = b_n$. Вышеприведенные определения служат примером применения оператора „двойственности“ *, применяемого к переменным, формулам, доказательствам, подсистемам и другим объектам UL (автор дает подробные определения оператора * для всех упомянутых случаев). Объекты Q и $^*Q$ называются взаимно двойственными, причем $^*(^*Q) = Q$. В частности, $0 = {}^*V$ и $T(0) = {}^*T(V)$. Оказывается справедливым следующий принцип двойственности: Если P есть доказательство в UL утверждения $\sigma \vdash H$, то $^*P$ есть доказательство двойственного предложения $^*\sigma \vdash {}^*H$ (этот принцип является обобщением известных законов де Моргана). Из принципа двойственности вытекает также, что если теория T есть непротиворечивая подсистема UL, то двойственная ей теория $^*T$ также непротиворечива, каждой T-теореме A соответствует $^*T$-теорема $^*A$, в частности, если $\sigma \vdash H$ есть UL-теорема, то $^*\sigma \vdash {}^*H$ также является UL-теоремой (поскольку UL двойственна самой себе). В заключение приводится вывод некоторых формул системы $T(V)$. Ю. А. Гастев

11189. Исследование логической структуры математики. VII. Теоретико-множественные парадоксы. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. VII. Settheoretical contradictions. Kuroda Sigekatu), Nagoya Math. J., 1959, **14**, 109—127 (англ.)

В этой части работы автор рассматривает способы построения в рамках UL (РЖМат, 1960, 8512) различных формальных теорий, в которых не проходили бы известные теоретико-множественные парадоксы (Рассела, Кантора, Бурали — Форти и др.). В качестве примера таких теорий берется арифметическая система $T_1(N)$, подробно описываемая в следующей части работы (реф. 11190). Обсуждается вопрос о „законном" и „незаконном" образовании теоретико-множественных и логических понятий (в частности в связи с применением принципа свертывания). Ю. А. Гастев

11190. Исследование логической структуры математики. VIII. Непротиворечивость арифметической системы $T_1(N)$. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. VIII. Consistency of the natural-number theory $T_1(N)$. Kuroda Sigekatu), Nagoya Math. J., 1959, **14**, 129—158 (англ.)

На основе „универсальной логики" UL (РЖМат, 1960, 8512) определяются арифметические системы $T_0(N)$ и $T_1(N)$. Константами системы $T_0(N)$ являются универсальное множество V, пустое множество 0 и натуральный ряд N, определяемый при помощи формулы

$$\forall u\,(u \in N \equiv$$

$$\equiv \forall x\,(0 \in x \,\&\, \forall y\,((y \in x \supset y' \in x) \supset u \in x)))$$

(y' — обозначение для $\{y\}$). Натуральными числами $T_0(N)$ являются 0, 0′, 0″, ..., обозначаемые также через 0, 1, 2, ... $T_1(N)$ отличается от $T_0(N)$ наличием индукции по произвольным множествам $T_0(N)$. Методом, аналогичным методу генценовского доказательства непротиворечивости арифметики, устанавливается непротиворечивость $T_0(N)$ и $T_1(N)$. В последнем доказательстве используется (содержательная) трансфинитная индукция до первого ε-числа и результаты и понятия предыдущих частей работы, в частности теорема об устранимости сечений (РЖМат, 1960, 8513) и понятие разложения формулы (реф. 11188). Следуя Генцену, автор обсуждает связь между непротиворечивостью арифметической формальной системы и нашими интуитивными арифметическими представлениями. Ю. А. Гастев

11191. Исследование логической структуры математики. IX. Выводимые формулы арифметической системы $T_1(N)$. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. IX. Deductions in the natural-number theory $T_1(N)$. Kuroda Sigekatu), Osaka Math. J., 1959, **11**, № 1, 7—42 (англ.)

В этой части работы приводится вывод основных формул арифметической системы $T_1(N)$ (реф. 11190), касающихся сложения (раздел A) и умножения (раздел B).

Ю. А. Гастев

11192. Исследование логической структуры математики. X. Понятия и множества. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. X. Concepts and sets. Kuroda Sigekatu), Osaka Math. J., 1959, **11**, № 2, 213—248 (англ.)

Зависимые переменные системы UL (РЖМат, 1960, 8512) делятся на „понятия" (concepts) и „множества" (sets). Это деление не абсолютно — одна и та же зависимая переменная может трактоваться как понятие в одном UL-доказательстве (или теории, по-прежнему на базе UL) и как множество в другом доказательстве (теории). Различению всех таких случаев и нужным для этой цели точным определениям „понятия" и „множества" посвящена данная часть реферируемой работы.

Ю. А. Гастев

11193. Исследование логической структуры математики. XII. Принцип объемности и принцип выбора. Курода (An investigation on the logical structure of mathematics. XII. The principle of extensionality and of choice. Kuroda Sigekatu), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 7, 400—403 (англ.)

Заключительная часть логико-математического исследования (РЖМат, 1960, 8512—8515; реф. 11187—11192), в которой рассматриваются различные формулировки принципа объемности в UL. В UL формулируется принцип выбора, утверждающий для произвольного множества a и непустоту „множества выбора" Ch^a, определенного при помощи формулы

$$\forall u\,(u \in \mathrm{Ch}^a \equiv$$

$$\equiv u \in \mathrm{Un} \,\&\, \forall x\,(x \in a \,\&\, x \neq 0)\, \exists y\,(x \in y \,\&\, \langle x, y \rangle \in u)).$$

Ю. А. Гастев

11194. Исчисления и формальные системы. Керри (Calculuses and formal systems. Curry Haskell B.), Dialectica, 1958, **12**, № 3-4, 249—273 (англ.; рез. нем., франц.)

Обобщая некоторые определения Лоренцена (РЖМат, 1956, 5052 К), автор вводит понятие составного исчисления ранга r. В составном исчислении ранга r правила вывода разбиты на группы $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_r$; каждая переменная, фигурирующая хотя бы в одном правиле вывода, отнесена к одному из $r+1$ типов. Переменные i-го типа называются $\mathfrak{R}_i$-переменными. Допустимыми значениями любой $\mathfrak{R}_i$-переменной считаются слова, являющиеся результатами применения правил из группы $\mathfrak{R}_i$. Эти слова называются $\mathfrak{R}_1$-словами. Составное исчисление представляет собой одновременное индуктивное определение $\mathfrak{R}_0$-слов, $\mathfrak{R}_1$-слов, ..., $\mathfrak{R}_r$-слов. Исчисления рангов 0, 1, и 2 рассматривал Лоренцен. Всякое составное исчисление ранга 1, в котором нет $\mathfrak{R}_1$-переменных и в качестве $\mathfrak{R}_0$ фигурирует исчисление, порождающее все слова в заданном алфавите, автор называет L_1-исчислением. Он доказывает, что если в составном исчислении один из определяемых исчислением типов слов выделен в качестве главного, то можно построить некоторое L_1-исчисление, эквивалентное исходному относительно этого типа слов.

Исчисление $\mathfrak{R}$ называется тектоническим, если для него разрешима проблема выводимости и вывод любого выводимого слова, рассматриваемый как дерево, единствен. Устанавливается некоторое достаточное условие тектоничности исчислений ранга 0 (на основании этого результата автор доказывает тектоничность исчисления, порождающего бесскобочные логические формулы Лукасевича, и исчислений, конструирующих обычно применяемые в математике скобочные формулы).

Автор, рассматривая некоторое общее понятие формальной системы (Curry H. B., Outlines of a formalistic philosophy of mathematics, Amsterdam, 1951), отмечает, что синтаксическая часть формальной системы представима посредством тектонического исчисления, и устанавливает эквивалентность в определенном смысле понятий формальной системы и исчисления.

С. Ю. Маслов

11195. Исчисление имен Лесневского. Слупецкий (S. Leśniewski's calculus of names. Słupecki Jerzy), Stud. log., 1955, **3**, 7—76 (англ.; рез. польск., русск.)

Излагается исчисление имен Лесневского (Leśniewski S., O podstawach ontologii (Ueber die Grundlagen der Ontologie). Reprint from the Proc. of the Scient. Soc. Warsaw. XXIII. Fac. III. Warszawa, 1930, p. 114), называемое также онтологией (от греческого ὀντος — бытие). Исчисление Лесневского, основанное на классическом исчислении предикатов, содержит символ ε („$x \varepsilon a$" читается „x есть a") и следующую аксиому $x \varepsilon a \equiv \exists y\,(y \varepsilon x) \,\&\, \forall y \forall z\,(y \varepsilon x \,\&\, z \varepsilon x \supset y \varepsilon z) \,\&\, \forall y\,(y \varepsilon x \supset y \varepsilon a)$

Равенство определяется при помощи формулы: $x = y \equiv_{Lf} x\varepsilon y \;\&\; y\varepsilon x$. Кроме обычных правил вывода, в исчислении имен имеется также так называемое правило объемности.

Автор подробно разбирает фрагмент системы Лесневского, не использующий правила объемности, который он называет элементарной онтологией. В предикатах элементарной онтологии аргументные места занимаются предметами, относящимися к семантической категории имен. Переменных предикатов в элементарной онтологии нет. Автор приходит к выводу, что смысл слова „есть", выражаемый в онтологии символом ε, совпадает с разговорным смыслом этого слова. Автор показывает также, что для любой семантической категории языка неэлементарной онтологии можно определить двуместный предикат, оба аргумента которого относятся к этой категории, и указать содержащую его формулу, конструкция которой аналогична конструкции аксиомы онтологии для ε. Приводится пример определения одного такого предиката; соответствующая ему формула оказывается теоремой онтологии.

Ю. А. Гастев

11196. Новое доказательство непротиворечивости арифметики. Хлодовский И. Н., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 105—140

Излагается доказательство непротиворечивости классической арифметики посредством трансфинитной индукции по числам второго класса, понимаемой конструктивно. Непротиворечивость всей интуиционистской математики не предполагается — достаточно считать непротиворечивой лишь конструктивную теорию вполне упорядоченных множеств второго класса. Доказательство опирается на установленную автором непротиворечивость описанного им «регулярного исчисления».

Ю. А. Гастев

11197. О промежуточных исчислениях высказываний. Умэдзава (On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic. Umezawa Toshio), J. Symbolic Logic, 1959, **24**, № 2, 141—153 (англ.)

Определяется интуиционистское исчисление секвенций LJ', эквивалентное исчислению высказываний LJ, введенному Генценом (Gentzen G., Math. Z., 1934—1935, **39**, 176—210, 405—431). Для всякой секвенции Z через LZ обозначается исчисление, получаемое из LJ' путем присоединения Z в качестве схемы аксиом. Строится последовательность таких классически истинных секвенций Z_i, для которых соответствующие исчисления LZ_i образуют убывающую последовательность типа ω^ω. Для любого натурального n строится n таких классически выводимых Z_k, для которых LZ_k попарно несравнимы (т. е. при любых i, $j \leqslant n$ множество выводимых секвенций исчисления LZ_i не является подмножеством множества выводимых секвенций исчисления LZ_j). Опираясь на результаты Роза (РЖМат, 1954, 2488), автор строит также убывающую последовательность типа ω^ω исчислений LZ, каждый элемент которой имеет в качестве выводимых только реализуемые секвенции (при этом секвенция $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ называется реализуемой, если реализуема формула $(A_1 \& \ldots \& A_m) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$). Заключительная часть статьи посвящена вопросу о независимости операций $\neg$, $\&$, $\vee$ и $\supset$ в исчислениях LZ при некоторых конкретных Z.

Ю. Т. Медведев

11198. Об исчислениях, промежуточных между интуиционистским и классическим исчислением предикатов. Умэдзава (On intermediate propositional logics. Umezawa Toshio), J. Symbolic Logic, 1959, **24**, № 1, 20—36 (англ.)

Подобно предыдущей работе (реф. 11197), автор исследует взаимоотношение между исчислениями, получаемыми из интуиционистского исчисления секвенций путем присоединения классически выводимых секвенций в качестве схем аксиом; отличие состоит в том, что исходным интуиционистским исчислением секвенций является не исчисление высказываний, как в упомянутой работе, а узкое исчисление предикатов (эквивалентное интуиционистскому исчислению предикатов Генцена). В частности, обобщаются основные результаты, полученные автором (реф. 11197) для случая исчислений высказываний.

Ю. Т. Медведев

11199. Об одном фрагменте импликационного исчисления предложений. Расёва (O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdań. Rasiowa Helena), Stud. log., 1955, **3**, 208—226 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система S исчисления предложений с одним пропозициональным функтором C, определенным при помощи следующей логической матрицы $\mathfrak{M}$:

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	1	2	1	2
4	2	1	1	1

с одним выделенным значением 1. Матрица $\mathfrak{M}$ возникла путем перемножения матрицы, определяющей классическую импликацию, с матрицей, определяющей классическую эквивалентность. Вследствие этого множество всех тавтологий системы S состоит из всех тех тавтологий импликационного исчисления предложений S_0, которые остаются верными при интерпретации данного функтора C, как знака эквивалентности.

Доказывается, что система S поддается аксиоматизации. Независимую и полную аксиоматику S составляют следующие выражения: 1) $CCpqCCqrCpr$, 2) $CqCpCpq$, 3) $CCCpqCCpqpp$. Присоединяя к системе S любую тавтологию импликационного исчисления предложений S_0, мы получаем уже целую систему импликационного исчисления предложений S_0. Аксиомы 1, 2, 3 составляют полную аксиоматику (этот результат принадлежит проф. Слупецкому) двузначного исчисления предложений с кванторами. Проблема аксиоматизации системы S является частным случаем более общих проблем: 1) Поддается ли аксиоматизации произведение двух произвольных, поддающихся аксиоматизации систем с одним пропозициональным функтором? 2) Поддается ли аксиоматизации каждое исчисление предложений с одним пропозициональным функтором, определенным при помощи конечной нормальной матрицы? Последняя проблема связана с проблемой алгебраической аксиоматизации конечных алгебр, исследуемой Линдоном.

Резюме автора

11200. Нормальные формы функторов классической логики. Михэйлеску (Formele normale ale functorilor logicei clasice. Mihăilescu Eugen), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1959, **10**, № 1, 117—144 (рум.; рез. русск., франц.)

11201. Логические схемы и основы алгебры логики. Комамия Ясуо, Отомасён, Automation, 1959, **4**, № 10, 45—48; № 11, 69—73 (японск.)

11202. О независимости аксиомы конструктивности. Шёнфилд (On the independence of the axiom of constructibility. Shoenfield J. R.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 3, 537—540 (англ.)

Гёдель в своей известной работе о непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипо-

тезы показал, что оба эти утверждения вытекают из так называемой аксиомы конструктивности. Естественно поставить вопрос, не вытекает ли аксиома конструктивности в свою очередь из аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы. Автор ставит вопрос об относительной независимости аксиомы конструктивности, т. е. о доказательстве следующего утверждения: если аксиома конструктивности не выводима из аксиом Гёделя A—D, то она не выводима из аксиом A—D, аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы. В реферируемой статье доказаны два несколько более слабых утверждения, относящихся к сформулированной автором ослабленной обобщенной континуум-гипотезе: существует такое порядковое число α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, — и ослабленной аксиоме конструктивности: каждое числовое множество конструктивно.

Теорема 1. Если аксиома конструктивности не выводима из аксиом A—D, то она не выводима из аксиом A — D, аксиомы выбора и ослабленной обобщенной континуум-гипотезы.

Теорема 2. Если ослабленная аксиома конструктивности не выводима из аксиом A — C, то она не выводима из аксиом A — D, аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы (а следовательно, тогда и аксиома конструктивности не выводима из указанных аксиом).

Доказательства этих теорем проводятся при помощи построения модели Δ^*, являющейся расширением гёделевской модели Δ. Поскольку аксиома D не зависима от аксиом A — C (РЖМат, 1957, 299), а аксиома конструктивности, как установлено в реферируемой статье, влечет аксиому D, аксиома конструктивности оказывается не зависимой от аксиом A — C. Ю. А. Гастев

11203. Исчисление высказываний в математической логике. I. Кулль (Lausearvutusest matemaatilises loogikas. I. Kull I.), Eesti loodus, 1960, № 1, 1—5 (эст.)

Краткое изложение начал содержательного исчисления высказываний: разъяснение смысла пропозициональных связок (с приложением таблиц истинности), вывод основных логических законов (общезначимых формул) и понятие о приведении формулы к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам (с примерами). Ю. А. Гастев

11204. *N*-обобщаемые системы, интуиционистские системы, системы соотрицания, псевдомодальные и ко-Δ системы. Мо Шао-куй (Moh Shaw-kwei), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 4, 389—412 (кит.; рез. англ.)

Строится большое число интуиционистских систем. При их обсуждении делается вывод, что некоторые из них более удовлетворительны, чем система Гейтинга. Интуиционистские системы обобщаются, что дает системы соотрицания. Параллельно строятся псевдомодальные системы и ко-Δ системы. С использованием понятий *N*-обобщаемости и *N*-вводимости обсуждаются некоторые свойства различных логических систем. Кроме того, доказываются следующие теоремы: Среди интуиционистских систем, систем соотрицания, псевдомодальных систем и ко-Δ систем существует самое большее одна, являющаяся *N*-обобщаемой и *N*-вводимой. Каждая интуиционистская система содержит (в известном смысле) все истинные предложения обычной двузначной логики *M*, но ни одна из них не содержит всех правил *M*. А. В. Гладкий

11205. Модальные системы и системы импликации. Мо Шао-куй (Moh Shaw-kwei), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 2, 121—142 (кит.; рез. англ.)

Строится ряд новых систем модальной логики и две системы строгой импликации. А. В. Гладкий

11206. О релятивизации кванторов. Охаси (On a relativization of quantifiers. Ohashi Kempachiro), Норинсё суйсан косюсё кэнкю хококу. Сидзэн кагакухэн, J. Shimonoseki Coll. Fish. Natur. Sci., 1959, № 4, 9—12 (англ.)

В развитие метода Тарского (Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable theories, 1953) описывается процесс так называемой релятивизации кванторов (relativisation of quantifiers), состоящий в следующем. Пусть F — произвольная формула рассматриваемой формальной теории T, $P(.,.)$ — некоторый двуместный предикат. Тогда через F^0 обозначается формула, получающаяся из F заменой каждой ее подформулы вида $\forall x G(x)$ на $\forall x(P(t,x) \supset G(x))$, а каждой подформулы вида $\exists x G(x)$ — на $\exists x(P(t,x) \& G(x))$; t, называемая подпеременной F, в F не входит. Путь F содержит свободные переменные $a_1, \ldots, a_m$ и постоянные термы $c_1, \ldots, c_n$; тогда через F^* обозначается формула $(P(t,a_1) \supset (P(t,a_2) \supset (\ldots(P(t,c_1) \supset (\ldots(P(t,c_n) \supset F^0))\ldots)$, где t — подпеременная F (F^*, сопоставленная формуле, не содержащей свободных переменных и констант, совпадает с F^0). Через $F^{(P)}$ обозначается формула $\exists s \forall t P(s,t) \supset F^*)$, где s не входит в F. Описанный переход от F к $F^{(P)}$, очевидно, однозначно определенный (без ограничения общности можно считать, что все F имеют одну и ту же подпеременную t), и называется релятивизацией кванторов.

Для данной теории T и предиката $P(.,.)$ определяется „релятивизованная" теория $T^{(P)}$. Ее постоянные — это постоянные T и предикат $P(.,.)$. Множество теорем $T^{(P)}$ есть минимальное множество всех $F^{(P)}$, сопоставленных всевозможным F и выводимых в T, замкнутое относительно применения правил вывода T. Для случая, когда $P(.,.)$ не является предикатом исходной системы T, автор находит некоторые достаточные условия для того, чтобы система T^P была существенно неразрешимой тогда и только тогда, когда существенно неразрешима теория T. Найдены также соответствующие достаточные условия для конечной и рекурсивной аксиоматизуемостей. Ю. А. Гастев

11207. Об ω-неполноте аксиоматической арифметики. Охаси (On ω-incompleteness of an axiomatic number theory. Ohashi Kempachiro), Норинсё суйсан косюсё кэнкю хококу. Сидзэн кагаку-хэн, J. Shimonoseki Coll. Fish. Natur. Sci., 1959, № 4, 13—18 (англ.)

Методом релятивизации кванторов, изложенным в предыдущей работе автора (реф. 11 06), строится система $\sum^{(U)}$ — „релятивизованное расширение" формальной арифметической системы $\sum$, построенной над узким исчислением предикатов, с аксиомами $\forall x\,(x=x)$, $\forall x \forall y (x=y \supset (A(x) \supset A(y)))$, $\forall x \neg(x<x)$, $\forall x \forall y \forall z (x<y \& y<z \supset x<z)$, $\forall x (x<x')$ и правилом полной индукции. Средствами $\sum^{(U)}$ доказывается независимость аксиомы $\forall x \forall y (x<y \supset x'=y \vee x'<y)$ от аксиом $\sum$ и на основе этой независимости ω-неполнота $\sum$. Ю. А. Гастев

11208. О некоторых основных понятиях дедуктивных теорий. I. Охаси (On some fundamental concepts of deductive theories. I. Ohashi Kempachiro), Норинсё суйсан косюсё кэнкю хококу. Сидзэн кагаку-хэн, J. Shimonoseki Coll. Fish. Natur. Sci., 1959, № 4, 19—24 (англ.)

Тарский (Tarski A., Logic and semantics, 1956), исследуя понятие неразрешимости дедуктивных теорий, по-

строил формальные определения основных математических понятий, относящихся к дедуктивным теориям, их непротиворечивости и полноте. Определения эти, будучи приложимы как к разрешимым, так и к неразрешимым дедуктивным теориям, предполагают в то же время «конструктивность» последних (т. е. множество теорем теории может быть не рекурсивным, но во всяком случае должно быть рекурсивно перечислимым). Автор предлагает аналогичные определения, приложимые и к «неконструктивным» теориям. Отличаясь от определений Тарского по форме, эти определения применительно к «конструктивным» теориям позволяют получить все результаты, вытекающие из определений Тарского. Ю. А. Гастев

11209. Вложение элементарных теорий в конечно-аксиоматизируемые. Хертиг (Einbettung elementarer Theorien in endlich Axiomatisierbare. Härtig Klaus), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1958, **4**, № 4, 249—292 (нем.)

Статья примыкает к работе Клини (Kleene S. C., Mem. Amer. Math. Soc., 1952, **10**, 27—68). Рассматривается исчисление, содержащее, кроме логических констант и индивидуальных переменных, индивидуальные, функциональные и предикатные константы. В множестве формул этого исчисления выделяется подмножество ax формул, общезначимых в некоторой интерпретации. ax предполагается общерекурсивным или рекурсивно-перечислимым (эти случаи рассматриваются параллельно). Доказывается, что если присоединить к запасу основных символов такого исчисления трехместную предикатную константу V_k $T_1T_2T_3$. (в интерпретации: «(слово) T_3 есть соединение (слов) T_1 и T_2 (в этом порядке)»), то в полученном расширенном исчислении можно выделить конечную систему аксиом таким образом, что множество формул первоначального исчисления, выводимых из этой системы (в расширенном исчислении), совпадает с ax. Наряду с общим случаем, отдельно рассматривается случай пеановской арифметики (где роль ax играет множество систем, получаемых из схемы аксиом индукции). Доказательства чрезвычайно подробны. А. В. Гладкий

11210. Представление монадических булевых алгебр. Халмош (The representation of monadic Boolean algebras. Halmos Paul R.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 3, 447—454 (англ.)

Основные определения, а также ряд результатов по теории представлений см. РЖМат, 1959, 6555. Пусть A — монадическая алгебра, не обязательно функциональная. Элемент $p \in A$ называется замкнутым, если $\exists p = p$. Множество всех замкнутых элементов совпадает с $\exists A$, т. е. множеством всех $\exists p$, $p \in A$, и образует булеву подалгебру в A. Пусть C — какая-либо булева алгебра, содержащая $\exists A$. C-константой алгебры называется булев гомоморфизм A в C, являющийся тождественным отображением на $\exists A$. Алгебра A называется C-богатой, если для всякого элемента $p_0 \in A$ существует (возможно, не одна) C-константа b такая, что $\exists p_0 = bp_0$. Если $C = \exists A$, то в этих определениях C опускается.

Вначале приводится более простое, чем ранее (РЖМат, 1959, 6555), доказательство основной теоремы о представлении:

Если K есть множество всех C-констант C-богатой монадической алгебры A, то A изоморфна C-значной функциональной монадической алгебре с областью определения K. Далее изучается вопрос о существовании C-констант. С помощью одной леммы о расширении булевых гомоморфизмов последовательно доказываются:

Теорема 3 (Сикорского). Если B — булева подалгебра булевой алгебры A и если a есть гомоморфизм B в полную булеву алгебру C, то a можно расширить до гомоморфизма b алгебры A в C.

Теорема 1. Если C — полная булева алгебра, содержащая булеву алгебру всех замкнутых элементов монадической алгебры A, то A C-богата.

Теорема 2. Всякая счетная монадическая алгебра богата.

Последняя часть статьи посвящена топологизации результатов. От булевых алгебр и гомоморфизмов автор переходит соответственно к булевым пространствам и гомеоморфизмам (см., например, Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. 11, § 3). Понятием, дуальным понятию монадической алгебры A, здесь будет тройка (X, Y, h), где X и Y — булевы пространства, а h — непрерывное открытое отображение X на Y. Элементы p алгебры A соответствуют при этом открытым и замкнутым (clopen) подмножествам в X; действие квантора определяется как $\exists p = h^{-1}hp$; константы соответствуют поперечным сечениям (cross section) отображения h. Поперечным сечением h называется непрерывное отображение g пространства Y в X такое, что hg является тождественным отображением на Y. Требование полноты булевой алгебры C при дуализации заменяется требованием экстремальной несвязности Z (замыкание любого открытого подмножества в Z открыто). Формулируются результаты, дуальные теоремы 3 и 2:

Теорема 4. Если h — непрерывное отображение булева пространства X на булево пространство Y и если f — непрерывное отображение экстремально несвязного булева пространства Z в Y, то существует непрерывное отображение g пространства Z в X такое, что $hg = f$.

Теорема 5. Непрерывное открытое отображение булева пространства со счетной базой на булево пространство обладает поперечным сечением.

Наконец, автор отмечает, что теорема 4 является частным случаем одной теоремы Глисона (РЖМат, 1959, 9862), а теорема 5 — частным случаем одной теоремы Майкла (РЖМат, 1959, 8933). Д. А. Захаров

11211. Отношение равенства в математических теориях. Теодореску (Relaţia de egalitate în teoriile matematice. Teodorescu N.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1959, **10**, № 2, 247—254 (рум.; рез. русск., франц.)

Эквивалентность формально определяется как любое симметричное и транзитивное отношение. На основе понятия совместности одного отношения эквивалентности с другим автор вводит следующее определение отношения равенства:

Отношением равенства в теории E называется отношение эквивалентности $R(x, y)$, влекущее за собой любое другое отношение эквивалентности в E для любого значения x, для которого это отношение имеет место. Устанавливается единственность отношения равенства в данной теории E, если оно существует. Приводятся еще два эквивалентных определения равенства и отмечается, что, по мнению автора, эти определения более общи и более естественны, чем определения, данные Бурбаки. С. И. Адян

11212. Существование отношения равенства и отношения эквивалентности в математической теории. Теодореску (Existenţa relaţiei de egalitate şi relaţiile de echivalenţă într-o teorie matematică. Teodorescu N.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1959, **10**, № 2, 403—410 (рум.; рез. русск., франц.)

Реферируемая заметка посвящена выяснению условий существования отношения равенства в математической теории E, согласно данному автором определению (реф. 11211). В частности, устанавливается, что для существования в некоторой теории E отношения равенства необходимо и достаточно, чтобы в этой теории существовало хотя бы одно отношение эквивалентности. С. И. Адян

11213. К аксиоматике чисел. Ленц (Zur Axiomatik der Zahlen. Lenz Hanfried), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 1-2, 33—44 (нем.)

Вместо системы аксиом Пеано рассматривается более слабая система аксиом. Числовая система есть множество S с некоторым отображением π этого множества в себя, удовлетворяющим аксиомам:

(I) Если $x^\pi = y^\pi$, то $x = y$ (обратимость π),

(II) Существует такой элемент $0 \in S$, что из $0 \in U \subseteq S$ и $U^\pi = U \cap S^\pi$ вытекает $U = S$ (аксиома индукции). Здесь x^π, X^π означает соответственно образ при отображении π элемента x или множества X.

Система аксиом (I), (II) может служить для описания: 1) натуральных чисел (при дополнительном требовании: $S^\pi \subset S$, причем $S \setminus S^\pi$ содержит единственный элемент); а) циклических числовых систем (если $S^\pi = S$ и для любого непустого подмножества $U \subseteq S$ из $U^\pi \subseteq U$ вытекает $U = S$); б) целых чисел (при условии, что $S^\pi = S$ и существует непустое подмножество $V \subset S$, для которого $V^\pi \subseteq V$). Изучается также строение числовых систем, описываемых одной лишь аксиомой индукции (II). В терминах гомоморфизмов числовых систем удается сформулировать определения сложения и умножения чисел, общие для всех числовых систем, описываемых аксиомами (I), (II). Ф. А. Кабаков

11214. Основания арифметики по Пеано. Субьета (Los fundamentos de la aritmetica segun Peano. Zubieta R. F.), Rev. mat., 1959, № 6, 1—12 (исп.)

11215. Исследование категорий суммирования. Кинокуния (Kinokuniya Yoshio), Мураран когё дайгаку кэнкю хококу, Mem. Muroran Univ. Engng, 1958, **3**, № 1, 207—216 (японск.; рез. англ.)

11216. Правило реитерации. Циклическая система для синтаксиса, нейрограмм и всех законов. Додд (The reiteration rule. A cyclic system for syntax, neurograms, and all laws. Dodd Stuart C.), Synthese, 1959, **11**, № 1, 7—32 (англ.)

Попытка построения теории, способной систематизировать все науки, с помощью понятия «реитерации», т. е. повторения некоторой операции. Употребление математических понятий тривиально и не везде корректно. А. В. Гладкий

11217. Смысловые расстояния и семантические тесты. Юрт (Distances of meaning and semantical tests. Hiorth Finngeir), Synthese, 1959, **11**, № 1, 33—62 (англ.)

Используя метод анкет, предложенный Нессом (РЖМат, 1960, 8532) для определения синонимии, автор вводит некоторые количественные характеристики смыслового различия между выражениями естественных языков, называемые «смысловыми расстояниями» и применимые только к пониманию смысла выражения некоторым лицом или группой лиц. Описываются результаты эксперимента по измерению смысловых расстояний, проведенного автором над группой студентов. А. В. Гладкий

11218. Экстенсиональность. Маркус (Extensionality. Marcus Ruth Barcan), Mind, 1960, **69**, № 273, 55—62 (англ.)

Основное утверждение, обосновываемое автором, состоит в следующем: понятие экстенсиональности, обычно используемое в семантических исследованиях, не является однозначно определенным. Различные логические системы являются в большей или меньшей степени экстенсиональными в зависимости от того, какие контексты и предикаты они рассматривают, и от характера используемых ими понятий эквивалентности. В этой связи рассматриваются, в частности, некоторые построенные ранее автором модальные системы. А. В. Гладкий

11219. О формализации косвенного рассуждения. Гудстейн (On the formalisation of indirect discourse. Goodstein R. L.), J. Symbolic Logic, 1958(1959), **23**, № 4, 417—419 (англ.)

Предлагается способ формализации приведенного в работе Коэна (РЖМат, 1959, 8758) примера: «Если A говорит, что все, что говорит B, ложно, и B говорит, что некоторое из того, что говорит A, истинно, то некоторое из того, что говорит A, ложно, и некоторое из того, что говорит B, истинно». При формализации используется видоизмененное узкое исчисление предикатов, в котором предметными переменными являются суждения (и допускаются формулы вида $A(x) \to x$ и т. п.). А. В. Гладкий

11220. Формализация «полисмена» профессором Гудстейном. Коэн (Professor Goodstein's formalisation of the policeman. Cohen L. Jonathan), J. Symbolic Logic, 1958(1959), **23**, № 4, 420 (англ.)

Высказываются два критических замечания по поводу заметки Гудстейна (реф. 11219). Автор сообщает, что намерен в ближайшее время опубликовать способ формализации косвенного рассуждения, позволяющий, по-видимому, избежать указанных в этих замечаниях трудностей. А. В. Гладкий

11221. Метод сопутствующих изменений Милля. Греневский (Milla kanon zmian towarzyszacych. Greniewski Henryk), Stud. log., 1957, **5**, 109—127 (польск.; рез. русск., англ.)

Аксиоматизируется понятие относительно изолированной системы. Каждая относительно изолированная система заключает в себе входы и выходы (англ. input и output). Состояние любого выхода однозначно детерминировано в каждый момент одновременными и прошлыми состояниями всех входов. Автор обращает внимание на то, что понятие относительно изолированной системы играет основную роль в кибернетике, логике аналогии и логике индукции. Затем автор формулирует и доказывает метод сопутствующих изменений Милля в рамках формализированной теории некоторой изолированной системы. Аналогичную задачу для остальных методов Милля автор старался решить в предыдущей работе (Elementy logiki indukcji, Варшава, 1955). Резюме автора

11222. Модальное «вероятно». Хамблин (The modal «probably» Hamblin C. L.), Mind, 1959, **68**, № 270, 234—240 (англ.)

Автор предлагает два варианта формальной трактовки предложений вида «p вероятно» (например, «вероятно, будет дождь»). В первом варианте «p вероятно» означает «вероятность p больше x», где x — фиксированное число, заключенное между 0 и 1. Во втором варианте суждениям сопоставляются (в основном произвольно) числа, называемые «индексами правдоподобия», и «p вероятно» означает «индекс правдоподобия p больше индекса правдоподобия $\bar{p}$». В обоих вариантах оператор p_p — «p вероятно» — обладает свойствами модального оператора. А. В. Гладкий

11223. Логическая модель как средство научного исследования. Зиновьев А. А., Ревзин И. И., Вопр. философии, 1960, № 1, 82—90, 185 (рез. англ.)

Общедоступное изложение ряда вопросов, относящихся к моделированию как средству научного исследования. Главное внимание авторы уделяют так называемым «знаковым», или «логическим» моделям (формальным системам), моделирующим конкретные системы физических объектов. Бо́льшая часть примеров почерпнута из области структурной лингвистики. Ю. А. Гастев

11224. Самоприменимость, истинность и доказуемость. Парсонс, Кол (Self-reference, truth, and provability. Parsons Charles, Kohl Herbert R.), Mind, 1960, **69**, № 273, 69—73 (англ.)

Следуя Годдарду (Goddard L., Mind, 1958, 13—21), авторы обсуждают связь между понятиями истинности и доказуемости. Для этого привлекается понятие «самоприменимости» (self-reference) утверждения (формулы). Самоприменимыми, например, являются утвержде-

ние «это утверждение ложно» (из «парадокса лжеца») и формула, утверждающая свою недоказуемость, фигурирующая в доказательстве теоремы Гёделя. Формальное понятие доказуемости, в отличие от содержательного понятия истинности, не приводит к семантическим парадоксам типа парадокса лжеца. Этот и другие выводы автора общеизвестны (см., например, Клини, РЖМат, 1957, 7591 К). Ю. А. Гастев

11225. Современная логика. Бет (Moderne logica. Beth E. W.), Euclides, 1959, **34**, № 9, 257—266 (гол.)

Популярная статья, содержащая общие соображения о природе современной математической логики и набросок построения логики одноместных предикатов с помощью семантических таблиц. А. В. Гладкий

11226. Математическая логика на Международном конгрессе математиков в Амстердаме. Мостовский (Logika matematyczna na Międzynarodowym kongresie matematyków w Amsterdamie. Mostowski Andrzej), Stud. log., 1956, **4**, 245—253 (польск.)

11227. Что такое математическая логика? (Ce este logica matematică? Articol de popularizare. A. M.), Gaz. mat. şi fiz., 1960, **11**, № 2, 69—83 (рум.)

11228. Толкование в психологическом и методологическом смысле. Гедымин (Tłumaczenie w sensie psychologicznym i metodologicznym. Giedymin Jerzy), Studia log., 1960, **9**, 245—256 (польск.)

11229. Восемьдесят лет исследований по основаниям математики. Ван Хао (Eighty years of foundational studies. Wang Hao), Dialectica, 1958, **12**, № 3-4, 466—497 (англ.; рез. нем., франц.)

Обзор основных направлений в исследованиях по основаниям математики и математической логике, предпринятый в связи с восьмидесятилетием со дня выхода в свет книги Фреге «Begriffsschrift, ein der arithmetischen nachgebilte Formalsprache des reinen Denken». Следуя Бернайсу, Крейселу и др., автор выделяет пять таких основных направлений (концепций): 1) антропологизм (Бернайс) — эта концепция, называемая Крейселом строгим финитизмом, принимает во внимание ограниченность человеческих возможностей и налагает в связи с этим ограничения на использование абстракции потенциальной осуществимости; 2) финитизм Гильберта; 3) интуиционизм; 4) предикативизм (Рассел и его школа); 5) платонизм — обычная для классической математики свобода образования абстрактных (например, теоретико-множественных) понятий, основанная, в конечном счете, на признании объективного существования мира идей. В свете рассмотренных концепций прослеживается эволюция взглядов на такие основные математические понятия, как доказательство, осуществимость, число, множество, конструктивность.

Ю. А. Гастев

11230. Обоснование и анализ логических методов Джорджа Буля. Стяжкин Н. И., Вестн. Моск. ун-та. Экон., филос. 1960, № 1, 79—90

§ 1 реферируемой заметки посвящен методологическим взглядам Буля. Автор не разделяет распространенного в историко-математической литературе мнения о том, что Буль был представителем «догильбертовского формализма», и, ссылаясь на высказывания самого Буля, указывает на материалистическую основу его концепций. В § 2 приводится краткое описание логического исчисления Буля. В § 3 автор дает интерпретацию употребляющихся Булем логических операций, уделяя особое внимание неясностям, связанным с истолкованием булевой операции «логического деления». Ю. А. Гастев

11231. Проверка одного древнего применения комбинаторики к логике. Бирман, Мау (Überprüfung einer frühen Anwendung der Kombinatorik in der Logik. Biermann Kurt-R., Mau Jürgen), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 129—132 (нем.)

11232 К. Прямая и обратная теоремы. Элементы алгебры логики. Изд. 3-е, доп. Градштейн И. С. М., Физматгиз, 1959, 128 стр., илл., 20 р. 20 к.

Популярная брошюра, имеющая целью разъяснить читателю логическую связь между прямой, обратной, противоположной и противоположной обратной теоремами. Разъясняется также понятие о необходимом и достаточном условиях. В первой главе в популярной форме освещаются некоторые элементы теории множеств, а во второй — элементы алгебры логики, понятия о предикатах и кванторах. Приводятся решения задач, предлагаемых читателю в конце некоторых параграфов.

С. И. Адян

11233 К. Введение в математическую логику. Ч. I. Исчисление высказываний. Ассер (Einführung in die mathematische Logik. Teil 1. Aussagenkalkül. Asser G. Leipzig, Teubner, 1959, IV, 184 S., ill., 11.25 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1960, **A**, № 3, 187 (нем.)

11234 К. Основания математики. Исследование по философии науки. Бет (The foundations of mathematics. A study in the philosophy of science. Beth Willem Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1959, xxvi, 741 pp., ill., 5 Z), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 511, 11 (англ.)

См. также: 11140 К.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

11235. О частично рациональных тригонометрических суммах. Коробов И. Н., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1193—1195

Пусть $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n+1}x^{n+1}$ — многочлен с вещественными коэффициентами, часть которых рациональна. Пусть q — общее наименьшее кратное их знаменателей, P — целое. Сумму $\sum_{P<x\leqslant P+q} \exp[2\pi i f(x)]$ назовем частично рациональной тригонометрической суммой. Доказывается

Теорема 1. Если q — простое, $1 \leqslant s < n < q-1$ и $(q, a_{n+1}) = 1$, то при любых вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ для частично рациональной суммы

$$S = \sum_{P<x\leqslant P+q} \exp\left[2\pi i\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x^s + \frac{\alpha_{s+1}x^{s+1} + \cdots + \alpha_{n+1}x^{n+1}}{q}\right)\right]$$

имеет место оценка

$$|S| \leqslant \exp\left\{3\left(\frac{\ln n}{s^2 \ln s} + s\ln^2 2s\right)\right\} q^{1-\gamma s^{-1}\ln 2s},$$

где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ — некоторые абсолютные константы.

Доказательства используют результаты А. Вейля (Weil A., Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, 1948, **34**, № 5, 04), И. М. Виноградова и автора. Приводится также теорема 2, дающая оценку с понижением того же порядка, получающуюся без помощи метода А. Вейля.

Г. В. Емельянов

11236. Несколько формул, относящихся к тождествам Роджерса—Рамануджана. Карлиц (Some formulas

related to the Rogers—Ramanujan identities. Carlitz L.), Ann. mat. pura ed appl., 1959, **47**, 243—251 (англ.)

Известны тождества Роджерса — Рамануджана:

$$\sum_0^\infty \frac{q^{m^2}}{(q)_m} = \prod_0^\infty (1-q^{5m+1})^{-1}(1-q^{5m+4})^{-1};$$

$$\sum_0^\infty \frac{q^{m^2+m}}{(q)_m} = \prod_0^\infty (1-q^{5m+2})^{-1}(1-q^{5m+3})^{-1},$$

где $(q)=(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)$, $(q)_0=1$. С помощью ранее доказанных тождеств (РЖМат, 1959, 1223) доказываются следующие:

$$\sum_0^\infty \frac{q_n^{2-n}t^{2n}}{(q)_n} = \sum_{-\infty}^\infty (-1)^m q^{m(m+1)/2} I_{2m}(t),$$

$$\sum_0^\infty \frac{q^{n^2}t^{2n+1}}{(q)_n} = \sum_0^\infty (-1)^m q^{m(m+1)/2} I_{2m-1}(t),$$

где $I_n(t)$ есть q-аналог функции Бесселя.

В. А. Голубев

11237. О числах простых множителей целых чисел. III. Танака (On the number of prime factors of integers. III. Tanaka Minoru), Japan. J. Math., 1958, **27**, 103—127 (англ.)

Обобщаются результаты предыдущих частей работы (РЖМат, 1957, 4567; 1958, 8556). Пусть $f_1(\xi),\ldots,f_k(\xi)$ — полиномы с целыми коэффициентами положительной степени, причем старшие коэффициенты положительны; $\pi_1,\ldots,\pi_k$ — множества простых чисел; для любых i, j, $1\leqslant i<j\leqslant k$, выполнено хотя бы одно из условий: $f_i(\xi)$ и $f_j(\xi)$ взаимно просты или π_i и π_j не пересекаются; $\nu_i(p)$ — число несравнимых решений сравнения $f_i(\xi)\equiv 0 \pmod p$; $\omega_i(n)$ — число простых делителей n, принадлежащих π_i; $y_i(n)=\sum_{p\leqslant n,\ p\in\pi_i}\nu_i(p)/p$; n_0 — наименьшее целое положительное n, для которого $f_i(n)>0$, $y_i(n)>0$ $(i=1,\ldots,k)$; $u_i(n)=(\omega_i(f_i(n))-y_i(n))/\sqrt{y_i(n)}$, $(i=1,\ldots,k;\ n\geqslant n_0)$, E — измеримое по Жордану множество в k-мерном пространстве; $A(x,E)$ — число целых n, $n_0\leqslant n\leqslant x$, для которых точка $(u_1(n),\ldots,u_k(n))$ принадлежат E.

Доказывается: Если $y_i(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$A(x,E)/x \to (2\pi)^{-k/2}\int_E \exp\left\{-\left(u_1^2+\ldots+u_k^2\right)/2\right\} du_1\ldots du_k.$$

Доказательство использует метод решета. Приводится ряд частных случаев. И. П. Кубилюс

11238. О средних значениях некоторых функций теории простых чисел. Knapowski (On the mean values of certain functions in prime number theory. Knapowski S.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, **10**, № 3—4, 375—390 (англ., рез. русск.)

Доказываются две теоремы (c — положительная постоянная):

I. Если $\Lambda(n)$ — символ Дирихле, $\Delta(x)=\sum_{\nu<x}\Lambda(\nu)-x$, $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ — корень $\zeta(s)$ и $\beta_0\geqslant 1/2$, $\gamma_0>0$, то из $T>\max(c,\exp\exp 60\log^2|\rho_0|)$ следует

$$\int_1^T \frac{|\Delta(x)|}{x}dx > T^{\beta_0}\exp\left\{-14\frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right\}.$$

II. Пусть $\mu(n)$ есть функция Мёбиуса и $M(x)=\sum_{n<x}\mu(n)$. Если с некоторым положительным a при $T\geqslant 1$ $\int_1^T \frac{|M(x)|}{x}dx < a\sqrt{T}$, то при $T>\max(c,e^a)$

$$\int_1^T \frac{|M(x)|}{x}dx > T\exp\left\{-\frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right\}.$$

Резюме автора

11239. От редакции. По поводу статьи В. А. Голубева «Обобщенные числовые функции и распределение групп простых чисел». Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1960, № 1, 244

См. РЖМат, 1960, 6155.

11240. Об оценке остаточного члена в теореме о простых числах. Стась (Über eine Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz. Staś W.), Acta arithm., 1959, **5**, № 4, 427—434 (нем.)

Уточняется известная формула П. Л. Чебышева $\psi(x)=O(x)$ путем усовершенствования оценки Турана остаточного члена в равенстве $\psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)=x+R(x)$, где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. Пусть $\rho_0=\beta_0+\gamma_0 i$ $(1/2\leqslant\beta_0<1)$ является нулем дзета-функции Римана и $T>\max(c,\exp\exp(2|\rho_0|))$, причем c — некоторая определенная положительная константа. Тогда

$$\max|R(x)|>T^{\beta_0}\exp\left(-\frac{8\log T}{\log\log T}\right)$$

для

$$T\exp\left(-\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right)-1\leqslant x\leqslant T.$$

Н. В. Гордеев

11241. Использование дзета-функции в методе решета Сельберга. Флух (Verwendung der Zeta—Funktion beim Sieb von Selberg. (Auszug aus meiner Dissertation). Fluch W.), Acta arithm., 1959, **5**, № 4, 381—405 (нем.)

Работа посвящена оценке снизу для почти простых чисел в арифметических прогрессиях. Доказана теорема: В арифметической прогрессии $km+l$, $0<l<k$, $(l,k)=1$, всегда существует число либо простое, либо состоящее из двух простых, $\leqslant k^{15+\varepsilon}$, если $k>k_0(\varepsilon)$ и $\varepsilon>0$ — произвольно малая константа. Использован элементарный метод А. Сельберга в комбинации с аналитическим методом. А. И. Виноградов

11242. Замечания к работе «О некоторых приближающих многочленах Дирихле в теории дзета-функции Римана». Туран (Nachtrag zu meiner Abhandlung «On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of zetafunction of Riemann». Turán P.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, **10**, № 3-4, 277—298 (нем., рез. русск.)

Улучшая результаты работы, автор нашел дальнейшую связь между распределением корней дзета-функции Римана и некоторых приближающих ее многочленов Дирихле. Характерны следующие две теоремы. Пусть $C_n^*(s)=\sum_{\nu=1}^n \frac{n-\nu+1}{n+1}\nu^{-s}$ $(s=\sigma+it)$ обозначает n-ю сумму Чезаро первого порядка ряда $\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-s}$. Тогда имеют место

Теорема III. Если при всех $n>n_0$ $C_n(s)$ не равна нулю в некоторой горизонтальной полосе ширины e^{n^3} полуплоскости $\sigma\geqslant 1+\log^3 n/\sqrt{n}$, то имеет место гипотеза Римана.

Теорема IV. Если имеет место гипотеза Римана, то $C_n(s) \neq 0$ в полосе $c_1 \leqslant t \leqslant \exp\{\exp c_2 \log n/\log\log n\}$ полуплоскости $\sigma \geqslant 1$, где c_1 и c_2 — положительные числовые постоянные. Резюме автора

11243. Об одном классе рядов Дирихле. Стась (Über eine Klasse der Dirichletschen Reihen. Staś W.), Zesz. nauk. Uniw. Poznanin, 1960, № 25, 27—32 (нем.)

Известная связь расположения нулей дзета-функции Римана с асимптотикой сумматорной функции коэффициентов ряда Дирихле ее логарифмической производной обобщается на класс A функций со следующими свойствами: 1) каждая функция $f(s) \in A$ при $\sigma > 1$ представима абсолютно сходящимся рядом Дирихле ($s = \sigma + it$); 2) в полуплоскости $\sigma > 0$ $f(s)$ — мероморфная функция с простым полюсом при $s = 1$; 3) при $\sigma > 1$ $f(s) \neq 0$ и для $\sigma = 2$ $|f(s)| \geqslant c_1 > 0$; 4) для всех t и $0 \leqslant \sigma \leqslant 4$ $|(s-1)f(s)| \leqslant c_2(|t|+1)^{c_3}$, $c_3 > 1$; 5) $|r_n| \leqslant c_4 \log^2 n$, где r_n определяются равенством

$$-\frac{f'}{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n n^{-s}.$$

Основной результат: Пусть $\theta = \sup\{\beta : f(\beta + \gamma i) = 0, 0 < \beta \leqslant 1\}$, $\theta' = \inf\{\alpha : \sum_{n \leqslant x} r_n - x = O(x^{\alpha})\}$. Тогда для функций класса A $\theta = \theta'$. М. Б. Барбан

11244. Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле. Сельберг (в подл. Зельберг А.) (Selberg A.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 4, 3—28 См. РЖМат, 1958, 966.

11245. Арифметические функции на произвольных множествах целых чисел. Коэн (Arithmetical functions associated with arbitrary sets of integers. Cohen E.), Acta arithm., 1959, 5, № 4, 407—415 (англ.)

Арифметические функции, обобщающие классические функции $[x]$ и $\tau(x)$, определяются на произвольном множестве натуральных чисел. Пусть $N_k(x, S)$ — число целых k-мерных векторов $\{n_1, \ldots, n_k\}$, для которых $1 \leqslant n_i \leqslant x$, $i = 1, \ldots, k$, и наибольший общий делитель $(n_1, \ldots, n_k) \in S$; $T_k(x, S) = \sum_{n_i \leqslant x,\, i=1,\ldots,k} \tau_S((n_1, \ldots, n_k))$, где $\tau_S(n)$ — число делителей числа n, принадлежащих S. С помощью характеристической функции

$$\rho_S(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in S, \\ 0, & \text{если } n \notin S \end{cases}$$

и инверсной функции $\mu_S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, \rho_S(n/d)$ выводятся формулы $N_k(x, S) = \sum_{n \leqslant x} \mu_S(n) [x/n]^k$ и $T_k(x, S) = \sum_{n \leqslant x} \rho_S(n) [x/n]^k$, откуда получаются асимптотические оценки в случае $k \geqslant 2$.

Рассматриваются также обобщенная функция Эйлера и обобщение суммы Рамануджана (РЖМат, 1958, 1780). Б. М. Бредихин

11246. Замечания к статье Коэна «Арифметические функции на произвольных множествах целых чисел» (Remarks to the paper of E. Cohen «Arithmetical functions associated with arbitrary sets of integers»), Acta arithm., 1959, 5, № 4, 435 (англ.)

Уточняются остаточные члены в асимптотических формулах для функций $N_k(x, S)$ и $T_k(x, S)$. Б. М. Бредихин

11247. О совместном распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Уждавинис Р. В., LietTSR Moksly Akad. darbai, Tp. АН ЛитССР, 1960, Б1 (21), 5—29 (рез. лит.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1960, 6123). Пусть $F_1(m), \ldots, F_s(m)$ — сильно аддитивные арифметические функции такие, что $B_i(n) \to \infty$, $\max_{p^{\alpha} \leqslant n} |F_i(p)| = o(B_i(n))$, $i = 1, \ldots, s$, $n \to \infty$, где

$$B_i^2(n) = \sum_{p^{\alpha} \leqslant n} F_i^2(p)\, r_i(p)/p, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$r(p)$ — число решений сравнения $g_i(m) \equiv 0 \pmod p$, а p — простые числа. Пусть далее

$$A_i(n) = \sum_{p^{\alpha} \leqslant n} F_i(p)\, r_i(p)/p, \quad i = 1, \ldots, s,$$

E — множество некоторых положительных для $m \geqslant 1$ полиномов $g(m), \ldots, g_s(m)$, а $N_n\{\ldots\}$ — число натуральных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках. Для полиномов из множества E, применяя решето Бруна и суммирование независимых случайных векторов, автор доказывает три теоремы: равномерно по $x_1, x_2, \ldots, x_s$ при $n \to \infty$ $\frac{1}{n} N_n\{F_1(g_1(m)) < A_1(n) + x_1 B_1(n), \ldots, F_s(g_s(m)) < A_s(n) + x_s B_s(n)\} \to G(x_1) \ldots G(x_s)$, $\frac{1}{n} N_n\{F_1(g(m)) < A_1(n) + x_1 B_1(n), \ldots, F_s(g(m)) < A_s(n) + x_s B_s(n)\} \to G(x_1, \ldots, x_s)$, $\frac{1}{n} N_n\left\{\frac{F_1(g_1(m)) - A_1(n)}{B_1(n)} + \ldots + \frac{F_s(g_s(m)) - A_s(n)}{B_s(n)} < x\right\} \to (2\pi s)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2s\}\, dt$, где $G(x)$ — гауссова функция распределения, а $G(x_1, \ldots, x_s)$ — некоторый s-мерный нормальный закон. Э. И. Вилкас

11248. Простые доказательства аппроксимационной теоремы А. Гурвица. Шмидт (Simple beviser for en approximationssaetning af A. Hurwitz. Schmidt Asmus L.), Nord. mat. tidskr., 1959, 7, № 4, 157—162, 190 (датск., рез. англ.)

Рассмотрены доказательства следующих теорем Гурвица:

Теорема А. Для каждого вещественного иррационального числа ξ существует бесконечное множество пар целых чисел (p, q), $q \neq 0$, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}. \qquad (1)$$

Теорема В. Постоянную в (1) нельзя улучшить. Если $c > \sqrt{5}$, то существует такое вещественное иррациональное число ξ_0, что неравенство

$$\left|\xi_0 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$$

имеет лишь конечное множество решений (p, q), $q \neq 0$. Число $(1 + \sqrt{5})/2$ является таким критическим числом ξ_0.

Приведено доказательство теоремы В, предложенное Перроном (Perron O., Irrationalzahlen, Berlin, 1939). Дано новое простое доказательство теоремы А, предложенное автором и основанное на решении неравенства $|x + \delta x^2| < 1/\sqrt{5}$ для случаев $\sqrt{5}/4 < \delta < 1$, $1/\sqrt{5} < \delta \leqslant \sqrt{5}/4$, $\delta = 1/\sqrt{5}$. Кратко намечено первое полностью элементарное доказательство теоремы А, данное Ле-Веком (РЖМат, 1960, 6171К) и основанное на применении ряда Фарея. А. Н. Хованский

11249. **Рациональные приближения алгебраических чисел. Рот К. Ф.** (Roth K. F.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, **1**, № 1, 3—18
См. РЖМат, 1956, 7844.

11250. **Константа Хинчина. Шанкс, Ренч** (Khintchine's constant. Shanks Daniel, Wrench J. W., Jr), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 276—279 (англ.)

А. Я. Хинчин (Khintchine A., Compositio Math., 1934, **1**, 361—382) показал, что среднее геометрическое первых n неполных частных разложения в непрерывную дробь для почти всех вещественных чисел стремится при $n \to \infty$ к постоянной

$$\prod_{n=1}^{\infty} (n^{-1}(n+1)^2(n+2)^{-1})^{\ln n/\ln 2} = 2{,}68545\ldots$$

Даются выражения логарифма этой постоянной быстро сходящимися рядами и интегралами. С их помощью постоянная вычисляется с 66 десятичными знаками.
И. П. Кубилюс

11251. **Теорема Чеботарева о произведении неоднородных линейных форм. II. Морделл** (Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. II. Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1960, **35**, № 1, 91—97 (англ.)
Ч. I см. РЖМат, 1958, 1228.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — n линейных форм с n переменными $(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с действительными коэффициентами a_{rs} такими, что $\Delta = |\det a_{rs}| > 0$. Пусть $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — действительные числа. Минковский предположил, что существуют такие целые (u), что $\prod_{r=1}^{n} |L_r + c_r| \leqslant 2^{-n}\Delta$. Это предположение доказано для $n = 2, 3, 4$. Пусть $M = \inf \prod_{r=1}^{n} |L_r + c_r|$ — нижняя граница для всех целых (u). Н. Г. Чеботарев доказал, что $M/\Delta \leqslant 2^{-n/2}$. Автор улучшил оценку до $M/\Delta \leqslant (2^{n/2} + (2 - 2^{1/2})^n)^{-1}$. Давенпорт показал, что $M/\Delta < (\gamma_n 2^{n/2})^{-1}$, где $\gamma_n > 1$ и $\gamma_n \to 2e - 1$ при $n \to \infty$. Недавно Вудс показал, что $M/\Delta \leqslant 2^{-n/2}(2 - (2 - 2^{1/2})_n)^{-1}$. Комбинируя свой метод с методом Вудса, автор дает лучший результат: $M/\Delta \leqslant 2^{-n/2}(4 - 2(2 - \frac{3}{4}2^{1/2})^n - 2^{-n/2})^{-1}$.
В. А. Голубев

11252. **Средние значения по решеткам. II. Шмидт** (Mittelwerte über Gitter. II. Schmidt Wolfgang), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 3, 250—258 (нем.)

Продолжение работы РЖМат, 1958, 1228. Устраняется ошибка в доказательстве теоремы 2 первой части работы. Подсчитывается интеграл $\int \sum f(Ag_1, \ldots, Ag_n) d\omega_A$, где $f(X_1, \ldots, X_n)$ — неотрицательная, интегрируемая по Борелю функция, определенная для всех n-мерных векторов $X_1, \ldots, X_n$; сумма берется по всем системам линейно независимых целочисленных векторов $g_1, \ldots, g_n$ пространства R_n; ω_A — мера Зигеля в группе $\mathfrak{Q}$ всех линейных преобразований A пространства R_n с определителем 1; интеграл берется по фундаментальной области группы $\mathfrak{Q}$ относительно подгруппы собственных унимодулярных преобразований.
И. П. Кубилюс

11253. **О системах точек с целочисленными расстояниями. Доморяд А. П.**, Уч. зап. Ташкентск. гос. пед. ин-та, 1957(1959), вып. 7, 93—95

11254. **Линейные диофантовы системы. Эрхарт** (Systèmes diophantiens linéaires. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 4, 643—645 (франц.)

11255. **О рациональных многогранниках и линейных диофантовых системах. Эрхарт** (Sur les polyèdres rationnels et les systèmes diophantiens linéaires. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 6, 959—961 (франц.)

Продолжение заметки автора (реф. 11254). Сумма $\sum a_p X^p$, в которой коэффициенты a_p имеют вид $\sum \alpha \cos(\alpha X + \beta)$, где α может равняться нулю, называется смешанным полиномом от X. Линейные уравнения и неравенства с целыми коэффициентами и неизвестными, у которых постоянные члены — кратные целого параметра n, образуют гомотетичную линейную диофантову систему. Пусть P_n — многогранник, получаемый из k-мерного рационального многогранника при целочисленной гомотетии с коэффициентом n. На основании результатов, полученных автором ранее (РЖМат 1956, 5077; 1957, 8410, 1960, 116, 9964; реф. 11254) доказываются (а при некоторых значениях k лишь высказываются предположительно) теоремы: 1) Число целых точек внутри многогранника P_n (или на его границе) есть смешанный полином от n. 2) Если внутри многогранника P_n содержится $f(n)$ целых точек, то общее число целых точек внутри и на границе этого многогранника равно $(-1)^k f(-n)$. Приводятся арифметические аналоги этих теорем: 1а) Число решений гомотетичной линейной диофантовой системы есть смешанный полином от ее параметра. 2а) Если $f(n)$ есть число решений гомотетичной линейной диофантовой системы в узком смысле и k — число измерений ее примитивной области, то соответственная система в широком смысле имеет $(-1)^k f(-n)$ решений. Имеются опечатки.
Н. П. Соколов

11256. **О гомотетичных целых или рациональных многогранниках. Эрхарт** (Sur les polyèdres entiers ou rationnels homothétiques. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 8, 1428—1430 (франц.)

Уточняются и доказываются некоторые результаты, указанные без доказательства в предыдущих работах автора (РЖМат, 1959, 10819 и др.). В. А. Голубев

11257. **Образование полей алгебраических функций с помощью дивизоров периода два. Арима, Сугаку**, 1957—1958, **9**, 11—13 (японск.)

Пусть K — поле алгебраических функций, трансцендентное степени 1 над полем комплексных чисел C. Пусть G — род K. Тогда существует точно $N = 2^{2G}$ классов дивизоров $\{\bar{E}_l\}$ степени нуль периода два. Пусть E_l произвольно выбрано из $\bar{E}_l$ и пусть $E_l^2 = (x_l)$ $(l = 1, \ldots, N)$. Автор доказывает следующую теорему. (*i*). Пусть K — ни эллиптическое, ни гиперэллиптическое поле. Тогда $K = C(x_1, \ldots, x_N)$. (*ii*) Если K — гиперэллиптическое с родом $G \geqslant 3$, то либо $K = C(x_1, \ldots x_N)$, либо $k = C(x_1, \ldots, x_N)$ рационально и $[K:k] = 2$.
Y. Kawada
Перевод из Math. Revs, 1959, 20, 136.

11258. **О показательных функциях в локальных полях. Сиратани** (On potent functions in local number fields. Shiratani Katsumi), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1959, **A13**, № 2, 126—135 (англ.)

Пусть p — простое число, R — рациональное поле p-адических чисел, $\bar{R}$ — алгебраически замкнутое расширение R, $\bar{T}$ — поле инерции $\bar{R}$; α, β, ... — целые элементы. T, $\bar{\nu}_p(x)$ — порядок x относительно p. Изу

чается вопрос о сходимости (в смысле p-адического нормирования) функции Артина-Хассе $E(\alpha,x)$ (Artin E., Hasse H., Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 1928, 6, 146—162) и аналогичной ей функции $F(\alpha, x)$, введенной Дуэрком (РЖМат, 1960, 107) в алгебраически замкнутом расширении рационального поля p-адических чисел.

Доказываются теоремы:

1. Функция $(1-x)^\alpha$ тогда и только тогда сходится, если

$$\nu_p(x) > \frac{1}{p^{c(\alpha)}(p-1)},$$

где $c(\alpha)$ — порядок неглавной части α.

2. Тогда и только тогда $((1-x)^\alpha)^\beta = (1-x)^{\alpha\beta}$, когда $\nu_p(x) > 1/p^{r^*}(p-1)$, где $r^* = \min(c(\alpha), \nu_p(\alpha)+c(\beta))$.

3. Разложения

$$E(\alpha,x) = E(1,x)^\alpha \prod_{j=1}^{\infty} E(1,x^{p^j})^{\alpha(j)},$$

$$F(\alpha,x) = (1-x)^\alpha \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{p^j})^{\alpha(j)}$$

имеют место тогда только, если $\nu_p(x) > 1/p^{c(\alpha)}(p-1)$, где $\alpha(j) = (\alpha^{p^j} - \alpha^{p^{j-1}})/p^j$. Б. М. Уразбаев

11259. Распределение конечных сверхсимметричных матриц в конечном поле. Дейкин (Distribution of bordered persymmetric matrices in a finite field. Daykin David E.), J. reine und angew. Math., 1960, 203, № 1-2, 47—54 (англ.)

Следуя Сильвестру, матрицу $M = \|a_{ij}\|$ с $a_{ij} = a_{rs}$ для $i+j = r+s$ называют сверхсимметричной (persymmetric) (Muir J., The theory of determinants, I—IV, London, 1923). Для указанных матриц с элементами из конечного поля $GF(q)$ доказывается ряд законов распределения аналогично тому, как это сделано Карлицем и Ходжесом (РЖМат, 1956, 6349; 1958, 5497) для симметричных, кососимметричных и эрмитовых матриц над конечным полем. Показано, что число сверхсимметричных матриц размера $m\times n$ над $GF(q)$ ранга k равно

$$\mathfrak{P}(m,n,k) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ q^{2(k-1)}(q^2-1), & 1 \leqslant k < \min(m,n), \\ q^{2(k-1)}(q^{|m-n|+1}-1), & 1 \leqslant k = \min(m,n), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

для чего предварительно для данного числа v подсчитано количество сверхсимметричных матриц над $GF(q)$, у которых a_v — первый элемент, отличный от нуля (сверхсимметричная матрица M может быть представлена в виде $M = [a_{i+j-1}]$ с $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, т. е. задана, например, первой строкой и последним столбцом). В теоремах 3 и 4 рассматриваются квадратные сверхсимметричные матрицы. И. Ш. Славутский

11260. О критерии Эйлера. Лемер (On Euler's criterion. Lehmer Emma), J. Austral. Math. Soc., 1959, 1, № 1, 64—70 (англ.)

Если $D^f \not\equiv 1 \pmod p$, $p = kf+1$ — простое, то для $p \nmid D$ $D^f \equiv \alpha_k \pmod p$, где α_k — корень (mod p) k-й степени из единицы, $\not\equiv 1 \pmod p$. Широко используя классические результаты для $D = 2$, автор с помощью некоторых сравнений для сумм Якобсталя $\Phi_k(D) = \sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{\nu}{p}\right)\left(\frac{\nu^k+D}{p}\right)$ ($\left(\frac{\nu}{p}\right)$ — символ Лежандра) в случае $k = 3, 4, 5, 8$ получает сравнения, дополняющие критерий Эйлера. Типичный результат: пусть простое число $p = 4n+1 = a^2+b^2$, $a \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$2^{(p-1)/4} \equiv \begin{cases} (-1)^{b/4} \pmod p, & \text{если } b \equiv 0 \pmod 4, \\ b/a, & \text{если } b/2 \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Комбинируя полученные результаты, можно получить подобные критерии для $k = 6, 10, 12, 15, 20, 24$ и 40. См. также РЖМат, 1956, 158; 1955, 1091.

И. Ш. Славутский

11261. О законе взаимности Куммера-Гильберта. Ямамото (On the Kummer—Hilbert reciprocity law. Yamamoto Koichi), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1959, **A13**, № 2, 85—95 (англ.)

Пусть p — нечетное простое натуральное число, Q — поле рациональных p-адических чисел $\zeta^p = 1$ ($\zeta \neq 1$) $k = Q(\zeta)$, $\pi \in k$, μ — главная единица в k; $f(x) = f_\mu(x)$ — полином порядка $\leqslant p-2$ с коэффициентами из Q, с условием: $f(1) = 1$, $f(\zeta) = \mu$, $\log\mu \equiv \sum_{i=1}^{p-1} l_i(\mu)\frac{\pi^i}{i!} \pmod{\mathfrak{p}^p}$, так что $l_i(\mu) = \frac{d^i}{dx^i}\log f(e^x)\Big]_{x=0}$.

Доказывается, что главная единица ν является нормой в $K(\sqrt[p]{\mu})/k$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1} l_i(\mu)\, l_{p-i}(\nu) \equiv 0 \pmod p.$$

Доказательство опирается на три главных факта: 1. Используются формулы обращения функции Артина—Хассе. 2. Свойства чисел Стирлинга, выраженных формулами:

$$\sum_\lambda \mathfrak{S}_\lambda^m S_n^\lambda = \sum_\lambda S_\lambda^m \mathfrak{S}_n^\lambda = \delta_{m,n},$$

$$\mathfrak{S}_n^m = \frac{\Delta^m 0^n}{m!} = \frac{1}{m!}\sum_\lambda (-1)^{m-\lambda}\binom{m}{\lambda}\lambda^n,$$

$$\mathfrak{S}_{p-1}^\lambda \equiv \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\sum_{k=1}^{\lambda}(-1)^k\binom{\lambda}{k} \equiv \frac{(-1)^{\lambda-1}}{\lambda!} \pmod p.$$

3. Если π и θ — простые элементы и α — целое из k, то

$$D_\theta^m \alpha \equiv D_\pi^{m-1}\left(\frac{d\alpha}{d\pi}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^m\right) \pmod p$$

(D — оператор, определений так: если

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \pi^i/i! \pmod{\mathfrak{p}^p},$$

то $D_\pi^i \alpha \equiv a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$). П. Н. Реморов

11262. Замечание об одной предыдущей заметке. Врэнчану (Observaţii asupra unei note precedente. Vrănceanu G.), Gaz. mat. şi fiz., 1960, **A12**, № 1, 1—18 (рум.; рез. русск., франц.)

Показывается, что теорема Ферма для $n = 3$ сводится к доказательству того, что кубика $3x^2+1 = 4\beta^3$ не имеет других рациональных точек, кроме $P_1(1, 1)$, $P_2(-1, 1)$. По резюме автора

11263. Некоторые замечания относительно диофантового уравнения. Кишш (Citeva observaţii în legătură cu o ecuaţie diofantiană. Kiss Ernest), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1959, **10**, № 1, 59—62 (рум.; рез. русск., франц.)

Дается простое доказательство теоремы: Несократимую дробь a/b тогда и только тогда можно разложить в сумму двух дробей, имеющих числитель 1, когда знаменатель b имеет два взаимно простых делителя, сумма которых является кратным числа a. Показывается, что эта теорема содержит теоремы Н. Накаямы и

Р. Облата. В качестве приложения доказывается теорема Эрдеша-Штраусса при $141649 < b < 200\,000$.

Резюме автора

11264. Этюд о диофантовом уравнении, взятом в системе счисления с основанием B. Сальмери (Studio di un'equazione diofantea fratta nel sistema di numerazione B-esimale. Salmeri Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 4, 554—562 (итал., рез. англ.)

Изучается уравнение с $n+1$ неизвестными

$$\frac{B^{n-1}x_n + B^{n-2}x_{n-1} + \ldots + Bx_2 + x_1}{B^{n-1}x_{n-1} + B^{n-2}x_{n-2} + \ldots + Bx_1 + x_n} = x_0$$

с целью отыскания натуральных решений для x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$), меньших взятого основания нумерации B. Доказываются теоремы, позволяющие определять такие решения и число решений. В. А. Голубев

11265. Об уравнении $\varphi(x+k) = \varphi(x)$. II. Шинцель, Вакулич (Sur l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$. II. Schinzel A., Wakulicz Andrzej), Acta arithm., 1959, 5, № 4, 425—426 (франц.)

Указывается, что при помощи электронной машины XYZ в Варшаве найдены еще два простых числа $q_{20} = 157303$, $q_{21} = 160001$, удовлетворяющих условиям леммы Шинцеля (РЖМат, 1960, 1313). Отсюда следует, что уравнение $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ имеет по крайней мере два решения для всех натуральных $k < 2 \cdot 10^{58}$. В. А. Голубев

11266. Вопросы занимательной арифметики (Questions d'arithmétique récréative. V. T.), Mathesis, 1959, 68, № 10, Suppl., 1—28 (франц.)

1. Дано простое обоснование стратегии, ведущей к выигрышу в некоторых вариантах игры „Ним".

2. Дробь $a_0/a_1/a_2/\ldots/a_n$, в которой n знаков дроби (черточек) и $n+1$ элементов, названа многоэтажной дробью n-го порядка. Выведена формула для числа I_n возможных интерпретаций этой дроби: $I_n = (n+1)^{-1}C_{2n}^n$, например, $a_0/a_1/a_2$ имеет две интерпретации: a_0a_2/a_1 и a_0/a_1a_2. Каждая интерпретация ведет в конечном счете к выражению вида $a_0a_1^{-1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_k = \pm 1$; $2 < k < n$. Доказано, что число V_n различных выражений указанного вида равно $V_n = 2^{n-1}$ ($n \geqslant 2$), а произведение этих выражений равно $(a_0/a_1)^{2^{n-1}}$.

3. В последовательности натуральных чисел зачеркиваем каждое n-е число. Из оставшихся чисел образуем новую последовательность: 1, сумма двух первых оставшихся чисел, сумма трех первых оставшихся чисел и т. д. В этой последовательности зачеркиваем каждый $(n-1)$-й член и из оставшихся чисел образуем аналогичную последовательность сумм. В новой последовательности зачеркиваем каждый $(n-2)$-й член и т. д. После n-го шага получится последовательность n-ых степеней чисел натурального ряда. Приведено доказательство, принадлежащее Делькурту.

4. Система $9x^3 + y^3 = uv^3$, $x^3 + y^3 = ut^3$ не имеет рациональных решений. Приведено элементарное доказательство, принадлежащее Риньо.

5. Если из цифр периода дроби 1/19, сохраняя порядок их следования, составить целое число N, то $2N$, $3N, \ldots, 18N$ является круговой перестановкой цифр числа N (свойство цикличности). Указаны: способ определения первой цифры каждого такого числа, способы отыскания N без помощи деления 1 на 19 и способ быстрого определения последовательности цифр в произведении mN, где $m = 19A + r$ ($r < 19$).

Б. А. Кордемский

11267. Системы счисления и признаки делимости. Новаковский (Układy liczbowe a cechy podzielności. Nowakowski Ryszard), Matematyka, 1959, 12, № 6, 306—320 (польск.)

Популярная статья о системах счисления. Даются алгоритм и примеры перехода из одной системы счисления в другую, таблицы и примеры действий в системах с основанием $g = 2, 3, 4, 8, 12$. Доказываются признаки делимости чисел с основанием g на числа g^n, на $p|g$, на $g-1$ и $g+1$. В. А. Голубев

11268. Правило составления магического квадрата с рамкой четного порядка. Штейдле (Eine Regel zur Herstellung magischer Quadrate gerader Felderzahl. Steidle G.), Math. und naturwiss. Unterr., 1960, 12, № 9, 421—422 (нем.)

Составляется магический квадрат $(n-2)$-го порядка (n-четное) и каждое число увеличивается на $2n-2$. Этот квадрат обрамляется рамкой, содержащей $4(n-1)$ полей. Поля рамки по некоторому несложному правилу заполняются натуральными числами от 1 до $2n-2$ и от n^2-2n+3 до n^2. Получается магический квадрат n-го порядка. Правило различается для n не кратного и кратного 4. Б. А. Кордемский

11269. Суммирование одинаковых степеней последовательности натуральных чисел. Андреев Н. А., Матем. просвещение, вып. 5, 1960, 201—202

11270 К. Теоретическая арифметика. Серпинский (Arytmetyka teoretyczna. 2 wyd. zmien. Sierpiński Wacław. Warszawa, PWN, 1959, 273, 32 zł.) (польск.) См. РЖМат, 1957, 2897К.

См. также: 11374, 11484, 11485, 11761.

АЛГЕБРА

Редакторы *Л. А. Скорняков, В. И. Шестаков*

11271. К. Алгебра Т. 2. 4-е изд. «Современной алгебры». Ван-дер-Варден (Algebra. Teil 2. 4. Aufl. d. «Modernen Algebra». Van der Waerden B. L. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1959, IX, 275 S., 29. 60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 45, 3213 (нем.)

11272 К. Алгебра. Вергоссен (Algebra. Deel 2. 2e druk. Vergoossen H. Haarlem-Antwerpen-Djakarta, A. Kemperman, 1958, 152 blz., 70 Bfr.), Bibliogr. Belg., 1959, 85, № 5, 137 (флам.)

11273 К. Элементы алгебры. (Eléments d'algèbre. Paris, Impr. nat., 1958, 128 p., ill.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 20, 543 (франц.)

11274 К. Алгебра. Для гимназий и первого класса научных лицеев. Совера (Algebra. Per i ginnasi e per la prima classe dei licei scientifici. Sovera Giuseppina. Bergamo, Minerva italica editr., 1959, 268 p., 900 L.), Bibliogr. naz. ital., 1959, 2, № 1, 16 (итал.)

11275 К. Учебник по алгебре для средних и нормальных школ. Десмет (Leerboek voor algebra, ten dienste van het middelbaar en het normaal onderwijs. 1-e deel. 7-e dr. Desmet I. Tongeren, Uitg. «Het Prisma», 1957, 252 blz, ill., 72 Bfr.), Bibliogr. Belg., 1958, 84, № 12, 242 (флам.)

11276 К. Основные понятия алгебры. Шевалле (Fundamental concepts of algebra. Chevalley Claude. New York, Acad. Press, Inc., 1956, viii, 241 pp., 6.80 doll.) (англ.)

Выросло поколение алгебраистов, для которых «современная алгебра» означает книгу Ван-дер-Вардена или, возможно, один из нескольких подобных последних учебников. Прошло время, и (к счастью) математики не успокоились. В частности, алгебраическая топология проявила жадный аппетит к алгебраическому аппарату. В ответ на это современная алгебра изменилась. Что же отличает новую современную алгебру от старой? Последняя придавала особое значение группам, кольцам и гомоморфизмам как основным понятиям. Модули, более или менее тесно примыкающие к группам и кольцам, выделялись, хотя и недостаточно. Но, полностью отсутствовали по крайней мере две вещи, которые теперь приобрели явно центральное значение: тензорное произведение модулей и обобщение любого объекта до градуированного. Книга автора своевременна, и она будет широко изучена; содержательные упражнения возбудят у внимательного читателя желание узнать еще больше. Преподаватели могут найти это «напрасной маскировкой строгости» (последнее предложение предисловия). Само собой разумеется, что большинство параграфов сходно с книгой Бурбаки «Полилинейная алгебра» (Actualités sci. Ind., № 1044, Hermann, Paris, 1948). Краткий обзор содержания таков: I. Моноиды (полугруппы с единицей). II. Группы (включая свободные группы). III. Кольца и модули (включая тензорные произведения, двойственность, градуированные модули). IV. Алгебры (вводный набросок). V. Ассоциативные алгебры. Эта последняя глава занимает почти половину книги. Выборка из подзаголовков указывает на затронутые области: дифференцирование, алгебры Грассмана, определитель, след, тафаффовы, симметрические алгебры. В конце этого длинного пути читателю открывается последний раздел — алгебра многочленов. I. Kaplansky

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 553.

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

11277. О системах линейных уравнений, описывающих конструкции несущих рам. Бабушка, Фидлер (Über System linearer Gleichungen vom Typ der Rahmentragwerke, Babuška Ivo, Fiedler Miroslav), Aplikace mat., 1959, 4, № 6, 441—455 (нем.; рез. чешск., русск.)

Простой конструкцией несущей рамы называется не сущая конструкция с неподвижными вращающимися жесткими узлами A_i, $i=1,\ldots,n$, лежащими в некоторой плоскости, причем каждая пара узлов A_i, A_j $(i\neq j)$, вообще говоря, связана балкой P_{ij}. Предполагается, что нагрузка рамы выражается в моментах M_i в узлах A_i. В качестве неизвестных рассматриваются вращения φ_i в узлах A_i. Рама описывается системой линейных алгебраических уравнений вида $A\varphi=M$, где $A=(a_{ij})$ — некоторая квадратная матрица n-го порядка, $\varphi=\{\varphi_1,\ldots\varphi_n\}$, $M=\{M_1,\ldots,M_n\}$ — векторы, называемой системой уравнений в деформациях. Реальная балка (простая), согласно теореме 1, математически адекватно характеризуется симметричной положительно определенной матрицей B_{ij} второго порядка с элементами $b_{11}=p_{ij}>0$, $b_{12}=q_{ij}=-q_{ji}\geqslant 0$, $b_{22}=p_{ji}>0$. Если узлы A_i, $A_j(i\neq j)$ не связаны балкой, то все элементы матрицы B_{ij} суть нули. Говорят, что матрица $A=(a_{ij})$, $i=1,\ldots,n$, обладает свойством $\mathfrak{A}$, если существуют матрицы B_{ij}, $ij=1,\ldots,n$, охарактеризованного выше типа и такие, что $a_{ij}=-q_{ij}$ $(i\neq j)$, $a_{ii}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$ $(i\neq j)$.

Теорема 3. Пусть задана система линейных алгебраических уравнений $A\varphi=b$, $\varphi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ — искомый вектор, $b=\{b_1,\ldots,b_n\}$ — заданный вектор, $A=(a_{ij})$, $i,j=1,\ldots,n$, — заданная матрица, $a_{ij}\geqslant 0$. Тогда для существования простой конструкции несущей рамы, уравнения в деформациях которой совпадают с заданной системой, необходимо и достаточно, чтобы матрица A обладала свойством $\mathfrak{A}$.

Чтобы в условиях приведенной теоремы ослабить требования $a_{ij}\geqslant 0$, вводится понятие обобщенной конструкции несущей рамы, получающееся, если в определении простой конструкции некоторые (или все) простые балки заменить составными. Реальная составная балка P_{ij}, согласно теореме 2, математически адекватно характеризуется симметричной матрицей p_{ij} второго поярдка с элементами $b_{11}=p_{ij}>0$, $b_{12}=q_{ij}=-q_{ji}\leqslant 0$, $b_{22}=p_{ji}>0$, причем $p_{ij}p_{ji}-(3q_{ij})^2>0$.

Теорема 4. Сопоставим заданной матрице $A=(a_{ij})$ матрицу $\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$, $i,j=1,\ldots,n$, полагая $\hat{a}_{ij}=a_{ij}$, если $a_{ij}\geqslant 0$, и $\hat{a}_{ij}=3a_{ij}$, если $a_{ij}<0$. Заданная система линейных алгебраических уравнений $A\varphi=b$ тогда и только тогда является системой уравнений в деформациях некоторой обобщенной несущей рамы, если матрица $\hat{A}$ обладает свойством $\mathfrak{A}$.

Теорема 6. Пусть задана симметричная матрица $A=(a_{ij})$, $i,j\leqslant 1,\ldots,n$, все горизонтальные векторы которой отличны от нуля. Заданная система линейных алгебраических уравнений $A\varphi=b$ тогда и только тогда является системой уравнений в деформациях некоторой конструкции несущей рамы, если матрица $B=(b_{ij})$, $b_{ii}=a_{ii}$, $b_{ij}=-a_{ij}$ для $i\neq j$ и $a_{ij}\geqslant 0$, $b_{ij}=3a_{ij}$ для $i\neq j$ и $a_{ij}<0$ $(ij=1,\ldots,n)$, является положительно определенной.

В конце статьи приводятся примеры и некоторые соображения о возможности применения изложенных идей в теории электрических цепей. Библ. 16 назв.

А. Д. Горбунов

11278. Несколько замечаний в связи с однозначной разрешимостью систем линейных алгебраических уравнений. Петё (Néhány megjegyzés lineáris algebrai egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságával kapcsolatban. Pethő Árpád), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958, 3, № 1-2, 101-108 (венг.; рез. русск., нем.)

Доказывается, что все решения совместной системы

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n=a_j,\quad j=1,2,\ldots,m, \qquad (1)$$

линейных уравнений тогда и только тогда имеют одну и ту же k-ю компоненту, когда ранг ее матрицы убывает на единицу при вычеркивании k-го столбца. Так как все решения системы (1), очевидно, тогда и только тогда имеют одну и ту же k-ю компоненту, когда k-я компонента всех решений ее приведенной системы

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n=0,\quad j=1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

равна нулю, то это предложение является перефразировкой предложения референта (РЖМат, 1957, 6488). Для того чтобы все решения системы (2) имели равную нулю k-ю компоненту, необходимо и достаточно, чтобы k-й столбец матрицы этой системы не был линейной комбинацией других ее столбцов. В этой же работе референта (теорема 8) дается некоторое нетривиальное условие единственности k-й компоненты решений совместной системы (1). С. Н. Черников

11279. Условия эквивалентности систем линейных неравенств. Кузнецов В. Г., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 71—74

Две совместные системы линейных неравенств

$$a'_{j1}x_1+a'_{j2}x_2+\ldots+a'_{jn}x_n-a'_j<0\ (j=1,2,\ldots,m_1), \qquad (1)$$

$$a''_{j}x_1+a''_{j2}x_2+\ldots+a''_{jn}x_n-a''_j<0\ (j=1,2,\ldots,m_2) \qquad (2)$$

одного и того же ранга $r>0$ (r — ранг матрицы (a_{jl}) или (a_{jl}^*) называются эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений. Автор дает алгоритм для решения вопроса об эквивалентности таких систем, основанный на следующих теоремах, приведенных им без доказательств.

Теорема 1. Системы (1) и (2) эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают минимальные грани многогранников их решений (определение минимальной грани см. в статье референта (РЖМат, 1953, 68)) и эквивалентны системы однородных линейных неравенств, полученные из систем (1) и (2) вычеркиванием свободных членов.

Теорема 2. Минимальные грани многогранников M' и M'' решений систем (1) и (2) совпадают тогда и только тогда, когда совпадают максимальные линейные подпространства L' и L'' для таких однородных систем, а также пересечения минимальных граней многогранников M' и M'' с ортогональным дополнением $L^\perp$ для $L=L'=L''$. С. Н. Черников

11280. О решении систем линейных неравенств. Шураньи (On the solubility of systems of linear inequalities. Surányi János. Eötvös L. Tud.-Egy. Kiadv. Term.-Tud. Kar Évk. 1952—53(1954), 19—25) (венг.)

Пусть $l_i(x)=a_{i_1}x_1+a_{i_2}x_2+\ldots+a_{i_n}x_n$. Рассматриваются неравенства

$$l_i(x)\geqslant 0 \quad (1\leqslant i\leqslant n), \qquad (1)$$

$\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется решением системы (1) если не все ξ_i равны нулю и $l_i(\xi)\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Даются разные необходимые и достаточные условия для разрешимости системы (1). Приводится другое доказательство результата Блюменталя (Blumenthal, J. math., 1942, 2, 523—530). Автор замечает, что после окончания статьи, он узнал о том, что один из его результатов был одновременно получен С. Н. Черниковым (РЖМат, 1953, 68). P. Erdös

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 590.

11281. О независимости по mod (G) целочисленных линейных форм. Мардешич (Über die Unabhängigkeit mod (G) der ganzzahligen Linearformen. Mardesic Sibe. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., 1953, II Ser. 8, 280—289, 290—292) (нем.; рез. сербо-хорв.)

11282. О результанте двух квадратических форм. Гудстейн, Рамни (On the resultant of two quadratic forms. Goodstein R. L., Rumney M.), Math. Gaz., 1959, 43, № 345, 191 (англ.)

11283. К представлению квадратичных форм в квадратичных полях. Ленц (Zur Quadratsummendarstellung in relativquadratischen Zahlkörpern. Lenz Hanfried. S. Ber. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1953(1954), 283—288) (нем.)

11284. О нахождении корней алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Вароли (Sulla ricerca delle radici di una equazione algebrica a coefficienti razionali. Varoli Giuseppe), Period. mat., 1959, 37, № 3, 147—155 (итал.)

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

где a_i — целые числа с общим наибольшим делителем 1. Основной результат. Если комплексное число $(\gamma+\delta i)/\varepsilon$ (γ, δ, ε — целые числа с общим наибольшим делителем 1) является корнем уравнения (1), то a_0 делится на ε, а εa_n на $\gamma^2+\delta^2$.

Доказано также (k — целое): 1) Если $f(k)$ и $f(k+1)$ нечетные числа, то (1) не может иметь корнем рациональную дробь с нечетным знаменателем (в частности, целое число); 2) Если $f(k)$, $f(k+1)$ и a_0 — нечетные числа, то (1) не может иметь рациональных корней; 3) Если $f(x)$ и $f(k+1)$ — нечетные числа, то (1) не может иметь корней вида $(\gamma+\delta i)/\varepsilon$ с рациональными γ/ε, δ/ε и нечетным ε (в частности, с целочисленными значениями γ/ε, δ/ε); 4) Если $f(k)$, $f(k+1)$, a_0 — нечетные числа, то (1) не может иметь корня $(\gamma+\delta i)/\varepsilon$ с рациональными γ/ε, δ/ε; 5) Если a_n и $\sum_{s=1}^{n}a_s$ — нечетные числа, то (1) не может иметь корнем ни целое число, ни рациональную дробь с нечетным знаменателем, ни число $(\gamma+\delta i)/\varepsilon$ с целочисленными γ/ε, δ/ε, ни число того же вида с рациональными γ/ε, δ/ε и нечетным ε; 6) Если a_0, a_n и $\sum_{s=1}^{n}a_s$ — нечетные числа, то (1) не может иметь корнем ни рациональное число, ни число вида $(\gamma+\delta i)/\varepsilon$ с рациональными γ/ε, δ/ε. В. К. Туркин

11285. О границах одного корня многочлена $1-2t+t^{n+1}$. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та 1957, вып. 2, 209—210

Уточняются границы положительного, отличного от единицы корня x многочлена $f(t)=1-2t+t^{n+1}$, а именно доказывается, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ $(n=2)$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+2}}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+1}}$ $(n\geqslant 3)$ взамен неравенства $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+2}}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$, данного Зморовичем (РЖМат, 1960, 7428).

А. Г. Школьник

11286. Некоторые оценки для модулей корней алгебраического уравнения. Хейгль (Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Heigl Franz), Monatsh. Math., 1959, 63, № 3, 287—297 (нем.)

Устанавливается ряд оценок, ограничивающих сверху модули корней z_ν алгебраического уравнения $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с комплексными коэффициентами. Например,

$$|z_\nu|<\max_{i=2,4,\ldots}\left(\frac{A_{i-1}}{2}+\sqrt{1+A_i+\frac{A_{i-1}^2}{4}}\right),$$

где $A_i=|a_i|$ $(A_{n+1}=0)$. Формулировки трех других теорем подобного типа несколько сложнее. Полученные оценки содержат в качестве частных случаев оценки ряда других авторов. З. И. Боревич

11287. Общий корень двух многочленов. Геррин (Common root of two polynomial equations. Gerrish F.), Math. Gaz., 1959, 43, № 345, 188—189 (англ.)

11288. О синтетическом процессе деления. Комфорт Мотт (On the synthetic division process. Comfort W. W., Mott Thomas E.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 8, 717 (англ.)

Если p/q ($(p, q)=1$) — ненулевой рациональный корень уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с целыми коэффициентами, то при $0\leqslant k\leqslant n$ все

$$b_k=a_0(p/q)^k+a_1(p/q)^{k-1}+\ldots+a_k \qquad (1)$$

— целые числа. Одно из доказательств этой теоремы проводится от противного. Во втором — методом индукции доказывается, что все b_k — целые, делящиеся на q.

А. Г. Школьник

11289. Критерий наличия у алгебраических уравнений кратных корней или нечетного, соответственно четного, числа пар сопряженных комплексных корней. Гофман (Kriterium für das Vorhandensein von Mehrfach-

wurzeln oder einer ungeraden bzw. geraden Anzahl konjugiert komplexer Wurzelpaare algebraischer Gleichungen. Hofmann R.), Regelungstechnik, 1959, 7, № 9, 310—312 (нем., рез. англ.)

Дается элементарный вывод соотношения, равносильного известному выражению дискриминанта многочлена через результант многочлена и его производной.

А. Г. Школьник

11290. Критерий устойчивости систем, характеристический многочлен которых имеет комплексные коэффициенты. Кауфман. II (Stability criteria for systems having complex-coefficient polynomial characteristic equations. Kaufman Louis G., II), J. Aero Space Sci., 1959, 26, № 2, 122—123 (англ.)

Указан критерий устойчивости для многочленов с комплексными коэффициентами степени $\leqslant 5$. Утверждается, что для практических целей этот критерий наиболее удобен.

М. М. Постников

11291. Экстремальные свойства эрмитовых матриц. II. Маркус, Мойлс, Уэстуик (Extremal properties of Hermitian matrices. II. Marcus M., Moyls B. N., Westwick R.), Canad. J. Math., 1959, 11, № 3, 379—382 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 9961. Пусть H — эрмитово преобразование, действующее в унитарном пространстве V_n, и пусть $h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_n$ — собственные значения H. Рассматривается унитарное пространство V_m поливекторов $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_r$ $(m = C_n^r)$, в котором определяется эрмитово преобразование $C_r(H)$ по формуле $C_r(H)\, x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_r = Hx_1 \wedge \ldots \wedge Hx_r$. Пусть $1 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$ и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_r$ — натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant k$. Через Q_{kr} обозначается множество всевозможных наборов $w = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ (всего различных наборов, очевидно, окажется C_k^r). Пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \tag{1}$$

— векторы из V_n и пусть $x_w = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$. Рассматривается функция

$$g = g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{w \in Q_{kr}} (C_r(H)\, x_w, x_w)$$

и ставится вопрос об отыскании ее максимума и минимума по всем ортонормированным системам (1). Доказано, что

$$\max g = E_r(h_1, h_2, \ldots, h_k),$$
$$\min g = E_r(h_{h-k+1}, \ldots, h_n),$$

где $E_r(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — r-я элементарная симметрическая функция чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Этот результат был доказан ранее для случая положительно определенных эрмитовых матриц Маркусом и Мак-Грегором (РЖМат, 1958, 9961). Для $r = 1$ он сводится к известной теореме Фан Цюйя (Fan Ky, Proc. Nat. Acad. Sci., 1949, 35, 652—655).

В. Б. Лидский

11292. Нахождение характеристических корней симметрических матриц. Кристьяно, Данбар (Finding the characteristic roots of symmetric matrices. Christiano John G., Dunbar David L.), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 3, 352—359 (англ.)

Для некоторых симметрических матриц приведена схема разыскания подобной им диагональной матрицы или матрицы, имеющей форму, удобную для нахождения характеристических корней.

Резюме автора

11293. Максимализация одного определителя. Норт (Maximising a determinant. North R.), Math. Gaz., 1959, 43, № 345, 193—197 (англ.)

Из положительных чисел $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$, размещая их различным образом, составляют определители 3-го порядка. Пусть F — сумма трех членов, каждый из которых — произведение 3 чисел, например:

$$F = a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3. \tag{1}$$

Запись $(a_1, a_2, a_3) > (b_1, b_2, b_3)$ означает, что любое a больше любого b. Доказывается, что наибольшее возможное значение для F получается при условии:

$$(a_1, a_2, a_3) > (b_1, b_2, b_3) > (c_1, c_2, c_3). \tag{2}$$

В дальнейшем за элементы определителя принимаются числа 1, 2, ..., 9. В этом случае наибольшее значение суммы (1) $F_r = 7.8.9 + 4.5.6 + 1.2.3 = 630$. Далее доказывается, что следующее по величине значение этой суммы $F_s = 602$, а наименьшее значение $F_a = 1.8.9. + 2.5.7 + 3.4.6 = 214$. Определитель имел бы максимальное значение, если бы можно было расположить его элементы так, чтобы сумма F^+, входящая в разложение определителя с положительным знаком, имела наибольшее значение F_r, а сумма F^-, входящая с отрицательным знаком — наименьшее значение F_a. Оказывается, однако, что если в разложении определителя сумма F^+ удовлетворяет условию максимальности, так что $F^+ = F_r = 630$, наименьшее возможное значение для суммы F^- оказывается равным $1.6.9. + 2.5.8 + 4.7.3. = 218$, И таким образом $D = 630 - 218 = 412$. Если же расположить элементы определителя таким образом, что F^- примет наименьшее значение $F_a = 214$, то соответствующее значение F^+ будет $\leqslant 602$, так что $D' \leqslant 602 - 214 = 388$. Таким образом, максимальная величина определителя 412. Ее имеют, например, определители:

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

А. Г. Школьник

11294. Специальный определитель Вандермонда. Фарнелл (A special Vandermondian determinant. Farnell A. B.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 7, 564—569 (англ.)

Рассматривается определитель Вандермонда D, с элементами $(x_i)^j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, где $x_l = \cos\frac{\pi i}{m}$. Ввиду

$$D^2 = \begin{vmatrix} s_0 & 0 & s_2 & 0 & s_4 \ldots \\ 0 & s_2 & 0 & s_4 & 0 \ldots \\ s_2 & 0 & s_4 & 0 & s_6 \ldots \\ 0 & s_4 & 0 & s_6 & 0 \ldots \\ s_4 & 0 & s_6 & 0 & s_8 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Для элементов $s_{2k} = \sum_{i=0}^{m} x_i^{2k}$ этого определителя находят следующие выражения:

$$s_0 = m + 1,$$
$$s_{2k} = 1 + \binom{2k-1}{k-1} m/2^{2k-1} \quad (k = 1, \ldots, m-1), \tag{2}$$
$$s_{2m} = 1 + \left[\binom{2m-1}{m-1} + 1\right] m/2^{2m-1}.$$

Это позволяет, после ряда преобразований, использующих, в частности, некоторые тождества с биномиальными коэффициентами, установить, что

$$D^2 = \frac{m^{m+1}}{2^{m^2-3}}. \tag{3}$$

Величина D^2 весьма мала даже не для очень больших m. Так, при $m = 20$ D^2 — порядка $8 \cdot 10^{-47}$. Если за x_l вместо $\cos\frac{\pi i}{m}$ принять нули полинома Чебышева: $x_l = \cos\frac{(2i+1)\pi}{m}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, то квадрат

соответствующего определителя Вандермонда оказывается равным $m^m/2^{(m-1)^2}$. А. Г. Школьник

11295. О проблеме теории ожиданий и об одном свойстве определителя Вандермонда. Феро (Sur un problème de la théorie des files d'attente et une propriété des déterminants de Vandermonde. Feraud Lucien), Arch. sci., 1959, 12, № 1, 92—96 (франц.)

Пусть $\{u_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — система независимых случайных величин с плотностями, равными $\lambda_j e^{-\lambda_j u_j}$. Показывается, что $\Delta = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, \Lambda \sum \frac{1}{\lambda_j}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix},$$

$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — определитель Вандермонда порядка n, составленный из всех λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и $\Lambda = \Pi(\lambda_j)$. Х. Р. Сулейманова

11296. О подобных преобразованиях между матрицами и их транспонированными. Тауски, Цассенхаус (On the similarity transformation between a matrix and its transpose. Taussky Olga, Zassenhaus Hans), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 3, 893—896 (англ.)

Доказываются теоремы: 1. Для любой $n \times n$-матрицы $A = (a_{ik})$ с коэффициентами из поля F существует невырожденная симметричная матрица, преобразующая A в ее транспонированную A^T. 2. Невырожденная матрица, преобразующая A в A^T, является симметрической тогда и только тогда, когда минимальный многочлен матрицы A равен ее характеристическому многочлену. Из введения автора.

11297. Заметки о фундаментальной теореме о неприводимых неотрицательных матрицах. Шнейдер (Note on the fundamental theorem on irreducible non-negative matrices. Schneider Hans), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, 11, № 2, 127—130 (англ.)

Дается новое геометрическое доказательство известной теоремы Фробениуса, близкое по идее к доказательству Виландта (Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., Изд-во техн.-теор. лит., стр. 324—330; РЖМат, 1953, 593 К). В процессе доказательства автором получено неравенство, имеющее некоторый самостоятельный интерес: Пусть k — наименьший диагональный, а $\lambda \neq 0$ — наименьший недиагональный элемент μ неотрицательной, неприводимой матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$. Тогда $y_n/y_1 \geqslant \left(\frac{\lambda}{\mu - k}\right)^{n-1}$, где $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ — координаты положительного вектора y, а $\mu \geqslant \max_i \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j}{y_j}$. Х. Р. Сулейманова

11298. Объем в векторных пространствах. Уэстон (Volume in vector spaces. Weston J. D.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 7, 575—577 (англ.)

Исследуется вопрос о мере (объеме) n-мерного параллелепипеда, рассматриваемого как множество исходящих из его вершины и лежащих внутри него векторов. В n-мерном действительном векторном пространстве параллелепипед с вершиной в начале координат определяется n линейно независимыми векторами $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Рассматривается множество P линейных комбинаций этих векторов $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$. Через R обозначается класс множеств P, обладающий следующими свойствами: 1) Множества P при любом выборе векторов $\mathbf{x}_i$, включая и тот случай, когда один из этих векторов равен 0, принадлежат R; 2) Если $P_1, P_2 \in R$, то R содержит их сумму, разность, а следовательно, и пересечение; 3) Вместе с множеством P в R входит и любая его трансляция $P + \mathbf{x}$. На классе множеств R определяется мера — неотрицательная функция $\mu(P)$ со свойствами аддитивности: $\mu(P_1 + P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ $(P_1 \cap P_2$ пусто) и инвариантности относительно переноса: $\mu(P + \mathbf{x}) = \mu(P)$. $\delta(P)$-определитель матрицы, элементами которой являются координаты векторов $\mathbf{x}_i$ относительно некоторого фиксированного базиса. Доказывается, что определенная таким образом мера параллелепипеда отличается от абсолютной величины определителя $\delta(P)$ постоянным множителем:

$$\mu(P) = k\,|\delta(P)|. \qquad (1)$$

Величина k зависит от выбора базиса. Доказательство основывается на том, что $\mu(P)$, рассматриваемая как функция матрицы координат векторов, определяющих P, обладает следующими свойствами: 1) значение $\mu(P)$ не меняется при прибавлении одного столбца матрицы к другому; 2) при умножении столбца матрицы на λ $\mu(P)$ приобретает множитель $|\lambda|$. А. Г. Школьник

11299. Об изоморфизме между унитарными преобразованиями и проективными преобразованиями комплексных проективных пространств p^k—1 измерений. Галев (Върху изоморфизма между унитарните трансформации и проективни трансформации на комплексните проективни пространства с p^k—1 измерения. Галев Любен), Годишник Инж.-строит. ин-т. Фак. строит., архитект., хидротехн., 1958, 10, № 1, 41—68 (болг., рез. франц.)

Рассматриваются группы матриц порядка p^k, где p — простое число, являющиеся обобщениями групп матриц порядка 2^k, осуществляющих спинорные представления групп движений евклидовых пространств и строятся геометрические интерпретации этих групп при помощи унитарных и проективных преобразований комплексных проективных пространств $p^k - 1$ измерений. Б. А. Розенфельд

11300. Регулярный кватернионный полигон. Кроу (A regular quaternion polygon. Crowe Donald W.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 2, 77—79 (англ.)

Пусть Q_2 — линейное унитарное пространство пар кватернионов (x, y), где расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется формулой

$$[(x_1 - x_2)\overline{(x_1 - x_2)} + (y_1 - y_2)\overline{(y_1 - y_2)}]^{1/2}.$$

Линейное преобразование A унитарно, если оно сохраняет расстояние между точками. Прямая — множество точек, удовлетворяющих уравнению $ax + by = c$. Отражение — унитарное преобразование конечного порядка n, оставляющее на месте все точки некоторой прямой. Регулярный кватернионный полигон — конфигурация точек и прямых (вершин и сторон) в Q_2, которая переходит в себя при преобразованиях из группы, порожденной двумя унитарными отражениями, одно из которых циклически переставляет вершины на одной стороне, а другое циклически переставляет стороны через одну из вершин. Рассмотрен кватернионный полигон с 80 вершинами и 80 сторонами. Его группа преобразований содержит 320 элементов, порождается двумя элементами R и T, причем $R^4 = 1$, $RTRTR = TRTRT$, $(RT^2)^2 = (T^2R)^2$, $(RT)^5 = (RT^2)^4$. В. Г. Дорофеев

11301. Элементарный способ изображения целых рациональных функций. Хоссу (Racionális egész függvények elemi abrázolása. Hosszú Miklósné), Mat. tanítása, 1959, № 4, 99—105 (венг.)

11302. Замечание о теореме Митиура. Флейшер (Remark on a theorem of Michiura. Fleischer Isidore), Portugaliae Math., 1953, 12, 133 (англ.)

11303. Композиционная система непрерывных функций. Ли Дён Ук, Ким Ир Сон Чонхап техак Хакпо, 1957, № 2, 3—11 (кор.)

11304. Понятие порядка. III. Общая теория относительности как техника для экстраполирования на боль-

шие расстояния. Бастин, Килмистер (The concept of order. III. General relativity as a technique for extrapolating over great distances. Bastin E. W., Kilmister C. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, 53, № 2, 462—472 (англ.) См. РЖФиз, 1959, № 3, 4823.

11305 К. Алгебраические исследования по теореме Пикара—Монтеля. Анастассиадис (Recherches algébriques sur le théorème de Picard—Montel. Anastassiadis Jean. (Actual. scient. et industr. № 1273). Paris, Hermann, 1959, 52 p., 900 fr.) Bibliogr. France, 1959, 148, № 30, 822 (франц.)

11306 К. Основы науки о решении уравнений. Шварц (Základy náuky o riešení rovníc. Schwarz Štefan. I vyd. (Práce ČSAV. Sek. mat.—fys., Sv. 16). Praha, ČSAV, 1958, 346 s., 28 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 29, 656—657 (словацк.)

11307 К. Линейная алгебра для студентов университетов. Мердок (Linear algebra for undergraduates. Murdoch D. C. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, xii, 239 pp., ill.) (англ.)

11308 К. Теория матриц. Т. 1. Гантмахер (Matrizenrechnung. Teil 1. Allgemeine Theorie. Gantmacher F. R. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1958, 324 S., 26. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 21, 1476 (нем.)
Перевод с русского (РЖМат, 1953, 593К).

11309 К. Теория матриц. Т. 2. Гантмахер (Matrizenrechnung. Teil 2. Spezielle Fragen und Anwendungen. Gantmacher F. R. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1959, VII, 244 S., 26.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 34, 2602 (нем.)
Перевод с русского (РЖМат, 1953, 593К).

ГРУППЫ

11310. Обобщенные сопряженные классы в конечной группе. Ри (On generalized conjugate classes in a finite group. Ree Rimhak), Illinois J. Math., 1959, 3, № 3, 440—444 (англ.)

Пусть σ — фиксированный эндоморфизм группы G. Два элемента a и b группы G автор называет σ-сопряженными, если в ней существует такой элемент x, что $a = x^{-1}bx^{\sigma}$. Группа G разбивается на попарно непересекающиеся классы σ-сопряженных элементов — σ-классы. Если σ — тождественный автоморфизм, то σ-классы — это обычные классы сопряженных элементов. Множество S элементов группы G σ-инвариантно, если из $x \in S$ вытекает $x^{\sigma} \in S$. С помощью групповых характеров доказывается, что число σ-классов конечной группы G совпадает с числом ее σ-инвариантных классов сопряженных элементов. С. Н. Черников

11311. P-блоки для одного класса конечных групп. Берман, Бовди (P-блоки для одного класу скінченних груп. Берман С. Д., Бовді А. А.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 6, 606—608 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается конечная группа G порядка $p^{\alpha}q$ (где p — простое и $(p, q) = 1$), относительно которой предполагается, что она содержит нормальный делитель H порядка $p^{\gamma}q$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha)$, силовская p-подгруппа которого является нормальным делителем в H. Обозначим через K произвольное поле характеристики p, через $\overline{K}$ — его алгебраическое замыкание и через T — максимальный нормальный делитель группы G, порядок которого взаимно прост с p. Доказывается, что число неразложимых двусторонних идеалов (p-блоков) групповой алгебры группы G над полем $\overline{K}$ равно числу классов сопряженных элементов группы G, содержащихся в T. Далее, число неразложимых двусторонних идеалов групповой алгебры группы G над полем K равно числу K-отделов группы G, содержащихся в T (РЖМат, 1956, 7133). Установлено, также, что два характера группы G, соответствующие неприводимым представлениям над полем комплексных чисел, принадлежат одному блоку, тогда и только тогда, когда на нормальном делителе T они индуцируют один и тот же характер. З. И. Боревич

11312. Об одном классе конечных групп, введенном Мак-Лейном. Цаппа (Su una classe di gruppi finiti introdotta da McLain. Zappa Guido), Illinois J. Math., 1959, 3, № 3, 307—318 (итал.)

Исследуются группы порядка $p^{\alpha}q$ $(p, q$ — простые), обладающие свойством A I: если конечная группа G содержит подгруппу H и существует целое число m, делящее порядок G и делящееся на порядок H, то G имеет подгруппу порядка m, содержащую H.

Доказаны следующие теоремы: I. 3. Если N — нормальный делитель группы, обладающей свойством A I, то G/N также обладает свойством A I; I. 4. Пусть G — группа порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$ $(p > q)$, обладающая свойством AI; P — ее (единственная) подгруппа Силова порядка p^{α}; C — центр подгруппы P. Тогда для всякого элемента g из G и всякого элемента c из C можно подобрать такое целое число s, что $g^{-1}cg = c^s$; I. 5. Пусть G, P, g имеют тот же смысл, как в I. 4. Пусть C_l, C_{l+1} $(C_l \subset C_{l+1})$ — два последовательных члена центрального ряда группы P. Тогда для всякого c из C_{l+1} можно подобрать такое целое число s, что $g^{-1}cg = c^s h$, где h содержится в C_l (напечатано, что h содержится в C); значение h вообще говоря, зависит от c.

Отдельно рассмотрены следующие частные случаи: 1. Подгруппа P-абелева; 2. Коммутант подгруппы P содержится в ее центре; 3. Порядок коммутанта P равен p. В. К. Туркин

11313. Группы с одним классом недостижимых изоордных πd-подгрупп. Сафонов С. А., Докл. АН СССР, 1960, 130, № 1, 26—28

Пусть G — конечная группа и пусть π — непустое множество простых чисел. πd-группой (πd-подгруппой), как известно, называется группа (подгруппа), порядок которой делится хотя бы на одно простое число из π. Достижимой (субнормальной) подгруппой называется подгруппа, содержащаяся в каком-либо нормальном ряду группы. Подгруппы одного и того же порядка названы изоордными. Отношением изоордности множество всех подгрупп данной группы разбивается на классы, названные классами изоордных подгрупп. Класс изоордных подгрупп называется классом недостижимых изоордных подгрупп, если среди подгрупп этого класса найдется хотя бы одна подгруппа, недостижимая в группе. Доказано, что группа с одним классом недостижимых изоордных πd-подгрупп разрешима. П. И. Трофимов

11314. О четырежды транзитивных группах. Паркер (On quadruply transitive groups. Parker E. T.). Pacif. J. Math., 1959, 9, № 3, 829—836 (англ.)

Доказаны следующие теоремы: 1) Пусть G — четырежды транзитивная конечная группа подстановок; H — подгруппа группы G, оставляющая на месте четыре символа; P — силовская p-подгруппа группы H. Пусть P оставляет на месте $r \geqslant 12$ символов и пусть нормализатор P в G имеет компонентом группу A_r (знакопеременную) или S_r (симметрическую), относящуюся к символам, оставляемым на месте группою P. Если P не имеет компоненты степени $\geqslant p^3$ и не имеет совокупности из $r(r-1)/2$ подстановочно изоморфных компонент, то G — знакопеременная или симметрическая группа. 2) Пусть G — четырежды транзитивная группа подстановок степени n и пусть порядок подгруппы G, оставляющей на месте четыре символа, делится на нечетное простое

число p, причем $5p > n-4$ и $4p \neq n-4$. Тогда G является группой A_n или S_n. В. К. Туркин

11315. **Группы с нильпотентным коммутантом. Инагаки** (On a group whose commutator subgroup is nilpotent. Inagaki Nobuo), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1958, **A6**, 15 Dec., 143—146 (англ.)

Рассматриваются только конечные группы. Если коммутант G' группы G нильпотентен и Ф-подгруппа $\Phi(G)$ совпадает с единицей, то G' есть прямое произведение элементарных абелевых подгрупп, G — метабелева и существует (абелева) подгруппа A такая, что $G^* = G'A$ и $G' \| A = e$. Отсюда следует, что если G' нильпотентна, то G тогда и только тогда сверхразрешима, когда порядок каждой минимальной инвариантной подгруппы в $G/\Phi(G)$ является простым числом (теорема 2). Приводятся некоторые другие простые свойства группы с нильпотентным коммутантом. Автор отмечает, что теорема 2 при более слабых ограничениях доказана также Хуппертом (РЖМат, 1956, 7138).

Б. И. Плоткин

11316. **О конечных группах нечетного порядка. Накамура Кирио**, Сугаку, 1957, **9**, № 1, 11 (японск.)

Доказана следующая теорема: Пусть G — конечная группа нечетного порядка n, такая, что n не имеет делителей вида p^r, $r \geqslant 3$. Тогда G' — абелева группа.

I. Kawada

Перевод из Math. Revs, 1959, **20**, 145.

11317. **О гомоморфизмах на конечные группы. Мальцев А. И.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 237—238

Резюме сообщения, сделанного на Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре. Формулируются основные результаты, содержащиеся в одноименной работе автора (РЖМат, 1960, 4941). С. Р. Когаловский

11318. **Геометрия некоторых конечных групп. Бакман** (Geometry in certain finite groups. Bachman George), Math. Z., 1959, **70**, № 5, 466—479 (англ.)

Пусть G — конечная группа взаимно однозначных отображений множества $\sum$ на себя и $\Gamma \subset \sum$. Положим $F(\Gamma) = \{g;\ g \in G,\ g(x) = x$ для всех $x \in \Gamma\}$, $F^*(\Gamma) = \{g;\ g \in G,\ g(x) \in \Gamma$ для всех $x \in \Gamma\}$, $\Pi(H) = \{x;\ x \in \sum,\ h(x) = x$ для всех $h \in H\}$, $\overline{\Gamma} = \Pi F(\Gamma)$. Если $\alpha_i \in \sum$ и $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются образующими подмножества Γ. Минимальное число образующих обозначим через $\dim \Gamma + 1$. Если $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$, где $\alpha \neq \beta$, то Γ называется прямой. В этом случае $\dim \Gamma = 1$.

Аксиомы: 1. Если $\alpha \in \sum$, то $\{\overline{\alpha}\} = \{\alpha\}$; 2. Если $\Gamma = \overline{\Gamma}$, то $F^*(\Gamma)$ транзитивна на Γ; 3. Если $\Gamma_1 = \overline{\Gamma}_1$ и $\Gamma_2 = \overline{\Gamma}_2$, $\dim \Gamma_1 = \dim \Gamma_2$, то $g(\Gamma_1) = \Gamma_2$ для некоторого $g \in G$. Указывается, что, не ограничивая общности, можно считать, что $F\left(\sum\right)$ совпадает с единицей группы G. В противном случае вместо G следует рассмотреть $G/F\left(\sum\right)$.

Отметим две теоремы: 1. Если $\dim \sum = 1$ и H — подгруппа группы G, оставляющая на месте некоторую точку из $\sum$, то между точками из $\sum$ и подгруппами, сопряженными с H, существует взаимно однозначное соответствие. При этом H является своим собственным нормализатором в G, а различные подгруппы, сопряженные с H, пересекаются лишь по единице; 2. Если $\dim \sum = 2$, то или все прямые проходят через некоторую точку или все прямые, проходящие через эту точку, одномерны (т. е. $\dim L = 1$). Приводятся примеры. Устанавливается ряд свойств группы G, если $\dim \sum = 2$.

Л. А. Скорняков

11319. **Модули над конечными группами. Лим Док Сан** (Modules over finite groups. Rim Dock Sang), Ann. Math., 1959, **69**, № 3, 700—712 (англ.)

Пусть π-произвольная конечная группа. Полная производная последовательность группы π (см. гл. XII книги Картана и Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427)) с коэффициентами в некотором π-модуле A (т. е. $Z(\pi)$-модуле A, где Z — кольцо целых чисел) обозначается $H(\pi, A)$. π-модуль A называется когомологически тривиальным, если $H(\pi', A) = 0$ для каждой подгруппы π' группы π. Изучаются соотношения между следующими понятиями: свободный π-модуль, проективный π-модуль, инъективный π-модуль, слабо проективный π-модуль и когомологически тривиальный π-модуль. Среди других доказываются следующие утверждения: 1) Если K — произвольное коммутативное кольцо с единицей, то $K(\pi)$-модуль A тогда и только тогда слабо $K(\pi)$-проективен, когда $H(\pi, \mathrm{Hom}_K(A, A)) = 0$. 2) Следующие свойства равносильны: модуль A слабо π-проективен; модуль A слабо π'-проективен для каждой подгруппы π' группы π; модуль A слабо π'-проективен для каждой силовской подгруппы π' группы π. Аналогичные утверждения имеют место относительно π-проективности и π-инъективности. 3) π-модуль A тогда и только тогда π-проективен (π-инъективен), когда он когомологически тривиален и Z-свободен (соответственно Z-полон). 4) π-модуль A тогда и только тогда когомологически тривиален, когда он имеет конечную проективную или инъективную размерность; в этом случае $\dim_{Z(\pi)} A \leqslant 1$ и $\mathrm{inj.dim}_{Z(\pi)} A \leqslant 1$. 5) Если по крайней мере один из π-модулей A или B когомологически тривиален, то для любой подгруппы π' группы π и любого n имеют место изоморфизмы $H^n(\pi', A \otimes_Z B) \cong H^{n+2}(\pi', \mathrm{Tor}_1^Z(A, B))$ и $H^n(\pi', \mathrm{Hom}_Z(A, B)) \cong H^{n-2}(\pi', \mathrm{Ext}_Z^1(A, B))$. В качестве следствия этого утверждения доказывается, что π-модуль A тогда и только тогда слабо π-проективен, когда он и π-модуль $\mathrm{Ext}_Z^1(A, A)$ когомологически тривиальны; если модуль A имеет конечное число образующих и не содержит элементов порядка $[\pi : 1]$ (где $[\pi : 1]$ — порядок группы π), то для него слабая π-проективность равносильна когомологической тривиальности. Если Λ — произвольное кольцо с единицей, то в классе $\mathfrak{P}_\Lambda$ всех проективных Λ-модулей с конечным числом образующих вводится отношение эквивалентности, при котором два проективных модуля $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}_\Lambda$ эквивалентны тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{F}_\Lambda$ всех свободных Λ-модулей с конечным числом образующих найдутся два таких свободных модуля F_1 и F_2, что $P_1 \oplus F_1 \cong P_2 \oplus F_2$. Множество классов эквивалентных проективных модулей из $\mathfrak{P}_\Lambda$ образует абелеву группу $\Gamma[\Lambda]$, называемую группой проективных классов. Эта группа показывает, насколько класс $\mathfrak{P}_\Lambda$ шире класса $\mathfrak{F}_\Lambda$. С другой стороны, если кольцо Λ дедекиндово, то отношение эквивалентности можно ввести в множестве всех идеалов кольца Λ, полагая два идеала эквивалентными, если один из них получается из другого с помощью умножения на некоторый главный идеал. Множество классов эквивалентных идеалов образуют абелеву группу $C\{\Lambda\}$. Доказывается, что если кольцо Λ дедекиндово, то группа $\Gamma[\Lambda]$ изоморфна группе $C\{\Lambda\}$ и модуль $P \in \mathfrak{P}_\Lambda$ тогда и только тогда принадлежит $[0]$-классу группы $\Gamma[\Lambda]$, когда он Λ-свободен. Исследуя в заключении случай, когда кольцо Λ есть групповое кольцо $Z(\pi)$ циклической группы π простого порядка p, автор показывает, что для некоторых простых p группа $\Gamma[Z(\pi)]$ нетривиальна и, значит, существуют $Z(\pi)$-проективные модули с конечным числом образующих, не являющиеся $Z(\pi)$-свободными. Этот результат является ответом на один из вопросов, поставленных в

упомянутой выше книге Картана и Эйленберга (этот же результат получен советским математиком Голодом (РЖМат, 1960, 2755)). Отмечается также, что для циклической группы π простого порядка группа $\Gamma[Z(\pi)]$ конечна и ставится вопрос, имеет ли это место для произвольной конечной группы π. Е. Г. Шульгейфер

11320. Постулаты для коммутативных групп. Шоленде́р (Postulates for commutative groups. Sholander Marlow), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 93—95 (англ.)

Показывается, что абелева группа G может быть определена одним из следующих способов: 1) G—множество, замкнутое относительно умножения, причем каждому $a \in G$ поставлен в соответствие элемент $a' \in G$ и из $(aa')b' = (rs')t'$ вытекает $b = (tr')s$; 2) G—множество, замкнутое относительно вычитания, причем $y = x - [(x - z) - (y - z)]$. Л. А. Скорняков

11321. Абелевы группы унимодулярных матриц. Дейд (Abelian groups of unimodular matrices. Dade Everett C.), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 1, 11—27 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических чисел конечной степени m, O—кольцо всех целых чисел поля K, U—группа единиц K, $\Delta_n(K)$ — группа всех матриц порядка n над O, определители которых принадлежат U, $\Gamma_n(K)$ — группа всех матриц над O порядка n, определители которых равны единице. Если G—абелева подгруппа $\Delta_n(K)$, то ее ранг не́ больше числа $\left[\frac{n^2}{4}\right]m + r(U)$, где $r(U)$ — ранг U. Если же G — абелева подгруппа $\Gamma_n(K)$, то ее ранг не больше числа $\left[\frac{n^2}{4}\right]m$. Дается оценка порядка периодической части абелевых подгрупп $\Delta_n(K)$ и $\Gamma_n(K)$. Д. А. Супруненко

11322. О вещественных линейных нильпотентных группах. Супруненко Д. А., Матем. сб., 1959, **49**, № 3, 347—352

Изучаются неприводимые нильпотентные подгруппы $GL(n, D)$, где D — поле вещественных чисел. Доказаны следующие утверждения: 1) При любом четном $n \geqslant 2$ и $l > 1$ $GL(n, D)$ обладает неприводимыми нильпотентными подгруппами класса нильпотентности l; 2) При нечетном n в $GL(n, D)$ нет неприводимых нильпотентных подгрупп; 3) При четном n в $GL(n, D)$ существует лишь конечное число несопряженных максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп заданного класса; 4) Если n не является степенью числа 2, то описание максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп $GL(n, D)$ заданного класса l сводится к такой же задаче для $GL(\frac{n}{2}, K)$, где K — поле комплексных чисел. Приводится описание неприводимых нильпотентных подгрупп в $GL(2, D)$. Б. И. Плоткин

11323. Параметризация собственной ортогональной группы. Бакман, Хелман (On the parametrization of the proper orthogonal group. Bachman G., Hellman M. J.), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 93—100 (англ.)

Если A—произвольная действительная кососимметрическая матрица, то с помощью некоторой также действительной ортогональной матрицы ее можно привести к следующему нормальному виду: вдоль главной диагонали стоят блоки вида $\begin{pmatrix} 0 & \varphi_l \\ -\varphi_l & 0 \end{pmatrix}$, а все остальные элементы равны нулю. Доказаны следующие две теоремы:

1. Пусть K_{2n+1} — множество кососимметрических матриц порядка $2n+1$, в нормальном виде которых $|\varphi_l| < \pi$ для всех i. Тогда существуют n полиномиальных отображений $P_1, P_2, \ldots, P_n$ степени $2, 4, \ldots, 2n$ подмножеств K_{2n+1} на группу $O(2n+1)$ собственных ортогональных матриц порядка $2n+1$. При этом: 1) совокупность этих отображений покрывает $O(2n+1)$, 2) два различных отображения не имеют общего образа, 3) каждое из них взаимно однозначно, если кососимметрическая матрица не имеет $i\pi$ своим собственным значением, 4) если матрица A имеет $i\pi$ своим собственным значением кратности s и $P_j(A) = W \in O(2n+1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то существуют 2^s кососимметрических матриц, имеющих образ W при отображении P_j.

2. Существуют $2n-1$ полиномиальных отображений $P_1, P_2, \ldots, P_n$ степени $1, 2, \ldots, 2n-1$ подмножеств K_{2n} на $O(2n)$, для которых имеют место соответствующие утверждения теоремы 1. Как иллюстрация к теореме 2 подробно рассмотрен случай $n=2$. В. Г. Дорофеев

11324. Теоремы включения для подгрупп сравнений. Ньюман, Рейнер (Inclusion theorems for congruence subgroups. Newman M., Reiner I.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 369—379 (англ.)

Пусть G_t—группа всех $t \times t$-матриц с определителем равным единице, над кольцом целых рациональных чисел. Для разложения $t = r + s (r > 0, s > 0)$ и положительного целого n определим подгруппу $G_{r,s}(n)$, состоящую из всех матриц $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ группы G_t таких, что A степени r, D степени s и $C \equiv 0 \pmod n$.

Теорема 1. Пусть m и n — положительные целые числа, а H—такая подгруппа G_t, что $G_{r,s}(mn) \subset H \subset G_{r,s}(n)$. Тогда существует такой делитель d числа m, что $H = G_{r,s}(dn)$. Для $t = 2r$ определим подгруппу $G_r(m, n)$, состоящую из всех матриц $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ группы G_{2r} таких, что A и D степени r, $B \equiv 0 \pmod m$, $C \equiv 0 \pmod n$.

Теорема 2. Пусть группа H удовлетворяет условию $G_r(m, n) \subset H \subset G_{2r}$. Если $(m, n) = 1$, то существуют такие целые m_1 и n_1, что $H = G_r(m_1, n_1)$, m делится на m_1, а n — на n_1.

Доказывается одно обобщение теоремы 2. Кроме того, доказываются теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 для симплектических групп целочисленных матриц. Д. А. Супруненко

11325. Замечание о подгруппе сравнений модульгруппы степени n. Клинген (Bemerkung über Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe n-ten Grades. Klingen Helmut), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 113—122 (нем.)

S_p—группа всех комплексных матриц M порядка $2n$, подчиненных условию $M' I M = I$, где $I = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}$, E_n—единичная матрица порядка n. Пусть R — кольцо всех целых чисел поля алгебраических чисел K конечной степени. Модуль-группой $\mathfrak{M}_n$ называется группа всех матриц над R, принадлежащих S_p. Если $\mathfrak{n}$ — идеал R, то главной подгруппой сравнений называется группа $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{n})$ всех матриц M из $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяющих сравнению $M \equiv E_{2n} \pmod{\mathfrak{n}}$. Через $\mathfrak{G}_n(\mathfrak{n})$ обозначим группу всех матриц M из $\mathfrak{M}_n$, для которых $M = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}$, $C_n = 0 (\mathrm{mod}\, \mathfrak{n})$. В работе построены системы образующих для групп $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{n})$ и $\mathfrak{G}_n(\mathfrak{n})$, а также вычисляются индексы $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{n})$ и $\mathfrak{G}_n(\mathfrak{n})$ в $\mathfrak{M}_n$. Д. А. Супруненко

11326. Группы, индуцирующие разбиение множеств. Гилберт (Groups which induce a partition of a set. Gilbert Jimmie D.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 121—123 (англ.)

Группа преобразований множества естественным образом определяет разбиение множества (разделение на непересекающиеся подмножества), если два элемента относятся к одному и тому же подмножеству, когда в

группе существует преобразование, переводящее один элемент в другой. Если абстрактная группа G может быть представлена как группа преобразований множества, производящая некоторое его разбиение на подмножества, то говорят, что G индуцирует это разбиение. Данное разбиение множества может быть индуцировано различными абстрактными группами. Рассматривается вопрос о порядке индуцирующих групп. Если множество M разбито на n подмножеств M_i, состоящих из m_i элементов, то порядок индуцирующей это разбиение группы G не может быть более $m_1!m_2!...m_n!$ Этот вывод далее уточняется: порядок G является кратным r — общего наименьшего кратного порядков $m_1, m_2,...,m_n$ подмножеств разбиения. В случае, если индуцирующая группа абелева, то порядок ее не превосходит произведения $m_1, m_2,...,m_n$ порядков подмножеств. Отсюда как следствие выводится, что если G — абелева группа, транзитивная на множестве из m элементов, то порядок ее равен m. В заключение приводится следующая теорема: если множество M может быть разбито на n подмножеств, порядки которых попарно взаимно просты, то абелева группа, индуцирующая это разбиение, есть прямое произведение n подгрупп, каждая из которых индуцирует соответствующее подмножество разбиения. А. Г. Школьник

11327. Периодические FC-группы. Холл (Periodic FC-groups. Hall P.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 289—304 (англ.)

Рассматриваются связи между периодическими FC-группами и группами, разложимыми в прямое произведение конечных групп. Доказывается, что счетная периодическая FC-группа тогда и только тогда вложима в прямое произведение конечных групп, когда она резидуально конечна. В частности, счетная FC-группа без центра вложима в прямое произведение конечных групп. Приводится ряд примеров. Так доказывается, что существует счетная бесконечная FC-группа G, которая локально и резидуально конечна, нильпотентна класса 2, неразложима в прямое произведение и не является гомоморфным образом прямого произведения конечных групп. Приводится ряд общих конструкций и идей, представляющих также самостоятельный интерес. Б. И. Плоткин

11328. К теории полупростых локально нормальных групп. Каргаполов М. И., Научн. докл. высшей школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 3—7

Доказано, что каждая полупростая локально нормальная группа изоморфна подгруппе некоторого прямого произведения конечных групп. Приводится пример, показывающий, что существуют полупростые локально нормальные группы, не разложимые в прямое произведение конечных групп. Б. И. Плоткин

11329. Сверхразрешимые группы. Бэр (Überauflösbare Gruppen. Baer Reinhold), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 11—28 (нем.)

Группа G тогда и только тогда является сверхразрешимой группой с условием максимальности, когда выполняются следующие условия: а) G имеет конечное число образующих; б) каждая максимальная подгруппа в G имеет в G конечный индекс; с) каждая бесконечная факторгруппа группы G содержит почти вполне приводимый нормальный делитель, имеющий конечное число образующих. Условие конечности числа образующих в последнем пункте отбросить нельзя. Нормальный делитель $N \neq E$ группы G называется почти вполне приводимым в G, если единица есть пересечение всех нормальных делителей X из G со свойствами $X \subset N$ и N/X — конечный и минимальный нормальный делитель в G/X. Имеется ряд вспомогательных предложений и, в частности, приводятся некоторые признаки, при которых группа автоморфизмов абелевой группы без кручения оказывается циклической. Б. И. Плоткин

11330. Сверхразрешимые вложения. Бэр (Supersoluble immersion. Baer Reinhold), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 3, 353—369 (англ.)

Рассматриваются только конечные группы. Нормальный делитель K группы G сверхразрешимо вложен в G, если при любом гомоморфизме σ группы G таком, что $K^\sigma \neq E$, в K^σ имеется нетривиальный циклический нормальный делитель группы G^σ. Доказывается эквивалентность следующих свойств: 1) нормальный делитель K сверхразрешимо вложен в G; 2) фактор-группа $K/\Phi(K)$ сверхразрешимо вложена в $G/\Phi(K)$ ($\Phi(K)$ — Φ-подгруппа в K); 3) если θ — группа автоморфизмов, индуцируемых в p-подгруппе U из K элементами нормализатора подгруппы U в G, то $\theta'\theta^{p-1}$ есть p-подгруппа в θ. Здесь θ' — коммутант, а θ^{p-1} — $(p-1)$-я степень группы θ. Вводится понятие строго p-замкнутой группы, с помощью которого формулируются новые признаки сверхразрешимых групп. Группа G называется строго p-замкнутой, если она обладает единственной силовской p-подгруппой, факторгруппа по которой абелева показателя $p-1$. Понятие сверхразрешимого вложения естественным образом переносится на случай пары (G,θ), где θ — группа автоморфизмов группы G. Пара (G,θ) называется сверхразрешимой, если минимальный θ-допустимый нормальный делитель из G/T для θ-допустимого нормального делителя T из G есть циклическая группа простого порядка. Пара (G,θ) тогда и только тогда сверхразрешима, когда сверхразрешима пара $(G/\Phi(G),\theta)$. Пусть $\sum_i G$ — произведение всех сверхразрешимо вложенных нормальных делителей группы G, $\sum_0 G$ — произведение всех нормальных делителей $X \subset G$ таких, что XS сверхразрешима всякий раз, когда S — сверхразрешимая подгруппа в G. Пусть еще $\sum G$ — пересечение всех нормальных делителей X из G со сверхразрешимой факторгруппой G/X. Тогда $\sum_i G = \sum_0 G \cap \mathfrak{Z}\left(\sum G\right)$. При этом $\mathfrak{Z}\left(\sum G\right)$ — централизатор $\sum G$.

Б. И. Плоткин

11331. Прямое произведение групп взаимно простых порядков. Бэр (Direkte Produkte von Gruppen teilerfremder Ordnung. Baer Reinhold), Math. Z., 1959, **71**, № 4, 454—457 (нем.)

Пусть τ — некоторое множество простых чисел и τ' — его дополнение в множестве всех простых чисел. Группа G называется τ-однородной, если для любой ее τ-подгруппы U нормализатор $N(U)$ индуцирует в U τ-группу автоморфизмов. Если в группе G множество всех τ-элементов составляет подгруппу, то такая группа τ'-однородна. Доказана следующая теорема. Группа G тогда и только тогда разлагается в прямое произведение τ-группы и τ'-группы, когда она τ- и τ'-однородна и в каждой простой факторгруппе подгруппы из G не могут одновременно содержаться ненильпотентная τ-подгруппа и ненильпотентная τ'-подгруппа. Б. И. Плоткин

11332. Заметка о преобразованиях Нильсена. Рапапорт (Note on Nielsen transformations. Rapaport Elvira Strasser), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 228—235 (англ.)

Пусть N — изоморфизм свободной группы F_n со свободными образующими $a_1,\ldots,a_n$ на свободную группу F_n' со свободными образующими $c_1,\ldots,c_n$, $N(a_i)=b_i$. Если $G=\{a_1,\ldots,a_n;\ R_1,\ldots,R_k\}=\{a;R\}$ и $G'=\{b_1,\ldots,b_n;\ S_1,\ldots,S_l\}=\{b;S\}$ — факторгруппы групп F_n и F_n', заданные определяющими соотношениями $R_i=1$ и $S_j=1$ соответственно, то автор говорит, что образующие b

группы G' получаются из a_i при помощи преобразования Нильсена N. Пусть $G=\{a;R\}\cong IG=\{b;S\}$, $I(a_i)=v_i(b)$ и пусть в IG существуют соотношения $S_i'(b)=1$ такие, что элементы $v_i(b)\,S_i'(b)$ свободно порождают образующие b_j. Тогда изоморфизм $I':I'(a)=v_i(b)\,S_i'(b)$ является преобразованием Нильсена N, а изоморфизм I называется ему эквивалентным: $I\sim N$. Аналогичные определения пригодны и для автоморфизмов групп. Уже для циклических групп простого порядка существуют как автоморфизмы Нильсена, так и автоморфизмы $A\nsim N$. Для конечно-определенной группы с более сложной структурой решить этот вопрос труднее.

Теорема 1. Группа $L=\{u,v;\ uu\,vu^{-1}v^{-1}v^{-1}u^{-1}vu\}$ (группа узла Листинга) имеет автоморфизм $A:A(u)=v^{-1}u^{-1}vu$, $A(v)=u^{-1}v^{-1}u^{-1}A(u^{-1})$, который не эквивалентен преобразованию Нильсена. Вместе с тем в работе доказано (теорема 2), что, увеличив число образующих и число определяющих соотношений группы G в два раза (а в некоторых случаях и меньше), любой автоморфизм группы G можно рассматривать как преобразование Нильсена, отнесенное уже к новому заданию группы. То же самое верно и для заданного изоморфизма I двух групп. Во второй части работы изучаются расширения свободной группы F_2 (с двумя образующими) при помощи свободной циклической группы F_1 такие, что коммутант расширения изоморфен группе F_2. Выделяется некоторый класс расширений и решается вопрос об изоморфизмах Нильсена между получающимися группами. А. И. Кострикин

11333. Об уравнении $a^{2+n}=b^{2+m}c^{2+p}$ в свободной группе. Шютценбергер (Sur l'équation $a^{2+n}=b^{2+m}c^{2+p}$ dans un goupe libre. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 17, 2435—2436 (франц.)

Обобщая теорему Линдона (РЖМат, 1960, 150), автор доказывает, что равенство, указанное в заглавии работы, в свободной группе может выполняться лишь при условии $bc=cb$. А. И. Ширшов

11334. Уравнение $a^nb^n=c^n$ в свободной группе. Шенкман (The equation $a^nb^n=c^n$ in a free group. Schenkman Eugene), Ann. Math., 1959, **70**, № 3, 562—564 (англ.)

Если в свободной группе для некоторого $n>1$ имеет место $a^nb^n=c^n$, то элементы a, b и c порождают циклическую подгруппу. Л. А. Скорняков

11335. Редукция разрешимых групп. Венкатараюду, Рагхавачарьюлу (Reduction of solvable groups. Venkatarayudu T., Raghavacharyulu I. V. V.), Proc. Indian Acad. Sci., 1959, **A50**, № 3, 196—201 (англ.)

Представления разрешимых групп изучаются с помощью мономиальных представлений. Приводится один способ редукции к представлениям, определяемым в связи с представлениями инвариантной абелевой подгруппы. Б. И. Плоткин

11336. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп. Еремин И. И., Матем. сб., 1959, **47**, № 1, 45—54

Доказываются следующие предложения: 1) Пусть $\mathfrak{Z}$ — локально нормальная группа, $\mathfrak{A}$ — произвольная ее подгруппа с конечным множеством $\pi(\mathfrak{A})$ простых делителей порядков ее элементов. Тогда, если индекс централизатора $z(\mathfrak{A})$ в группе $\mathfrak{Z}$ бесконечен, то в группе $\mathfrak{A}$ найдется абелева подгруппа, определяющая бесконечный класс сопряженных с ней подгрупп группы $\mathfrak{Z}$ (от требования конечности множества $\pi(\mathfrak{A})$ освободиться нельзя); 2) Группа $\mathfrak{Z}$, в которой для каждой абелевой подгруппы существует лишь конечное число ей сопряженных подгрупп, является конечным расширением своего центра; 3) Каждая абелева p-подгруппа периодической группы $\mathfrak{Z}$ тогда и только тогда определяет конечный класс сопряженных с ней подгрупп группы $\mathfrak{Z}$, когда последняя является расширением своего центра с помощью тонкой слойно-конечной группы.

Примечание референта. Доказательство леммы 3 содержит ошибочное утверждение (см. стр. 47, первая строка сверху). Эта некорректность легко устраняется; утверждение леммы справедливо.

С. Н. Черников

11337. Группы как объединения собственных подгрупп. Хейбер, Розенфелд (Groups as unions of proper subgroups. Haber Seymour, Rosenfeld Azriel), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 6, 491—494 (англ.)

Исследуется, в каких случаях группа является объединением (теоретико-множественной суммой) некоторого числа своих собственных подгрупп. Доказаны следующие теоремы:

1. Никакая группа не может быть объединением двух своих собственных подгрупп.

2. Группа является объединением трех своих собственных подгрупп в том и только в том случае, если она гомоморфна клейновой нециклической группе порядка 4.

3. Пусть группа G содержит корни степени k из своих элементов для всякого натурального k, меньшего некоторого натурального n. Тогда G не является неприводимым объединением n или меньшего числа своих собственных подгрупп. (Объединение подгрупп называется приводимым, если по крайней мере одна из этих подгрупп содержится также в объединении остальных).

4. Пусть G — конечная группа порядка N; p — наименьший простой делитель числа N. Пусть G является объединением $p+1$ своих собственных подгрупп S_i. Тогда, по крайней мере одна из подгрупп S_i имеет индекс p. Если эта подгруппа является инвариантной, то все S_i имеют индекс p, а N делится на p^2.

В. К. Туркин

11338. Об одном классе $\mathfrak{M}$-подгрупп. Нёбауер (Über eine Klasse von $\mathfrak{M}$-Untergruppen. Nöbauer Wilfried), Monatsh. Math., 1957, **61**, № 3, 195—208 (нем.)

Дается обобщение на k-мерный случай результатов, полученных ранее автором для одномерного случая (РЖМат, 1958, 8599; 1960, 8621). Терминология и обозначения прежние, методы доказательства в основном также прежние. В. К. Туркин

11339. Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли. IV. Диксмье (Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. IV. Dixmier Jacques), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 3, 321—344 (франц.)

См. РЖМат, 1959, 3964, 8852.

Для группы G всех нижних треугольных матриц с диагональными элементами, равными 1, строится основная серия неприводимых и попарно неэквивалентных унитарных представлений. Название «основная» оправдывается наличием формулы Планшереля. Доказывается существование следов представлений как обобщенных функций. Попутно находится центр обертывающей алгебры для алгебры Ли, соответствующей группе G. Широко используются идеи и методы И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка (РЖМат, 1958, 3089К).

А. В. Сульдин

11340. К вычислению характеров полупростых групп Ли. III. Фрёйденталь (Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. III. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, **A59**, № 5, 511—514; Indagationes math., 1956, **18**, № 5, 511—514 (нем.)

Продолжение работ РЖМат, 1956, 5738, 5739. Ставится задача погружения для однородных пространств: дана группа Ли G и ее подгруппа F, являющаяся группой Ли, ищется линейное (проективное) пространство R и погружение однородного пространства G/F в R, при котором преобразования группы G изображаются линейными (проективными) преобразованиями R. Показывается, что для решения этой задачи необходимо и достаточно существование в R вектора (точки) инвариантного при преобразованиях F и только при этих преобразованиях. При помощи таблиц части II работы (РЖМат, 1956, 5739) решается задача погружения однородного пространства E_8/D_8 — 128-мерного пространства, являющегося одним из симметрических пространств Картана. Показывается, что минимальная размерность линейного пространства, в котором может быть решена эта задача, равна 27000.

Б. А. Розенфельд

11341. Расширение представлений групп Ли. II. Мостов (Extension of representations of Lie groups. II. Mostow G. D.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 2, 331—347 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 1398.

Пусть ρ — представление аналитической группы G в вещественном или комплексном линейном пространстве V. Пусть $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ — последовательность таких линейных подпространств пространства V, инвариантных относительно $\rho(G)$, что V_i/V_{i-1} неприводимы относительно ρ. Представление ρ' группы G, индуцированное ρ в прямой сумме $V_1/V_0 + \ldots + V_n/V_{n-1}$, называется полупростым представлением, ассоциированным с ρ. Основной результат: Если L — аналитическая группа, G — замкнутый аналитический нормальный делитель, ρ — конечномерное представление G, ρ' — полупростое представление G, ассоциированное с ρ, и N — радикал производной L', то представление ρ можно расширить до конечномерного представления L тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия: 1) ρ' тривиально в $G \cap N$, 2) представление σ аналитической группы GN, определяемое: $\sigma(gu) = \rho'(g)$ непрерывно в топологии GN относительно L, 3) если P — пересечение ядер всех конечномерных представлений L, то ρ тривиально в $P \cap G$.

А. В. Сульдин

11342. Выпуклые цепи в l-группах. Якубик (Konvexe Ketten in l-Gruppen. Jakubík Ján), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 1, 53—63 (нем.; рез. словацк., русск.)

Пусть G — l-группа, содержащая более одного элемента. (Обозначения см. Г. Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. XIV.) Множество $R \subset G$ будет максимальной и выпуклой цепью в G, если R сверху и снизу не ограниченная цепь и если из соотношений $x, y \in R$, $z \in G$, $x < z < y$ вытекает $z \in R$.

Теорема 1. Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G, $0 \in R$. Тогда R является прямым сомножителем в G.

Теорема 2. Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G. Тогда $R = x + R'$, причем $x \in R'$ и R' — прямой сомножитель G.

Определяется понятие разложения в прямое произведение для структур, в которых существует наименьший элемент; наше определение только формально отличается от определения, данного Биркгофом (цит. книги, гл. II).

Теорема 3. Пусть S_0 — прямой сомножитель в структуре G^+. Тогда S_0 является тоже прямым сомножителем в структурно упорядоченной полугруппе G^+.

Следствие. Если структуру G^+ можно разложить в прямое произведение $G^+ \cong S_0 \times S'$, то l-группа G разложима в прямое произведение $G \cong A \times B$, причем $A^+ = S_0, B^+ = S'$.

По резюме автора

11343. Суммы нормальных эндоморфизмов. Брук (Sums of normal endomorphisms. Bruck R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 674—678 (англ.)

Пусть дана лупа G. Слово $W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется чисто неабелевым, если $W_n(x_1 c_1, x_2 c_2, \ldots, x_n c_n) = W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для любых $x_i \in G$, $c_i \in Z$, где Z — центр лупы G. Слово W_n называется нормализованным, если $W_n = 1$ при замене любого x_i единицей. Эндоморфизм θ лупы G называется нормальным, если $W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\theta = W(x_1\theta, x_2, \ldots, x_n)$ для любых x_i и любых нормализованных чисто неабелевых слов W_n. Сложение и умножение эндоморфизмов лупы G определяются как обычно. Основной результат: пусть $(L, +)$ — аддитивная лупа, порожденная всеми нормальными эндоморфизмами лупы G. Тогда необходимым и достаточным условием того, что $(L, +, \cdot)$ — ассоциативное кольцо, является степенно-ассоциативность лупы G. (Лупа G — степенно-ассоциативна, если любой ее элемент порождает ассоциативную подлупу).

В. Д. Белоусов

11344. Заметка о конечных простых c-неразложимых полугруппах. Тамура (Note on finite simple c-indecomposable semigroups. Tamura Takayuki), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 1, 13—15 (англ.)

Полугруппа S называется в работе простой, если она не содержит собственных идеалов; c-неразложимой, если всякая коммутативная полугруппа, являющаяся гомоморфным образом полугруппы S, содержит точно один элемент. Всякая конечная простая полугруппа S является, как известно, вполне простой полугруппой над некоторой группой G. Если при этом S является полугруппой без нуля, то ее определяющая матрица $P = (p_{\lambda i})$ может быть выбрана так, что $p_{\lambda_1} = p_{i1} = e$ для всех λ, i (e — единица группы G). Пусть H — минимальный нормальный делитель группы G, порожденный всеми элементами $p_{\lambda i}$. Конечная простая полугруппа без нуля c-неразложима тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H c-неразложима. Конечная простая полугруппа с нулем c-неразложима тогда и только тогда, когда она содержит делитель нуля (или, что то же самое, когда хотя бы один элемент $p_{\lambda i}$ ее определяющей матрицы равен нулю). Подсчитано количество всех простых c-неразложимых полугрупп (с нулем и без нуля) всех порядков $n \leqslant 10$. Доказательств статья не содержит.

Л. М. Глускин

11345. Некоторые полугруппы на двумерном шаре. Лестер (Some semigroups on the two-cell. Lester Anne), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 648—655 (англ.)

Пусть S — топологическая полугруппа, гомеоморфная замкнутому кругу; B — граница S. Пусть S удовлетворяет следующим условиям: 1) $xy = x$ для любых $x, y \in B$, 2) S содержит нуль 0, 3) 0 является внутренней точкой S, 4) других идемпотентов, являющихся внутренними точками, S не содержит. Основной результат работы: существует l-полугруппа $T \subset S$ такая, что $S = BT$. Если e, f — любые элементы из B, t, s — произвольные элементы из T, то $(es)(ft) = e(st)$ и из $es = ft$ следует $s = t$ (l-полугруппой называется полугруппа T, гомеоморфная замкнутому отрезку прямой, причем один из концов T является ее нулем, другой — единицей. Описание всех l-полугрупп дано Мостертом и Шилдсом РЖМат, 1958, 1859).

Л. М. Глускин

11346. Заметка о продолжаемых полухарактерах полугрупп. Росс (A note on extending semicharacters on semigroups. Ross Kenneth A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 579—583 (англ.)

Пусть χ — комплексная функция на полугруппе G такая, что $|\chi(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in G$. χ называется полухарактером G, если $\chi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in G$ и $\chi(xy) = \chi(x) \cdot \chi(y)$ для всех $x, y \in G$.

Теорема. Пусть G — коммутативная полугруппа, S — ее подполугруппа, χ — полухарактер S. Для того чтобы χ можно было продолжить до полухарактера полугруппы G, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если $a, b \in S$ и a является делителем b в S, то $|\chi(a)| \geqslant |\chi(b)|$. Л. М. Глускин

11347. Общее решение уравнения транзитивности на некотором множестве с обратимыми операциями. Сад (Solution générale de l'équation de transitivité sur un ensemble quelconque avec division bilatère. Sade Albert), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1959, 45, № 5, 451—455 (франц.)

Пусть множество E является квазигруппой относительно каждой из четырех обратимых операций φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Доказывается, что если квазигруппы $E(\varphi_i)$ связаны тождеством $(x\varphi_1 y)\varphi_2(z\varphi_3 y) = x\varphi_4 z$ для любых $x, y, z \in E$, то квазигруппы $E(\varphi_1)$, $E(\varphi_2)$, $E(\varphi_3)$ и квазигруппа $E(\otimes)$, определяемая соотношением $x \otimes y = z \rightleftarrows z\varphi_3 x = y$, изотопны одной и той же группе $E(\cdot)$.

Примечание референта. 1) Приведенная теорема следует непосредственно из одной теоремы референта (РЖМат, 1958, 5542). 2) Квазигруппа $E(\varphi_3)$ также изотопна группе $E(\cdot)$. В. Д. Белоусов

11348. О конструкции Хоссу. Стейн (On a construction of Hosszú. Stein Sherman K. Publs math., 1959, 6 № 1-2, pp. 10—14) (англ.)

Используя конструкцию Хоссу (реф. 11349), автор строит пример конечной праводистрибутивной, но не леводистрибутивной квазигруппы. Для этого в группе G, не являющейся абелевой и обладающей автоморфизмом ω, оставляющим на месте только единицу (пример Неймана, J. London Math. Soc. 1940, 15, 203—208), задается новая операция $a \circ b = \omega(ab^{-1})\, b$. Кроме того, автор доказывает некоторые утверждения о группах G, обладающих автоморфизмами ω с указанным свойством. Такая группа не может иметь порядок $4k+2$, $\prod_{i=1}^{n} \omega^i(x) = e$, где n — порядок автоморфизма ω, этот порядок является делителем числа $p^k - 1$ для любого простого числа p, входящего в степени k в порядок группы, и др. А. И. Ширшов

11349. Несимметрические средние. Хоссу (Nonsymmetric means. Hosszú Miklós. Publs math., 1959, 6, № 1-2, pp. 1—9) (англ.)

В 1-й части рассматриваются праводистрибутивные квазигруппы $Q(\circ)$, т. е. квазигруппы с тождеством

$$(b \circ c) \circ a = (b \circ a) \circ (c \circ a), \qquad (1)$$

являющиеся изотопами групп. Доказывается, что операция „$\circ$" связана с групповой операцией „$\cdot$" соотношением:

$$a \circ b = \omega(ab^{-1})\, b, \qquad (2)$$

где ω — автоморфизм группы $Q(\cdot)$, оставляющий на месте одну только единицу. Если квазигруппа $Q(\circ)$, кроме того, и леводистрибутивна, то группа $Q(\cdot)$ должна быть абелевой. В этом случае для $Q(\circ)$ выполняется медиальный закон: $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$, а групповая операция $a \cdot b$ определяется равенством $u \circ (a \cdot b) \circ u = (u \circ a) \circ (b \circ u)$, где u — некоторый фиксированный элемент из Q. С помощью формулы ( ) и группы $Q(\cdot)$ строится группоид $Q(\circ)$, в котором верен правый, но не левый дистрибутивный закон. Пример квазигруппы, дистрибутивной только справа, построен Стейном (реф. 11348).

Во 2-й части изучается связь между несимметрическими средними, определенными на множество D всех действительных чисел, и дистрибутивными законами. Функция $m(x, y) = f^{-1}[pf(x) + qf(y)]$, где $p, q \neq 0$, $p + q = 1$ и f^{-1} — обратная функция для функции f, определенной всюду на D, называется несимметрическим средним. При некоторых дополнительных условиях Ацелем (Aczél J., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 392—400) было показано, что несимметрические средние определяются тождеством (1), т. е. $x \circ y = m(x, y)$. Автор, ослабляя условия Ацеля, доказывает, что всякая непрерывная двусторонне дистрибутивная и сократимая операция $x \circ y$ на множестве действительных чисел является несимметрическим средним.

Примечание референта. Часть реферируемой статьи опубликована на русском языке (РЖМат, 1960, 7780). В. Д. Белоусов

11350. О структуре дистрибутивных квазигрупп. Белоусов В. Д., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 235—236

Формулируется ряд результатов, относящихся к теории дистрибутивных квазигрупп, т. е. квазигрупп с тождественными соотношениями: $x(yz) = (xy)(xz)$, $(xy)z = (xz)(yz)$. В частности, утверждается, что любая дистрибутивная квазигруппа S изотопна коммутативной лупе Муфанг, причем фактор-квазигруппа изотопна некоторой фактор-лупе той же лупы, и что соотношение $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ для некоторых $a, b, c, d \in S$ влечет тождественное выполнение соотношения

$$(xy)(zt) = (xz)(yt) \qquad (1)$$

для элементов квазигруппы, порождаемой в S элементами a, b, c, d.

В заключение описывается пример дистрибутивной квазигруппы, а 81 элемент, в которой соотношение (1) выполняется не для всех элементов. Этот пример решает одну из проблем, сформулированных в работе Стейна (реф. 11348). А. И. Ширшов

11351. Компактификация факторпространства Зигеля. II. Сатакэ (Compactification des espaces quotients de Siegel. II. Satake Ichiro), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 13-1—13-10 (франц.)

Часть I. РЖМат, 1960, 6683. Пусть Γ' — некоторая группа, соизмеримая с модулярной группой Зигеля Γ_n. Показывается, что в пространстве H_n^* естественным образом действует группа Γ' и что факторпространство H_n^* / Γ' компактно. И. И. Пятецкий-Шапиро

11352. Обобщение фундаментальной теоремы Пойа из перечислительного комбинаторного анализа. Брёйн (Generalization of Polya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis. Bruijn N. G. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, A62, № 2, 59—69; Indagationes math., 1959, 21, № 2, 59—69 (англ.)

Основным результатом статьи является решение следующей задачи. Пусть D — конечное множество, R — объединение непересекающихся конечных множеств $R_1, R_2, \ldots$. Пусть в множестве D действует некоторая группа подстановок G, являющаяся, вообще говоря, подгруппой группы всех подстановок множества D; в каждом из множеств R_t также действует некоторая группа подстановок H_t. Таким образом, можно говорить что в R действует прямое произведение $H = H_1 \times H_2 \times \ldots$. Отображения f_1, f_2 множества D в множество R называются эквивалентными, если $f_1 g = h f_2$ для некоторых $g \in G$ и $h \in H$. Ищется число попарно неэквивалентных отображений D в R, при которых k_1 элементов множества D переходит в R_1, k_2 элементов множества D переходит в R_2, и т. д. Через $g(j)$ обозначим число циклов длины j в разложении элемента g группы G в произведение независимых циклов, $j = 1, 2, \ldots$. Если N — порядок группы G, то определим $P_G(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} x_1^{g(1)} x_2^{g(2)} \ldots$. Аналогично определяются $P_{H_t}(x_1, x_2, \ldots)$, $t = 1, 2, \ldots$. Обозначим $\exp\{t(z_i w_i^t +$

$+ z_{2t}w_t^{2t} + \ldots)\}$ через $\rho_{l,t}$. Тогда искомое число отображений равно коэффициенту при $w_1^{k_1}w_2^{k_2}\ldots$ в выражении

$$P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots\right)\prod_l P_{H_l}(\rho_{l,1}, \rho_{l,2}, \ldots),$$

вычисленном в точке $z_1 = z_2 = \ldots = 0$. В случае, когда каждая из групп H_l состоит из одной единицы, этот результат переходит в известную теорему Пойа (Polya G., Acta math., 1937, 68, 125—253). Е. Н. Кузьмин

11353 Д. Применение теории групп к исследованию химической связи. Дюкюло (Contribution de la théorie des groupes à l'étude de la liaison chimique. Thèse. Duculot C.), Bull. Inst. agron. et stat. rech. Gembloux, 1959, 27, № 1, 1—136 (франц.)

Излагается применение теоретико-группового метода в теоретической химии (на базе квантовой теории). В первой главе излагается метод Гарнира приведения группы матриц к каноническому виду; при этом матрицы, входящие в группу, записываются после преобразования в виде прямых сумм кронекеровых произведений. Этот метод применяется затем к группам многогранников и некоторым их обобщениям. Во второй главе излагаются некоторые основные понятия волновой теории (понятие об операторе и наблюдаемой величине, вариационный метод, метод возмущений); дается понятие о теоретико-групповом методе в квантовой теории. В третьей главе рассматриваются некоторые типы органических соединений. Для этих соединений вводятся системы симметричных координат, связанных с атомными орбитами. Указывается связь между элементами матриц, связанных с этими координатными системами, и различными физико-химическими величинами (индексы связей Кульсона, междуатомные расстояния, спектральные смещения, энергия резонанса). Четвертая глава посвящена теории направленных валентностей и гибридизации, разработанной Паулингом. Излагается принадлежащее автору обобщение метода Паулинга, основанное на использовании теории групп. При этом определяются характеры представлений, связанных с волновыми функциями атомов. Подробно изучены случаи валентности 5 и валентности 8.

В. К. Туркин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

11354. Простое доказательство основной теоремы теории полей. Кертес (Simple proof of a fundamental theorem of field theory. Kertész A.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 9, 804 (англ.)

Доказана теорема: Если L — расширение поля K, то любые два алгебраически независимых и алгебраически эквивалентных над K подмножества поля L равномощны. Для доказательства, кроме общих теоретико-множественных соображений, используется теорема Штейница о конечном алгебраически независимом множестве. Л. А. Скорняков

11355. Нормирующие системы дивизоров и дзета-функции полей алгебраических функций. III. Лампрехт (Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper. III. Lamprecht Erich), Math. Ann., 1957, **132**, № 5, 373—403 (нем.)

Обозначения и терминологию см. РЖМат, 1960, 1422.

Пусть $A - AF_2$-поле над конечным полем k, (K_1, K_l) — некоторая порождающая пара подполей этого поля, а $B_{1l} = \{\mathfrak{P}_{1j}\}$ — множество соответствующих этой паре простых дивизоров поля A. Обозначим через $Q = \{q(\mathfrak{P}_{1j})\}$ множество простых дивизоров поля классов вычетов $A\mathfrak{P}_{1j}$, определяющих дискретное нормирование этого поля, при котором норма элементов $x \in K\mathfrak{P}_{1j}$ равна 1. Пары $(\mathfrak{P}_{1j}, q(\mathfrak{P}_{1j}))$, где $\mathfrak{P}_{1j} \in B_{1l}$, а $q(\mathfrak{P}_{1j}) \in Q$ называются точками поля A над подполем k, а множество b_{1l} всевозможных точек $(\mathfrak{P}_{1j}, q(\mathfrak{P}_{1j}))$ — системой нормирующих точек, соответствующих паре (K_1, K_l). Каждая точка $(\mathfrak{P}_{1j}, q(\mathfrak{P}_{1j}))$ порождает дискретное нормирование $w_{\mathfrak{P}_{1j}, q}$ поля A, причем оказывается, что элемент $\xi \in A$ значениями всех норм $w_{\mathfrak{P}_{1j}, q(\xi)}$ определяется с точностью до множителя.

Изучается соответствие между точками $(\mathfrak{P}_{1j}, q(\mathfrak{P}_{1j}))$ и парами $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$, где $\mathfrak{P}_1$ — простой дивизор поля K_1, а $\mathfrak{P}_2$ — простой дивизор поля K_l, что позволяет доказать основной результат работы: Нули и полюсы дзета-функции $Z_A(s, K_1, K_l)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 1$ однозначно определяются полем A и не зависят от выбора порождающей пары подполей (K_1, K_l). С. Д. Берман

11356. Приложение обобщенного символа норменного вычета. Масуда (An application of the generalized norm residue symbol. Masuda Katsuhiko), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 245—252 (англ.)

Пусть k — поле алгебраических чисел конечной степени или поле алгебраических функций от одной переменной над конечным полем констант и пусть K/k — конечное сепарабельное нормальное расширение. Через $D_{K|k}$ обозначается композит (в алгебраическом замыкании поля K) всех конечных сепарабельных расширений L/K, обладающих следующими двумя свойствами: 1) для любого нормирования v поля L его пополнение L_v по этому нормированию является композитом поля K_v и некоторого абелевого расширения поля k_v (k_v и K_v — замыкания полей k и K в L_v); 2) расширение L/k нормально и группа Галуа поля L/K содержится в центре группы Галуа поля L/k. Пусть I_K — группа идеальных элементов поля K, а P_k и P_K — группы главных идеальных элементов полей k и K соответственно. Используя символ норменного вычета из теории полей классов, автор определяет естественным образом гомоморфизм $\sigma_{K|k}$ группы $N_{K|k}I_K$ в группу Галуа расширения $D_{K|k}/K$ и доказывает, что этот гомоморфизм индуцирует канонический изоморфизм группы $(P_k \cap N_{K|k}I_K)/N_{K|k}P_K$ на группу Галуа расширения $D_{K|k}/A_kK$, где A_k — максимальное абелево расширение поля k. З. И. Боревич

11357. Родовое поле и родовая группа в полях алгебраических чисел. Фрёлих (The genus field and genus group in finite number fields. Fröhlich A.), Mathematica, 1959, **6**, № 1, 40—46 (англ.)

Изучаются те фактор-группы группы классов идеалов поля алгебраических чисел K, которые могут быть описаны в терминах абсолютно абелевых полей (абелевых над полем рациональных чисел). Группа классов рассматривается по подгруппе тотально положительных главных идеалов. Из результатов этой работы отметим теорему 8: Для любых положительных целых чисел n и q существует нормальное поле алгебраических чисел K с симметрической группой Галуа от n символов, для которого число классов делится на n^q. С. П. Демушкин

11358. О расширениях поля констант в поле алгебраических функций. Неринг (On extensions of the field of constants of an algebraic function field. Nering Evar D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 198—202 (англ.)

Результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1959, 5600) применяются к изучению поведения поля R алгебраических функций от одной переменной при расширениях его поля констант K. Пусть $K(\lambda)$ — алгебраическое расширение поля K. Если g — род поля R, g_1 — род поля $R(\lambda)$ и r — степень поля констант поля $R(\lambda)$ над полем $K(\lambda)$, то $g - 1 = r(g_1 - 1) + \rho$. В случае, когда элемент λ сепарабелен над K, имеем $\rho = 0$ и $r = 1$. Если же λ несепарабелен над K, то ρ делится на

$(p-1)/2$, где p — характеристика поля K. Отсюда вытекает результат Тейта о том, что $g-g_1$ делится на $(p-1)/2$ (Tate J., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 400—406). З. И. Боревич

11359. Линейные системы на G/B. Шевалле (Les systèmes linéaires sur G/B. Chevalley C.), Sémin. C. Chevalley. Ecole norm. supér. 1956—1958, 2. Paris, 1958, 15-1—15-11 (франц.)

Пусть U — алгебраическое многообразие, F_U — поле числовых функций на U (РЖМат, 1960, 7378). Линейной системой на U называется множество $\sum$ положительных дивизоров, состоящее из всех дивизоров вида $(f)+D_0$, где f пробегает ненулевые элементы некоторого конечномерного подпространства $E\subset F_U$, а D_0 — фиксированный дивизор. Если U полно, то $\sum$ отождествляется с проективным пространством, связанным с E. Пусть $U=G/B$, где G — полупростая аффинная алгебраическая группа, B — ее борелевская подгруппа. Пусть $T\subset B$ — максимальный тор в G, N — его нормализатор. Обозначим через σ_0 такой элемент из N, что соответствующий ему оператор из группы Вейля переводит $\mathfrak{C}(B)$ в симметричную относительно начала координат камеру, и положим $x_0=\pi(\sigma_0)$, где $\pi: G\to G/B$ — естественная проекция. Обозначим через α_k $(k=1,\ldots,l)$ фундаментальные корни группы G, а через σ_k — элемент из N, индуцирующий симметрию относительно α_k. Если $x_k=\sigma_k x_0$, то множество $B^U x_k$ имеет коразмерность 1; обозначим через Δ_k его замыкание. Доказывается, что любой дивизор на U линейно эквивалентен единственному дивизору вида $\sum_k e_k\Delta_k$, где e_k — целые числа. Пусть $e=(e_1,\ldots,e_l)$, где e_k — целые неотрицательные числа; положим $D_e=\sum_k e_k\Delta_k$. Тогда система дивизоров sD_e $(s\in G)$ содержится в некоторой линейной системе. Минимальную из этих линейных систем обозначим через $\sum_e$. Проективным представлением группы G называется ее гомоморфизм в группу автоморфизмов проективного пространства над K. Если в этом пространстве не существует непустого линейного подмногообразия, инвариантного относительно G, то представление называется простым. Обозначим через ρ_e естественное представление группы G в $\sum_e$. Доказывается, что ρ_e — простое рациональное проективное представление и что всякое простое рациональное проективное представление ρ группы G эквивалентно одному из представлений ρ_e. Отсюда следует, что в пространстве представления ρ существует единственная точка, инвариантная относительно $\rho(B)$. А. Л. Онищик

11360. Полиномиальные трехмерные коциклы над полями характеристики p. Хитон (Polynomial 3-cocycles over fields of characteristic p. Heaton Robert), Duke Math. J., 1959, 26, № 2, 269—275 (англ.)

Полностью описаны классы когомологий трехмерных полиномиальных коциклов над полем характеристики $p\neq 0$. Оказывается, что любой такой коцикл когомологичен однозначно определенному коциклу, являющемуся суммой и линейной комбинацией многочленов вида трилинейного многочлена $\varphi_p(x,y)^{p^\mu}z^{p^\nu}+\varphi_p(z,y)^{p^\mu}x^{p^\nu}$, где $\varphi_p(x,y)=\dfrac{x^p+y^p-(x+y)^p}{p}$. М. М. Постников

11361. Заметка о размерности модулей и алгебр. Гопалакришнан, Рамабхадран, Сридхаран (A note on the dimension of modules and algebras. Gopalakrishnan N. S., Ramabhadran N., Sridharan R.), J. Indian Math. Soc., 1957, 21, № 3-4, 185—192 (англ.)

Пусть Λ — кольцо и Γ — его подкольцо. Доказываются три следующих достаточных условия, при которых относительная универсальная размерность пары (Λ,Γ) равна либо 0, либо ∞:

I. Все (Λ,Γ)-проективные левые Λ-модули являются также (Λ,Γ)-инъективными.

II. Для всех (Λ,Γ)-проективных левых модулей A $\Lambda\otimes_\Gamma A$ является (Λ,Γ)-инъективным.

III. Определим $\Lambda^0=\mathrm{Hom}_\Gamma(\Lambda,\Gamma)$, как левый Γ- и правый Λ-модуль, следующим образом: для $f\in\Lambda^0$, $\gamma\in\Gamma$, $\lambda\in\Lambda$, $(\gamma f)(\lambda')=\gamma\cdot f(\lambda')$ и $(f\lambda)(\lambda')=f(\lambda\lambda')$ для всех $\lambda'\in\Lambda$.

Тогда Λ и Λ^0 суть правые Λ-изоморфные модули, а $\Lambda\otimes_\Gamma A$ и (Λ^0,A) изоморфны. Далее даются примеры, где выполняется то или иное условие. М. Гриндлингер

11362. К теории идеалов аналитически нормальных локальных колец. Бергер (Zur Idealtheorie analytisch normaler Stellenringe. Berger Robert), J. reine und angew. Math., 1959, 201, № 3-4, 172—177 (нем.)

Локальное кольцо называется аналитически неприводимым, если в его пополнении отсутствуют делители нуля. Доказывается, что в аналитически неприводимом локальном кольце S размерности d любая степень $\mathfrak{m}^t$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ содержит хотя бы один простой идеал $\mathfrak{p}_t$ ранга $d-1$.

Отмечается, что эта теорема позволяет сводить рассмотрение некоторых вопросов, относящихся к кольцу S, к рассмотрению более простых одномерных локальных колец $S/\mathfrak{p}_t$. А. И. Узков

11363. Общая теория алгебраической геометрии над дедекиндовыми областями целостности. II. Сепарабельно порождаемые расширения и регулярные локальные кольца. Нагата (A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains. II. Separably generated extensions and regular local rings. Nagata Masayoshi), Amer. J. Math., 1958, 80, № 2, 382—420 (англ.)

Продолжение предыдущей работы (РЖМат, 1959 9415), посвященное, в основном, теоретико-кольцевым вопросам. Основное кольцо I по-прежнему предполагается дедекиндовой областью целостности, но условие конечности, наложенное в части I, снимается. В гл. III, после изложения подготовительного материала о тензорных произведениях и дифференцированиях в кольцах, рассматриваются сепарабельно порождаемые и регулярные расширения основного кольца I (определения этих понятий по существу совпадают с известными определениями для случая, когда I — поле). Доказывается, что если $\mathfrak{o}$ — аффинное кольцо, сепарабельно порождаемое над основным кольцом I, то для почти всех (кроме конечного числа) простых идеалов $\mathfrak{p}$ из I идеалы $\mathfrak{po}$ будут полупростыми, а кольца вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$, где $\mathfrak{p}'$ — любой простой делитель $\mathfrak{po}$, сепарабельно порождаемыми над $I/\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{o}$ является регулярным расширением I, то для почти всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ из I идеалы $\mathfrak{po}$ будут простыми, а кольца вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{po}$ — регулярными расширениями $I/\mathfrak{p}$. В конце главы дается обобщение одной леммы о регулярных расширениях полей, доказанной Зариским, и рассматриваются тензорные произведения нормальных (т. е. целозамкнутых) колец.

В гл. IV рассматриваются регулярные локальные кольца. Устанавливаются некоторые условия регулярности расширений таких колец. Вводится понятие квадратичного преобразования локального кольца относительно некоторого нормирования и доказывается, что квадратичное преобразование превращает регулярное локальное кольцо в регулярное. Регулярное локальное кольцо $\mathfrak{o}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ называется неразветвленным над основным кольцом I, если либо $\mathfrak{o}$ содержит поле частных I, либо простой элемент кольца

частных $I_{(m\cap I)}$ не содержится в $\mathfrak{m}^2$. Доказывается, что если $\mathfrak{o}$ неразветвлено над I, то для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{o}$ кольцо $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ также неразветвлено над I (доказательство принадлежит Серру). В заключение рассматривается однозначность разложения элементов локальных колец на множители. Центральным результатом является следующая условная теорема: Если однозначность разложения на множители имеет место во всех регулярных локальных кольцах размерности 3, то она имеет место и во всех локальных кольцах любой размерности.

В дополнении 1 доказывается, что если P — простое „место" (т. е. если оно является регулярным локальным кольцом), то любое его кольцо частных по простому идеалу будет также простым местом (другим способом более общий результат установлен ранее Серром). В дополнении 2 доказывается, что результаты гл. II остаются справедливыми и без предположения условия конечности для I, но при условии, что рассматриваемое поле функций сепарабельно порождаемо.

А. И. Узков

11364. Однозначное разложение на множители в регулярных локальных кольцах. **Ауслендер, Буксбаум** (Unique factorization in regular local rings. Auslander Maurice, Buchsbaum D. A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 5, 733—734 (англ.)

Гомологическими методами доказывается, что в любом регулярном локальном кольце размерности $\leqslant 3$ имеет место теорема об однозначном разложении элементов на множители. В связи с результатом, полученным ранее Нагата (РЖМат, 1959, 9415), этим доказана полностью теорема об однозначном разложении на множители во всех регулярных локальных кольцах.

А. И. Узков

11365. Кольца как множества с одной операцией, подчиненной единственному тождеству. **Соркин Ю. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 13

См. РЖМат, 1958, 1880.

11366. Простой пример некоммутативной алгебры. **Уэндт** (A simple example of a noncommutative algebra. Wendt Arnold), Math. Teacher, 1959, **52**, № 7, 534—540 (англ.)

Рассмотрена алгебра матриц второго порядка.

Л. А. Скорняков

11367. Квазинилькольца. **Клейнфельд** (Quasi-nil rings. Kleinfeld Erwin), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 477—479 (англ.)

Доказаны следующие теоремы: 1. Пусть R — первичное кольцо без элементов второго порядка в аддитивной группе, N — ассоциативный центр кольца R, и $r^2 \in N$ для всех $r \in R$. Тогда либо кольцо R ассоциативно, либо $r^2 = 0$ для всех $r \in R$. 2. Пусть R — первичное кольцо без элементов второго порядка в аддитивной группе, N — ассоциативный центр кольца R; $x^2 \in N$ для всех $x \in R$ и для любых элементов x, y, z кольца R выполнено соотношение $(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0$, где (x, y, z) обозначает ассоциатор элементов x, y, z. Тогда кольцо R либо ассоциативно, либо является кольцом Ли. Приводятся примеры, показывающие, что теорема 1 перестает быть верной, если в ее условии отбросить требование первичности или отказаться от условия на аддитивную группу кольца. Е. Н. Кузьмин

11368. Об индексуемых кольцах. **Фам** (Sur les anneaux indexables. Pham Daniel), Ann. scient. École norm. supér., 1958, **75**, № 2, 81—105 (франц.)

Пусть A — кольцо с единицей. Класс (x), соответствующий элементу x из A, состоит из всех элементов вида pxq, где p, q — единицы кольца A. Автор называет A индексуемым, если его классы могут быть линейно упорядочены таким образом, что: 1) $(0) < (x)$ для $x \neq 0$; 2) $(xy) < (x)$ и $(xy) < (y)$; 3) между (0) и любым классом $(x) \neq (1)$ существует лишь конечное число классов. Если эта упорядоченность определяется однозначно, то A называется строго индексуемым кольцом. Простое кольцо с условием минимальности строго индексуемо, класс (x) в нем состоит из всех элементов данного ранга. Автор изучает сначала прямые суммы, идеалы, являющиеся прямыми слагаемыми, и гомоморфные образы индексуемых колец и показывает, что эти кольца снова индексуемы (для прямых сумм — при дополнительном предположении, что в каждом слагаемом имеется лишь конечное число классов). В последней части статьи рассматривается задача о разложении индексуемого кольца в прямую сумму колец с более прозрачным строением. Результаты формулируются слишком сложно, чтобы их можно было здесь воспроизвести. Основным инструментом в этой части является понятие „ядра" — двустороннего идеала N, порожденного классом, который является минимальным при некотором упорядочивании. Для таких идеалов $N^2 = N$ или 0.

A. Rosenberg

Перевод из Math. Revs, 1960, **21**, № 1, 69.

11369. О нулевом радикале. **У Хуи-го, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжань кэсюэ сюэбао**, Acta scient. natur., 1957, № 1, 253—262 (кит.)

11370. Применение двойственности. **Матлис** (Applications of duality. Matlis Eben), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 659—662 (англ.)

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Верхняя грань $\sup.\mathrm{inj.dim}_R A$, где A пробегает все левые R-модули конечной инъективной размерности, называется конечной левой инъективной размерностью кольца R и обозначается $\mathrm{f.l.inj.dim}\ R$. Верхняя грань $\sup.\mathrm{w.dim}_R B$, где B пробегает все правые R-модули конечной слабой размерности, называется конечной правой слабой размерностью кольца R и обозначается $\mathrm{f.r.w.dim}\ R$. В общем случае $\mathrm{f.r.w.dim}\ R \leqslant \mathrm{f.l.inj.dim}\ R$. В случае же, когда кольцо R нетерово слева, неравенство переходит в равенство. При доказательстве этих утверждений используются гомоморфизмы двойственности (2) и (4) из § 5, гл. VI, книги Картана и Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427), а также следующая лемма: Для левого R-модуля A соотношение $\mathrm{inj.dim}_R A < n$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, A) = 0$ для каждого левого идеала I кольца R. В заключение приводится более простое доказательство теоремы Капланского о том, что область целостности R тогда и только тогда является прюферовым кольцом, когда периодическая часть произвольного R-модуля с конечным числом образующих выделяется прямым слагаемым.

Е. Г. Шульгейфер

11371. К теории неполупростых колец с условием минимальности. **Купиш** (Beiträge zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung. Kupisch Herbert), J. reine und angew. Math., 1959, **201**, № 1-2, 100—112 (нем.)

Пусть R — кольцо с условием минимальности, N — радикал кольца R, а $n = g(R)$ — число неизоморфных идеалов в вполне неприводимом разложении R на ненильпотентные односторонние идеалы Re_t (соответственно $e_t R$) с примитивными ортогональными идемпотентами e_t. Пусть V — левосторонний R-модуль. Через $d = d(V)$ обозначим длину верхнего $0 = V^{(d)} \subset \ldots \subset V^{(1)} \subset V^{(0)} = V$, $V^{(m)} = N^m V$ и нижнего $0 = V_{(0)} \subset V_{(1)} \subset \ldots \subset V_{(d)} = V$, $V_{(m)} = \{v \in V,\ N_v^m = 0\}$ рядов Леви (Loewy) модуля V, а через $m_{C_t}(V)$ (соответственно $_m C_t(V)$) обозначим число неприводимых составляющих $V^{(m-1)}/V^{(m)}$ (соответственно $V_{(m)}/V_{(m-1)}$) изоморфных Re_t/Ne_t. Положим $m_{C_{tj}} = m_{C_t}(Re_j)$ и $_m C_{tj} = {}_m C_t(Re_j)$.

Доказывается, что если для всякого двустороннего идеала A кольца R выполнено условие $l(A) = r(A)$, где $l(A)$ — левосторонний, а $r(A)$ — правосторонний аннуляторы A в R, то из $m c_{ij} \neq 0$ вытекает $m c_{lj} \neq 0$. Если же $l(r(N^m)) = N^m$, то имеет место и обратное.

Пусть теперь R алгебра над алгебраическим замкнутым полем K, обладающая тем свойством, что всякий идеал Re_i и всякий идеал $e_i R$ содержит только один минимальный подидеал. Тогда $m c_{ij} \leqslant m c_{\varphi(j)i}$ и $m c_{ij} \leqslant m c_{i\psi(i)}$, причем минимальный идеал e_i в Re_i изоморфен $Re_{\varphi(i)}/Ne_{\varphi(i)}$, а минимальный идеал r_i в $e_i R$ изоморфен $e_{\psi(i)}R/e_{\psi(i)}N$. Отсюда легко получаются известные соотношения между инвариантами Картана.

Кольцо R называется однорядным, если всякий левосторонний идеал Re_i и всякий правосторонний идеал $e_i R$ обладает только одним композиционным рядом. Доказывается, что всякую неразложимую в прямую сумму двусторонних идеалов, однорядную алгебру R над алгебраически замкнутым полем K можно однозначно с точностью до изоморфизма охарактеризовать при помощи следующих инвариантов: $d_i = d(Re_i)$, $n = g(R)$, $f_i = \dim_K (Re_i/Ne_i)$.

A. Suliński

11372. Заметка об обобщенных алгебрах Витта. Р и (Note on generalized Witt algebras. R e e R i m h a k), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 3, 345—352 (англ.)

Пусть $\mathfrak{L}$ — обобщенная алгебра Витта с базисом $\{e(\sigma, i) \mid \sigma \in \mathfrak{G}, i \in I\}$, где $\mathfrak{G}$ — элементарная абелева группа порядка p^n и $I = \{1, \ldots, m\}$ (РЖМат, 1958, 1036). Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{T}$ — алгебра всех дифференцирований и соответственно алгебра внутренних дифференцирований алгебры $\mathfrak{L}$. Автор находит общий вид дифференцирований из $\mathfrak{D}$ и доказывает, что алгебра $\mathfrak{D}/\mathfrak{T}$ внешних дифференцирований алгебры $\mathfrak{L}$ абелева, размерности $n - m$. Предполагается, что основное поле K бесконечно и имеет характеристику $p > 2$. В случае $m = n$ получается результат Джекобсона (Jacobson N., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **42**). Во второй части статьи автор определяет и рассматривает обобщенные ортогональные системы дифференцирований $(D_1, \ldots, D_m)$ ассоциативной коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной размерности над алгебраически замкнутым полем K. Обобщенная ортогональная система получается путем устранения одного из трех условий, которыми определяется ортогональная система, введенная автором в цитированной выше работе. Доказывается ряд теорем и следствий из них, устанавливающих связи между ортогональными и обобщенными ортогональными системами и усиливающих некоторые результаты автора и Дженингса (РЖМат, 1958, 1036; 1957, 8482).

Замеченная опечатка. Соотношение $0 = e(0, i) = \sum_{\tau, j} a_{\tau, j}\, \tau(i)\, e(\tau, j)$ на стр. 348 должно иметь вид $0 = \delta(e(0, i)) = \sum_{\tau, j} a_{\tau, j}\, \tau(i)\, e(\tau, j)$.

А. И. Кострикин

11373. Исчисление секвенций и таблицы оценок для общих алгебраических классов колец булевых с операторами. Г и й о м (Calculs de conséquences et tableaux d'épreuve pour les classes algébriques générales d'anneaux booléiens à opérateurs. G u i l l a u m e M a r c e l), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 19, 1542—1544 (франц.)

Под булевым кольцом с операторами (б. к. о.) понимается булева алгебра с операторами (Jonsson B., Tarski A., Amer. J. Math., 1951, **73**, 891; 1952, **74**, 127). Типом такого кольца называется последовательность $\{m_n\}$, где m_n — мощность множества n-членных небулевых операторов кольца. Пусть K — класс б. к. о. фиксированного типа. Булевыми (соответственно алгебраическими) функциями на K, по определению, будут: 1) все функции $f^{(n)}$ (значение $f^{(n)}$ на $A \in K$ равно ее $(n+1)$-му аргументу); 2) для любого $m \in N$ все функции вида $f(h_0, \ldots, h_{m-1})$, если $h_0, \ldots, h_{m-1}$ булевы (соответственно алгебраические), а f — один из m-членных булевых (соответственно булевых или нет) операторов колец класса K. Множество $\mathfrak{A}$ алгебраических функций на K, снабженное естественным образом операторами, становится некоторым б. к. о. класса K. Пусть P и Q — множества элементов б. к. о. и $P \cap Q$ не более чем конечно. Тогда секвенция $P \vdash Q$ называется точной, если $\prod_{h \in P} h \leqslant \sum_{k \in Q} k$ ($x \leqslant y$ понимается как $x = x \cdot y$, $\prod_{h \in \varnothing} h = 1$, $\sum_{k \in \varnothing} k = 0$). Для б. к. о. фиксированного типа, именно, 0, 0, 2, 1, 0, ..., строится исчисление секвенций, основанное на одиннадцати правилах, позволяющее решить вопрос, будет ли произвольная секвенция точной или нет. Автор указывает, что его рассуждения обобщаются на случай б. к. о. любого типа. В связи с исчислением секвенций рассматривается вопрос о построении таблиц оценок (в статье: проб), аналогичных семантическим таблицам в исчислении высказываний. Изложение связано с ранними работами автора (РЖМат, 1959, 10758 и 10759).

Д. А. Захаров

11374. Алгебры диагональных матриц и булевы алгебры, связанные с классами вычетов по mod n. Ф а д и н и (Algebre di matrici diagonali ed algebre di Boole collegate a particolari classi modulo n. F a d i n i A n g e l o. Ricerca, 1955, **6**, № 2, 20—26) (итал.)

Если $n = p_1 \ldots p_r$ — произведение различных простых чисел, то кольцо вычетов по модулю n образует булеву алгебру с упорядочением по делимости. Даны приложения к элементарной теории чисел.

G. Birkhoff

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 284.

11375. Характеристически нильпотентные алгебры Ли. Леджер, Того (Characteristically nilpotent Lie algebras. L e g e r G., T ô g ô S.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 4, 623—628 (англ.)

Пусть L — алгебра Ли, $D(L)$ — алгебра всех ее дифференцирований. Если $L^{[1]} = D(L)\,L, \ldots, L^{[k+1]} = D(L)L^{[k]}, \ldots$ и $L^{[n]} = (0)$ для некоторого n, то алгебра L называется характеристически нильпотентной (х. н.). Х. н. алгебры Ли, образующие подкласс нильпотентных алгебр, были впервые рассмотрены в работе Дикмье и Листера (РЖМат, 1958, 4551). В реферируемой статье они подвергаются более систематическому изучению. Доказано, что алгебра Ли L над произвольным полем F является х. н. в том и только в том случае, если алгебра ее дифференцирований $D(L)$ нильпотентна, а размерность L отлична от единицы. В случае нулевой характеристики поля F это утверждение равносильно тому, что алгебра L не имеет отличных от нуля полупростых дифференцирований. Алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем F нулевой характеристики х. н. в том и только в том случае, когда все ее полупростые автоморфизмы имеют конечный порядок. Отмечается, что требование алгебраической замкнутости поля F в последнем утверждении, возможно, является излишним. Далее авторы доказывают, что алгебра Ли L над полем характеристики нуль разрешима, если ее картановская подалгебра х. н. Алгебра Ли L над произвольным полем F х. н. только при условии х. н. всех ее прямых слагаемых. В конце статьи обсуждается поставленный Диксмье и Листером вопрос о том, при каких условиях х.н. алгебра Ли L представима в виде $L = [H, H]$, где H — некоторая другая алгебра Ли. В этом направлении получены лишь некоторые необходимые условия.

А. И. Кострикин

11376. Разрешимые стандартные алгебры Ли. К а м е н с к а я М. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 58—71

Понятие стандартной алгебры Ли было введено референтом; им же исследовано их строение и подробно изучены стандартные нуль-алгебры (РЖМат, 1956, 4380; 1958, 5556; 1960, 3857). В реферируемой работе найден центр Z_B произвольной разрешимой стандартной алгебры Ли B, не являющейся нуль-алгеброй, а также ее коммутант $[B^2]$ и алгебра дифференцирований A_B. При этом исследовании оказалось необходимым разбить разрешимые стандартные алгебры Ли на два рода; результаты зависят также и от того, принадлежит ли единичный аффинор алгебре B или не принадлежит. Г. Б. Гуревич

11377. Исследование об алгебраических расширениях неархимедовых линейно упорядоченных полей. Никодим (A study in algebraic extensions of linearly ordered non archimedean fields. Nikodým Otton Martin), J. math. pures et appl., 1959, **38**, № 5, 61—96 (англ.)

Рассматривается поле F^* дробно-степенных рядов над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Для получения поля F^* можно взять поле $F(x)'$ степенных рядов от x над F. Очевидно, что при натуральных n и m $F(x)' \subset F\left(\frac{1}{x^n}\right)'$, где $\left(\frac{1}{x^n}\right)^n = x$ и $F\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ естественным образом вкладывается в $F\left(\frac{1}{x^{mn}}\right)'$. Поле F^* является объединением всех $F\left(\frac{1}{x^n}\right)$. Работа посвящена новому доказательству известной теоремы: Поле F^* алгебраически замкнуто (Уокер, Алгебраические кривые, М., Изд-во ин. лит., 195 , 116—1 0). Автор уделяет большое внимание точному определению и обоснованию свойств полей $F(x)'$ и F^*. Я. В. Хион

11378. Простота неокольца преобразований. Берман, Силверман (Simplicity of near-rings of transformations. Berman Gerald, Silverman Robert J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 456—459 (англ.)

Рассматривается неокольцо F (почти кольцо в смысле РЖМат, 1954, 5475) всех преобразований произвольной группы g и его поднеокольцо F_0, состоящее из всех преобразований, коммутирующих с нулем. Поднеокольцо Q называется двусторонне инвариантным, если $FQ \subset Q$ и $Qf \subset Q$. Если $f \in F$, то мощность множества gf называется рангом преобразования f (в обозначениях $R(f)$). Доказывается, что все двусторонне инвариантные поднеокольца неокольца F исчерпываются следующими $F_z = \{f \in F / R(f) = 1\}$, $F_f = \{f \in F / R(f) < \aleph_0\}$ и $F_{\aleph_k} = \{f \in F / R(f) = 1\}$, где $\aleph_k$ не превосходит мощности группы g. Двусторонне инвариантными поднеокольцами неокольца F_0 являются 0 и $P \cap F_0$, где P — двусторонне инвариантное поднеокольцо неокольца F. Устанавливается, что, какова бы ни была группа g, F и F_0 не содержат идеалов (нормальный делитель Q аддитивной группы неокольца F называется идеалом, если $FQ \subset Q$ и $(a+q)b - ab \in Q$ для всех $a, b \in P$, $q \in Q$.

Л. А. Скорняков, Г. М. Цукерман

11379. Отношение порядка. Пиккерт (Ordnungsrelationen. Pickert G.), Math. und naturwiss. Unterr., 1959, **12**, № 4, 164—170 (нем.)

Сокращенное изложение доклада, прочитанного на собрании местного отделения немецкого общества содействия обучению математическим и естественным наукам в Любеке. Даются определения частично упорядоченного множества и структуры, иллюстрируемые примерами. Л. А. Скорняков

11380. Дедекиндовы структуры с дополнениями, получаемые из неассоциативных колец. Амэмия, Гальперин (Complemented modular lattices derived from non-associative rings. Amemiya Ichiro, Halperin Israel), Acta scient. math., 1959, **20**, № 2-3, 181—201 (англ.)

Обозначим через A совокупность таких элементов λ кольца R, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b$, $a(\lambda b) = (a\lambda)b$, $a(b\lambda) = (ab)\lambda$ для любых $a, b \in R$. Систему множеств вида $R\varepsilon$, где ε — идемпотент, обозначим через $L(R)$. Пусть S_n — множество квадратных матриц (a_{ij}) порядка n, где $a_{ij} \in R$, $a_{ij} = 0$ при $i < j$, $a_{ii} \in A$. Кольцо R называется идемпотент-ассоциативным, если $(ef)g = e(fg)$ для любых идемпотентов $e, f, g \in R$. Если для каждого $a \in R$ существуют b и b' такие, что $a(ba) = a$, $(ab')a = a$, ba и ab' — идемпотенты, то кольцо называется регулярным. Назовем кольцо R полурегулярным, если для всякого множества $\Lambda \subset R$ каждая из систем $\{R\varepsilon;\ R\varepsilon \supset \Lambda\}$ и $\{\varepsilon R;\ \varepsilon R \supset \Lambda\}$ содержит наименьший элемент.

Доказано: 1) Если R идемпотент-ассоциативно и полурегулярно, то $L(R)$ — структура с нулем и с относительными дополнениями. Эта структура изоморфна $L(S_1)$. Она содержит единицу, если R содержит правую единицу, и дедекиндова, если R регулярно;) Если R идемпотент-ассоциативно и регулярно, то $L(S_2)$ — дедекиндова структура с нулем и с относительными дополнениями. Если в R существует правая единица, то $L(S_2)$ обладает однородным базисом ранга (говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_n$ образуют однородный базис ранга n, если они независимы, попарно перспективны и в сумме дают единицу); 5) Если R — идемпотент-ассоциативно и для любого $a \in R$ множество Ra [aR] совпадает с главным левым [правым] идеалом, порожденным элементом a, и, кроме того, существуют $b, b' \in R$ и идемпотенты $e, f \in R$ такие, что $ae = a$, $ba = e$, $fa = a$, $ab' = f$, и, каково бы ни было $c \in R$, из $ac = 0$ вытекает $ec = 0$, а из $ca = 0$ — $cf = 0$, то $L(S_3)$ — дедекиндова структура с нулем и с относительными дополнениями. Если в R существует правая единица, то в $L(S_3)$ существует однородный базис ранга 3; 4) Если R обладает правой единицей, идемпотент-ассоциативно, регулярно и альтернативно, то структуру $L(S_3)$ можно координатизировать методом, изложенным в РЖМат, 1959, 4512, причем возникает первоначальное кольцо R.

Л. А. Скорняков

11381. Теорема о дедекиндовых структурах. Уцуми (On a theorem on modular lattices. Utumi Yuzo), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 1, 16—21 (англ.)

Для полной непрерывной снизу дедекиндовой структуры доказывается эквивалентность следующих условий: A. L не содержит такой бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ ненулевых элементов, что для всех $i > 1$ существует элемент b_i, проективный a_i и удовлетворяющий условиям $a_{i-1} \geqslant a_i + b_i$, $a_i b_i = 0$; M. L не содержит бесконечного независимого множества попарно перспективных элементов; F. L не содержит такой независимой последовательности ненулевых элементов $a_1, a_2, \ldots$, что a_{i+1} проективен $b_{i+1} \leqslant a_i$. Стсюда выводятся теоретико-кольцевые следствия. Если R — полупростое кольцо с 1, инъективное как левый R-модуль, то R регулярно. Кроме того, устанавливается эквивалентность следующих условий: 1) индексы нильпотентных элементов кольца R ограничены в совокупности; 2) если P — примитивный идеал кольца R, то R/P — простое кольцо с условием минимальности; 3) R — P-разрешимо (РЖМат, 1956, 8657). Для полупростого I-кольца (РЖМат, 1956, 8657) условие 1) эквивалентно каждому из следующих: 4) не существует такой бесконечной последовательности ненулевых левых идеалов $I_1, I_2, \ldots$, что $I_{i-1} \supseteq I_{i+1} + I'_{i+1}$, где I'_{i+1} — левый идеал, изоморфный I_{i+1}; 5) не существует такой бесконечной последовательности ненуле-

вых левых идеалов $I_1, I_2, \ldots$, что сумма $\sum I_i$ является прямой, а I_{i+1} изоморфно идеалу $I'_{i+1} \subset I_i$.

Л. А. Скорняков

11382. Топология промежуточности в дистрибутивной структуре. Мацусима (Between-topology on a distributive lattice. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 5, 221—225 (англ.)

Если за псевдобазис системы замкнутых множеств выорать все $B(a, b)$ (РЖМат, 1958, 6546), то на структуре возникает топология, называемая B-топологией. Аналогично определяется B^*-топология. Пусть L — дистрибутивная структура с 0 и 1. Тогда: 1) B-топология на L совпадает с интервальной; 2) если $L = B(u, v)$, $B^*(u, v) = v$, $B^*(v, u) = u$, u и v не сравнимы и выполнено условие A: при любых $x, y \in L$ из $c, d \in B(u, y)$ вытекает, что как cx и dx, так и cy и dy сравнимы, то операция $x \circ y = (a + x)(b + y)$ непрерывна в интервальной топологии; 3) если в L имеет место условие A, то указано дополнительное условие, обеспечивающее хаусдорфовость интервальной топологии на L.

Л. А. Скорняков

11383. Представление дедекиндовых структур и алгебр отношений. Йоунссон (Representation of modular lattices and of relation algebras. Jónsson Bjarni), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 3, 449—464 (англ.)

Под алгеброй отношений $(\mathfrak{A}, 1, \cap, ^{-1}, I)$, определенных на множестве U, понимается множество бинарных отношений, замкнутое относительно теоретико-множественного пересечения $\cap$ и операций $|$ и $^{-1}$ (умножение и переход к обратному в смысле теории отношений), которое содержит такое отношение I, что $R \mid I = R$ для всех $R \in \mathfrak{A}$.

Основной результат: Алгебра $(A, ;, ,, ^{\vee}, 1)$ изоморфна алгебре отношений тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in A$ имеет место: I. $a.(b.c) = (a.b).c$; II. $a.b = b.a$; III. $a.a = a$; IV. $a; (b; c) = (a; b); c$; V. $a, 1 = a$; VI. $(a.b); c \leqslant b; c$; VII. $a^{\vee\vee} = a$; VIII. $(a; b)^{\vee} = b^{\vee}; a^{\vee}$; IX. $(a.b)^{\vee} = a^{\vee}.b^{\vee}$, и, кроме того, выполнено условие Г: если n — натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \in A$, для каждого $k \leqslant n$ $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ — натуральные числа, не превосходящие k, $b_{101} = a_0$, $b_{110} = a_0^{\vee}$, $b_{110} = b_{111} = 1$, $b_{k+1ij} = \prod_{p<k} (b_{kip}; b_{kpj})$, $b_{k+1k+1} = (b_{k+1i\varphi(k)}; a_{2k-1})(b_{k+1i\varphi(k)}; a_{2k}^{\vee})$, $b_{k+1k+1j} = b_{k+1jk+1}^{\vee}$, $b_{k+1k+1k+1} = 1$ и $b_{k\varphi(k)\psi(k)} \leqslant a_{2k-1}; a_{2k}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, то $a_0 \leqslant b_{n+101}$. Находятся также условия, необходимые и достаточные для того, чтобы структура была изоморфна структуре коммутативных отношений эквивалентности. Эти условия сходны с условием Г. Конец статьи посвящен так называемой слабой представимости алгебры отношений в смысле Йоунссона — Тарского (Jonsson B., Tarsky A., Amer. J. Math., 1952, **74**, 127—16). Л. А. Скорняков

11384. К теории некоммутативных структур. Йордан (Beiträge zur Theorie der Schrägverbände. Jordan Pascual. Abh. Math.-Nat. Kl., Akad Wiss. Mainz, 1956, 27—42) (нем.)

Продолжается исследование рассмотренных ранее конструкций и примеров некоммутативных структур с особым вниманием к модулярности и дистрибутивности. В частности, Йордан и Витт (РЖМат, 1955, 7140) указали метод построения некоммутативной структуры B, исходя из данной структуры A. Теперь эта конструкция применяется к случаю, когда A также некоммутативна, и исследуется сохранение в B свойств, имевшихся в A. Новые темы: идемпотентные функции на некоммутативной структуре, некоммутативные структуры S, в которых каждому $a \in S$ поставлен в соответствие $\bar{a} \in S$, причем $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{a \wedge b} = \bar{b} \vee \bar{a}$, а также различные формы дистрибутивного закона. P. M. Whitman

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 9, 713.

11385. Замечания к теории мультиструктур. Бенадо (Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände. Benado Mihail), Math. Nachr., 1959, **20**, № 1-2, 1—16 (нем.)

Все определения см. РЖМат, 1958, 6547. Результаты: 1. Если на направленной мультиструктуре M определена действительная функция $v(x)$, причем из $x < y$ следует $v(x) < v(y)$, а для любых $a, b \in M$ существует такой $d_0 \in a \vee b$, что $v(d_0) \leqslant v(d)$ для всех $d \in a \vee b$ и $v(a) + v(b) = v(d_0) + v(m)$ для всех $m \in a \wedge b$, то условие $\rho(a, b) = v(d_0) - v(m)$ превращает M в метрическое пространство; 2. Дистрибутивная мультиструктура, удовлетворяющая обоим условиям обрыва цепей, конечна; 3. Дистрибутивная мультиструктура конечной длины с дополнениями является конечной булевой алгеброй. Л. А. Скорняков

11386. Проективные плоскости порядка девять. Холл, Свифт, Килгров (On projective planes of order nine. Hall Marshall, Jr, Swift J. Dean, Killgrove Raymond), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 68, 233—246 (англ.)

Существуют четыре известных проективных плоскости порядка 9: дезаргова плоскость, плоскость, координатизируемая веблен-веддербарновым телом, не являющимся полем, дуальная ей и автодуальная недезаргова плоскость. Известно, что каждая из этих плоскостей имеет в подходящем тернаре элементарное абелево сложение. Естественно спросить, существуют или нет другие плоскости с этим свойством. Исследование было проведено частично вручную, частично на машине. Результат исследования таков, что никаких других плоскостей с этим свойством нет, но все три недезарговы плоскости допускают более одного способа координатизации, при котором сложение оказывается элементарным абелевым. Из введения авторов.

11387. Общее описание двух проективных плоскостей порядка 9. Пиккерт (Gemeinsame Kennzeichnung zweier projektiver Ebenen der Ordnung 9. Pickert Günter), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 69—74 (нем.)

Исправляя ошибку в работе Острома (РЖМат, 1958, 5083; 1960, 775), автор доказывает, что проективной плоскостью над 9-элементным почти телом и дуальной ей исчерпываются недезарговы плоскости, в которых существуют две различные точки P, Q, не инцидентные прямым p, q, причем $p \cap q \notin PQ$, а плоскость как (P, p)-, так и (Q, q)-транзитивна. Л. А. Скорняков

11388. Проблема слов для свободных алгебраических систем. Такэути, Сугаку, 1957, 8, № 4, 218—229 (японск.)

Обзорная статья, касающаяся проблемы тождества свободных алгебраических систем, включая полугруппы, полугруппы с сокращением и группы. Также рассматривается проблема вложения частичных $\mathfrak{A}$-алгебр в $\mathfrak{A}$-алгебры. Y. Kawada

Перевод из Math. Revs., 1959, **20**, 144.

11389 К. Элементы математики. I. Основные структуры анализа. 23. Книга 2. Алгебра. Глава 8. Полупростые модули и кольца. Бурбаки (Eléments de mathématiques. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre 2. Algèbre. Chap. 8. Modules et anneaux semi-simples. Bourbaki Nicolas. (Actual. scient. et industr., № 1261). Paris, Hermann, 1958, 191 p., 2000 fr.) Bibliogr. France, 1959, **148**, № 9, 218 (франц.)

Выпуск трактата Бурбаки, посвященный теории полупростых унитарных модулей над кольцами с единицей, теории полупростых колец и, в частности, теории полупростых алгебр над коммутативными полями. Иссле-

дование проводится в основном для модулей (колец, алгебр) с условием минимальности или с условием максимальности для подмодулей (левых идеалов). Строится структурная теория полупростых и простых колец и модулей. Интересно и полезно очень полное изложение поведения модулей, колец и алгебр при тензорном умножении. В качестве приложений общей теории в выпуске помещены следующие разделы: тензорные произведения расширений полей, теория полупростых семейств эндоморфизмов векторных пространств, группа Брауэра. Небольшое дополнение содержит некоторые обобщения изложенной теории на случай колец и алгебр без единицы. Как и в других выпусках трактата Бурбаки, большую ценность представляют многочисленные упражнения; некоторые из них могут быть полезными темами для дальнейших исследований. Л. А. Калужнин

11390 К. Введение в теорию структур. Сас (Bevezetés a hálóelméletbe. Szász Gábor. Budapest, Akad. Kiado, 1959, 225 l., 60 Ft.) (венг.)

Цель книги — дать подробное изложение теории структур и указать ее связь с другими частями математики. В гл. I рассматриваются основные понятия теории частично упорядоченных множеств. В гл. II дается аксиоматическое определение структуры и исследуется вопрос о независимости аксиом. Здесь же вводятся основные понятия теории структур: подструктура, атом, дополнение, относительное дополнение, полудополнение и изоморфизм структур. Гл. III — теория полных структур. Дается ряд достаточных условий полноты структуры. В частности, доказывается, что каждая структура изоморфна некоторой подструктуре полной структуры.

Теория дедекиндовых и дистрибутивных структур изложена в гл. IV. Дается характеристика дедекиндовых и дистрибутивных структур, основывающаяся на свойствах их подструктур. Изучаются дистрибутивные подструктуры дедекиндовой структуры. Приводятся критерии Ионсона и Неймана дистрибутивности подструктуры, дедекиндовой структуры. Излагается теорема Дедекинда об изоморфизме дедекиндовых структур. Дальше изучаются неразложимые элементы дедекиндовой структуры и доказывается теорема Куроша — Орэ о числе компонент в несократимых разложениях произвольного элемента дедекиндовых структур. В гл. V изучаются некоторые специальные подклассы дедекиндовых структур: дедекиндовы структуры локально конечной длины, метрические структуры, дедекиндовы структуры с дополнением. В конце главы рассматриваются структуры проективных пространств. Теория булевых алгебр рассматривается в гл. VI. Доказывается теорема Неймана о бесконечной дистрибутивности полных булевых алгебр. Изучаются также булевы кольца и аддитивные нормы булевой алгебры. Гл. VII посвящена теории полудедекиндовых структур. Автор называет структуру L полудедекиндовой, если для каждой тройки элементов a, b, x таких, что a несравнимо с b и $a \cap b < x < a$, найдется такой элемент t, что $a \cap b < t \leqslant b$ и $(x \cup t) \cap a = x$. Структура L называется биркгофовой, если она имеет конечную длину и из того, что v покрывает $u \cap v$, следует, что $v \cup u$ покрывает u. Биркгоф (Теория структур, Изд-во ин. лит., 1952) под полудедекиндовыми структурами понимает биркгофские структуры. Рассматривается ряд критериев того, что структура — биркгофова. Структура конечной длины является полудедекиндовой тогда и только тогда, когда она биркгофова. Доказывается, что у полудедекиндовой структуры каждая выпуклая подструктура — полудедекиндова. В конце главы изучается ряд результатов о полудедекиндовых структурах с дополнениями, принадлежащих автору. В частности, доказывается, что объединение всех атомов полудедекиндовой структуры конечной длины совпадает с наибольшим элементом структуры. Теория идеалов излагается в гл. VIII. Исследуется, когда каждый идеал структуры является главным. Изучается структура всех идеалов структуры. Доказывается, что структура всех идеалов структуры L дедекиндова (дистрибутивна) тогда и только тогда, если L — дедекиндова (дистрибутивна) структура. Даются критерии дистрибутивности структур на языке простых идеалов. В последней главе рассматривается отношение конгруэнтности на структуре и структура отношений конгруэнтности. Доказывается, что эта структура дистрибутивна. Изучается зависимость между идеалами структуры и отношениями конгруэнтности на структуре. Оказывается, что когда отношения конгруэнтности на структуре определяются идеалами, то каждый идеал определяет точно одно отношение конгруэнтности. Этим решается 73-я проблема Биркгофа. В конце главы дается определение прямой и подпрямой суммы структур и исследуются свойства прямых и подпрямых разложений структуры. А. А. Бовди

11391 Д. Свойства неприводимости в модулях, мультипликативная теория, S-нормальность. Герендон (Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité. Guérindon Jean. — Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1957. Paris, Gauthier—Villars, 1958, 63 p.) (франц.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

11392. О построении общей теории логических сетей. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. В сб.: Логические исследования. М., АН СССР, 1959, 352—378

Рассматриваются логические сети, т. е. идеализированные схемы, которые адэкватным образом описывают структуру и работу физических устройств, предназначенных для синхронной переработки дискретной информации. Авторы выделяют следующие разделы общей теории логических сетей: 1) эффективное преобразование информации, 2) кодирование информации и алгебра логики, 3) логические операторы физических элементов, 4) организация логической сети, 5) вопросы анализа и синтеза логической сети. В соответствии с этим вся статья разделена на четыре части.

В I части исследуются операторы, перерабатывающие последовательности $x(t)$ букв конечного входного алфавита в последовательности $z(t)$ букв конечного выходного алфавита. Информация, которая может быть подана на вход устройства, изображается в виде разветвляющегося дерева, μ-ярусного, если перерабатываются слова заданной конечной длины μ, и бесконечноярусного, если перерабатывается бесконечная последовательность букв. Число ребер, исходящих из каждой узловой точки дерева, равно числу букв входного алфавита. Если ребрам этого дерева каким-то образом приписать буквы выходного алфавита, то каждому входному слову, изображенному в виде пути, будет отвечать выходное слово, составленное из выходных букв, приписанных ребрам, образующим этот путь. Совокупность возможных путей, исходящих из любой узловой точки дерева, образует ветвь этого узла. Оператор называется ограниченно-детерминированным (о.-д. оператор), если он может быть задан посредством дерева с конечным числом попарно различимых ветвей (имеются в виду операторы, перерабатывающие бесконечные последовательности букв). Весом k о.-д. оператора называется максимальное число попарно различимых ветвей в его дереве. Показывается что всякий о.-д. оператор физически реализуем. Сформулировано без доказательства шесть теорем

Теорема 2. Если о.-д. оператор имеет вес k, то он перерабатывает всякую периодическую последователь-

ность в периодическую же с периодом, увеличенным не более чем в k раз.

Во II части изучается геометрия логической сети, приводятся принципы организации логической сети из задерживающих элементов и логического элемента Шеффера.

Теорема 4. Всякий оператор, реализуемый логической сетью, включающей v задерживающих элементов, является о.-д. оператором с весом $k \geqslant 2^v$.

Теорема 5. Всякий о.-д. оператор с весом k может быть реализован логической сетью, включающей v элементов задержки и не может быть реализован логической сетью с меньшим числом элементов задержки, причем v—наименьшее целое такое, что $v \geqslant \log_2 k$.

Для задания о.-д. операторов авторы используют уравнения вида: $z(t)=\varphi[x(t), q(t-1)]$, $q(t)=\psi[x(t), q(t-1)]$, называемые каноническими. Двоичное представление информации позволяет применить хорошо разработанный аппарат алгебры логики для упрощения канонических уравнений о.-д. оператора.

В III части рассматривается вопрос о значении выбора кода, об учете неиспользованных кодовых групп и удачном выборе типовых элементов.

В IV части разбираются вопросы синтеза и упрощения логической сети. Если рассматривать процесс переработки слов данной фиксированной длины μ, то самый благоприятный случай с точки зрения минимизации числа элементов памяти возникает при чисто истинностном операторе, когда ничего не нужно запоминать, самый неблагоприятный случай в этом смысле возникает при необходимости запоминания всего входного слова. В этом последнем случае, если входной алфавит включает m букв, т. е. ширина входного канала задержки $\log_2 m$, потребуется объем памяти, равный v единиц памяти, v — наименьшее целое такое, что $v \geqslant \log_2 m$. Это означает, что необходимая удельная память на единицу входной информации равна единице.

Теорема 6. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в классе всех о.-д. операторов, перерабатывающих слова длиной μ, доля тех, которые перерабатывают слова длиною μ с удельной памятью $<1-\varepsilon$, стремится к нулю при μ, стремящемся к бесконечности.

В заключение дается общий ход решения задачи синтеза логической сети. Краткое изложение некоторых результатов статьи содержится в заметке Б. А. Трахтенброта (РЖМат, 1959, 5468).

Примечание референта. На рис. 7 во втором ярусе дерева ребрам следует приписать числа (порядок слева направо) 0, 1, 1, 0; последний столбец таблицы 1 при чтении сверху вниз должен иметь вид 0101; на рис. 8 блок состояний надо обозначить через ψ; в теореме 4 неравенство следует читать $k<2^v$.

В. Б. Кудрявцев

11393. Алгебра электрических цепей с многопозиционными переключательными элементами. Риги (L'algebra di commutazione del circuiti elettrici con elementi commutatori a piu posizioni. Righi Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1958, **13**, № 10, 881—898; № 11, 1019—1030 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Указывается, что алгебра двухпозиционных переключательных схем может быть распространена на случай схем с многопозиционными переключательными элементами типа шагового искателя. Отмечается, что работа таких схем может быть описана двузначными функциями многозначных переменных. Даны эквивалентные преобразования таких функций. Показано, что, используя эти эквивалентные преобразования, можно упрощать структуру схем, построенных из многопозиционных элементов указанного типа. Приводятся формулы, позволяющие переходить от двузначных функций многозначных переменных к обычным булевым функциям и наоборот. С помощью этих формул можно заменять схемы из многопозиционных элементов схемами из двухпозиционных и обратно. Осуществляется разложение двузначных функций многозначных переменных в дизъюнктивную и конъюнктивную совершенные нормальные формы. Переносятся на случай двузначных функций двух и более многозначных переменных понятия функций совпадения и несовпадения, а также симметрических функций. Доказывается теорема: Симметрическая функция n p-значных переменных с k уровнями может быть сведена к симметрической функции с теми же уровнями, зависящей от n двузначных переменных.

Обобщается матричный метод синтеза ориентированных многополюсников на случай схем из многопозиционных элементов типа шагового искателя. Работа представляет собой обзор собственных результатов и результатов, полученных Гильбертом Е. Н., Пиш И., Моисилом Г. К. и Иоанином Г.

Примечание референта. Некоторые результаты, приведенные в работе, пересекаются с результатами, полученными референтом в 1955—1956 гг. (РЖМат, 1956, 3386; 1958, 7558), на которые автор не ссылается. В. М. Остиану

11394. Матричные методы в исследовании переключательных схем. Риги (I metodi matriciali nello studio del circuiti di commutazione. Righi Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1956, **11**, № 11, 851—860 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

См. также РЖМат, 1958, 8648.

11395. Минимальность многовыходных диодных схем с частично определенным поведением. Мак-Нотон, Митчелл (The minimality of rectifier nets with multiple outputs incompletely specified. McNaughton Robert, Mitchell Bernon), J. Franklin Inst., 1957, **264**, № 6, 457—480 (англ.)

Рассматриваются диодные схемы, построенные из схем совпадения (конъюнкторов) и смесителей (дизъюнкторов). Схема имеет $2n$ входов (для переменных $x_1,\ldots,x_n$ и их инверсий $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$) и m выходов. Булевы функции (ф.) $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ заданы при помощи таблиц, в которых некоторые (общие для всех ф.) строки пустые и могут заполняться произвольным образом. Решается задача: построить схему, выходы которой представляют ф. $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ с минимальным общим количеством диодов (выпрямителей). Для этой цели обобщается понятие простой импликантной (prime implicant) формулы, которое введено Квайном в 1952 г. (см. также РЖМат, 1956, 8533). Через ψ_T^i обозначается ф., равная 1 точно тогда, когда $\Phi_i=1$ (т. е. равная 0, когда $\Phi_i=0$ или значение Φ_i безразлично), а через ψ_F^i ф., равная 1 точно тогда, когда $\Phi_i=0$; пусть $\Psi_T=\psi_T^1\,\&\ldots\&\,\psi_T^r$, $\Psi_F=\psi_F^1\vee\ldots\vee\psi_F^r$. Формула I называется простой импликантной r-го порядка для $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$, если 1) I является элементарной конъюнкцией, т. е. конъюнкцией некоторых из переменных $x_1,x_2\ldots,x_n$ и их инверсий $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$, не содержащей повторяющихся членов; 2) $I\&\Psi_F$ тождественно ложная ф.; 3) $I\&\Psi_T$ не тождественно ложная ф.; 4) не существует формулы I', удовлетворяющей условиям 1)—3) и такой, что: а) длина I' меньше длины I, б) $\Psi_T\to(I\to I')$ тождественно истинная ф. и 5) не существует формулы I', удовлетворяющей 1)—3) и такой, что а) длина I' равна длине I, б) $\Psi_T\to(I\to I')$ тождественно истинная ф.; в) $\Psi_T\to(I'\equiv I)$ не тождественно истинная ф. Доказывается, что существует минимальная схема, в которой каждая ф. Φ_i осуществлена как некоторая дизъюнктивная нормальная форма, причем каждая элементарная конъюнкция в этих нормальных формах является простой импликантной r-го порядка для совокупности

всех тех r ф., в нормальных формах которых она встречается. Подробно излагается пример ($n=5$, $m=4$).

Примечание референта. Описанная процедура является громоздкой, так как приходится искать простые импликантные формулы различных порядков. Переход от таблицы простых импликантных формул к окончательной схеме не алгоритмизирован.

11396. Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики. Лупанов О. Б., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 3, 464—467

Пусть $\Phi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_M)$—полная система функций двузначной алгебры логики. Выражения $\varphi(x_1,\ldots,x_{i(\varphi)})$, где φ—знак функции из Φ, а $i(\varphi)$—число существенных аргументов этой функции, называются элементарными формулами. Каждой функции φ из Φ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(\varphi)$ — индекс простоты этой функции. Система Φ функций с приписанными им индексами простоты обозначается $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{F}_\Phi$ — множество всех формул, являющихся суперпозициями элементарных формул. Пусть A_F (соответственно B_F) — множество всех (соответственно всех графически различных) подформул формулы F, отличных от аргументов. $\varphi(G)$—внешняя функция формулы G. Вводятся два индекса простоты формул F: $L^A_{\mathfrak{A}}(F)=\sum_{G\in A_F} P(\varphi(G))$,

$$L^B_{\mathfrak{A}}(F)=\sum_{G\in B_F} P(\varphi(G)).$$

$L^A_{\mathfrak{A}}$ относится к случаю, когда не допускается запоминание промежуточных результатов; $L^B_{\mathfrak{A}}$ относится к случаю, когда допускается запоминание промежуточных результатов, причем каждый вычисленный результат может использоваться в последующих вычислениях любое число раз. Формулам с индексом простоты $L^B_{\mathfrak{A}}$ соответствуют схемы из функциональных элементов, в которых выход каждого элемента может присоединяться к любому числу входов элементов, формулам с индексом $L^A_{\mathfrak{A}}$— схемы, в которых выход каждого элемента присоединяется только к одному входу другого элемента. Пусть $L^l_{\mathfrak{A}}(f)$ (где l есть A или B) есть нижняя грань индексов простоты $L^l_{\mathfrak{A}}(F)$ формул F из $\mathfrak{F}_\Phi$, реализующих функцию f, и $L^l_{\mathfrak{A}}(n)$ — наибольшее из чисел $L^l_{\mathfrak{A}}(f)$ (максимум берется по всем функциям f, зависящим от аргументов $x_1,\ldots,x_n$).

Теорема 1. Если для всех φ из Φ таких, что $i(\varphi)\geqslant 2$ имеет место $P(\varphi)>0$, то $L^B_{\mathfrak{A}}(n)\sim C_{\mathfrak{A}}\frac{2^n}{n}$, где $C_{\mathfrak{A}}=\min_{i(\varphi)\geqslant 2}\frac{P(\varphi)}{i(\varphi)-1}$.

Теорема 2. При условиях теоремы 1

$$L^A_{\mathfrak{A}}(n)\sim C_{\mathfrak{A}}\frac{2^n}{\lg_2 n},$$

где $C_{\mathfrak{A}}$ имеет тот же смысл, что и в теореме 1.

Следствие из теоремы 2. Пусть $L_\pi(n)$ — минимальное число контактов, достаточное для реализации параллельно-последовательной схемой любой функции алгебры логики n аргументов. Тогда $L_\pi(n)\sim\frac{2^n}{\lg_2 n}$.

Пусть каждой функции φ из Φ поставлено в соответствие натуральное число $j(\varphi)$ (содержательно-допустимая кратность использования результата). Множество троек $(\varphi, P(\varphi), j(\varphi))$ будет обозначать $\mathfrak{B}$. Индекс простоты $L_{\mathfrak{B}}(F)$ формулы F определяется следующим образом: $L_{\mathfrak{B}}(F)=\sum_{G\subset A_F}\left\lceil\frac{P(\varphi(G))}{j(\varphi(G))}\right\rceil$, где $\lceil a\rceil$ означает наименьшее целое число, не меньшее a.

Теорема 3. Если в $\mathfrak{B}$ имеется элемент с $j(\varphi)\geqslant 2$, то $L_{\mathfrak{B}}(n)\sim C_{\mathfrak{B}}\frac{2^n}{n}$, где $C_{\mathfrak{B}}$—некоторая константа, определяемая по $\mathfrak{B}$.

Рассматриваются также некоторые специальные классы формул, являющиеся обобщениями дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. A^2_V — класс дизъюнктивных нормальных форм; $A^2_{\&}$ — класс конъюнктивных нормальных форм. Пусть $L^k(n)$ — минимальное число знаков переменных, достаточное для реализации любой функции n аргументов формулой вида $\underbrace{V\&V\ldots}_{k\text{ раз}}\widetilde{x}_i$, где $\widetilde{x}_i$ означает x_i или $\overline{x}_i$. Тогда справедлива

Теорема 4. При $k\geqslant 4$ $L^k(n)\sim\frac{2^n}{\lg n}$.

Б. И. Фиников

11397. Синтез релейно-контактных схем по заданным условиям работы исполнительных элементов. Моисил, Иоанин (La synthèse des schémas à contacts et relais avec des conditions de travail données pour les éléments exécutifs. Moisil Gr. C., Ioanin Gh.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 2, 167—198 (франц.)

Указывается, что предложенный метод синтеза релейно-контактных схем по заданным условиям работы исполнительных элементов был разработан Моисилом и упрощен Иоанином. Упрощение метода основано на условии устойчивости состояния схемы, согласно которому всякое изменение состояния входных элементов приводит схему к некоторому устойчивому состоянию. Утверждение, что условие устойчивости не приводит к увеличению числа реле в схеме, не доказано в общем виде. Однако оно справедливо для случая схем, содержащих только одно реле в качестве внутреннего элемента. Рекуррентное уравнение релейно-контактной схемы имеет вид:

$$P_{N+1}=F(a_N,\ldots,c_N,P_N), \qquad (1)$$

где P_i—состояние внутренних элементов, а $a_i,\ldots,c_i$ — состояние входных элементов в i-м такте. Двузначные переменные $u_i,\ldots,w_i$ описывают состояние исполнительных элементов в i-м такте $u_{N+1}=u(a_N,\ldots,c_N,P_N)$, $w_{N+1}=w(a_N,\ldots,c_N,P_N)$.

В описание работы схемы входит некоторое число k состояний внутренних элементов $P^0,P^1,P^2,\ldots,P^{k-1}$. Из условий для исполнительных элементов можно получить ряд соотношений вида

$$P^\alpha\neq P^\beta, \qquad (2)$$

из которых с помощью (1) можно составить таблицу импликаций вида

$$(P^q=P^p)\to(F(a,\ldots,c,P^q)=F(a,\ldots,c,P^p)) \qquad (3)$$

и

$$\{F(a,\ldots,c,P^s)\neq F(a,\ldots,c,P^t\}\to(P^s\neq P^t). \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что среди k состояний внутренних элементов r состояний должны быть различны

и именно P^0, P^1, P^{r-1}. Если $2^{n-1} < r \leqslant 2^n$, то заданные условия работы для исполнительных элементов могут быть реализованы схемой с внутренними двухпозиционными реле. Приведено восемь примеров синтеза схем. Отмечается, что первый, четвертый и пятый примеры были составлены Иоанином. В. М. Остиану

11398. О некоторых схемах с реле времени и реле интенсивности. Неделку (Considérations sur certains schémas à relais temporisés et à relais d'intensité. Nedelcu Mariana), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 2, 199—217 (франц.)

Первая часть работы посвящена схемам с реле времени. Указывается, что встречаются два случая, в которых в схему включают реле времени: а) в целях упрощения схем, б) для удовлетворения условий работы схемы. Рассматривается только второй случай. Вводится понятие числа тактов задержки. Под числом тактов задержки некоторого реле времени понимается число тактов работы схемы, содержащей рассматриваемое реле, которые проходят с момента подачи (снятия) напряжения на реле времени до момента его срабатывания (отпускания). Рассматриваются три случая использования временных реле в целях удовлетворения условий работы схемы.

1. Реле времени вводится с целью задержать выполнение некоторой команды на определенное время. В этом случае число тактов задержки рассчитывается по минимальному числу тактов, которые должны иметь место в работе схемы за это время. Синтез схемы осуществляется так же, как и в случае обычных реле.

2. Реле времени вводится в схему с целью не допустить функционирования определенной части A схемы во время работы другой части B схемы. Если схема B является n_1-тактной, то число тактов задержки реле времени должно быть равным $\nu = n_1 + 1$. Синтез схемы осуществляется следующим образом: определяются n_1 и ν, синтезируются схемы A и B, которые затем связываются реле времени с ν тактами задержки или ν обычными реле, включающими друг друга последовательно.

3. Реле времени вводится в схему с целью удержать состояние некоторого элемента A в течение работы схемы B. Число тактов ν замедления временного реле определяется из соотношения $\nu = n_1 + 1 - n_2$, где n_1 — число рабочих тактов схемы B, а n_2 — число тактов, которое проходит с момента включения временного реле до момента срабатывания элемента A. Синтез схемы осуществляется, как и в случае 2, после определения n_1, n_2 и ν.

Вторая часть работы посвящена схемам с реле интенсивности. Под реле интенсивности понимается набор реле с различными величинами тока срабатывания. Каждой величине силы тока, равной току срабатывания какого-либо реле, ставится в соответствие переменная ξ^i $(i = 0, \ldots, n)$, принимающая значение 0 или 1. Состояние каждого реле характеризуется также двузначной переменной η_i. Показано, что

$$\eta^j = \xi^j + \xi^{j+1} + \ldots + \xi^n \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Указывается, что при синтезе схем с реле интенсивности, последние можно считать обычными реле, если в качестве переменных, характеризующих состояние реле, использовать переменные η^i.

В третьей части приводится пример анализа и синтеза схем с реле времени (рассмотрена схема максимальной токовой защиты с сигнализацией перегрузки для трехфазной линии высокого напряжения). В. М. Остиану

11399. Классификация функций двух переменных в $GF(2^2)$. Рудяну (Clasificarea funcţiilor de două variabile în $GF(2^2)$. Rudeanu S.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, 9, № 1, 217—287 (рум.; рез. русск., франц.)

Отмечается, что рекуррентное уравнение любой релейно-контактной схемы имеет вид $Z_{N+1} = F(Z_N)$ в случае обычных реле и $Z_{N+\nu} = F(Z_N, \ldots, Z_{N+\nu-1})$ в случае реле, время задержки которых занимает не более ν тактов работы схемы, где Z_i — состояние всех элементов схемы в i-м такте. Ввиду этого классификация релейных схем может быть сведена к классификации функций ν переменных в поле Галуа $GF(2^\nu)$. Осуществляется классификация функций для случая $\nu = 2$ в соответствии с октаэдрической и тетраэдрической группами перестановок четырех элементов в поле $GF(2^2)$. Два многополюсника $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ считаются эквивалентными относительно группы перестановок, если существует преобразование φ этой группы $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$ такое, что $z = P(x, y)$ и $z' = P'(x', y')$ связаны преобразованием $z' = \varphi(z)$.

Функция двух переменных $f(x, y)$ порождается многочленом третьей степени относительно каждого переменного. Такой многочлен может быть записан в виде

$$z = (a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4)x^3 + (b_1y^3 + b_2y^2 + b_3y + b_4)x^2 + (c_1y^3 + c_2y^2 + c_3y + c_4)x + d_1y^3 + d_2y^2 + d_3y + d_4. \quad (1)$$

С помощью инвариантов преобразования многочлен (1) приводится к 52 различным каноническим формам.

Доказывается, что многочлены вида (1), приведенные к каноническим формам, образуют полную систему многочленов, представляющих классы многочленов, эквивалентных относительно тетраэдрической группы перестановок. Множество всех многочленов разбивается на три категории в зависимости от значения коэффициента при члене, содержащем все переменные в наивысшей степени (первая категория соответствует коэффициенту, равному 0 или 1, вторая — коэффициенту, равному ε, и третья — коэффициенту, равному $\varepsilon + 1$).

Доказывается теорема: Многочлены вида (1), приведенные к каноническим формам и принадлежащие к первой и второй категории, образуют полную систему многочленов, эквивалентных относительно октаэдрической группы. В. М. Остиану

11400. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. V. Схемы P—1. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanismelor automate. V. Schemele P—1. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 11, 1127—1128 (рум.; рез. русск., франц.)

Первые части см. РЖМат, 1958, 1053, 1054, 1055.

Указывается, что невозможность построения схемы в классе π, реальная работа которой удовлетворяла бы заданным условиям, еще не означает невозможность построения схемы, удовлетворяющей заданным условиям, в классе более широком, чем класс π-схем. Показано, что в алгебре трехзначной логики Лукасевича любая двузначная функция представима в виде

$$f = (A_1 \cap NB_1) \cup \ldots \cup (A_r \cap NB_r),$$

где A_i и B_i суть структурные формулы двухполюсников, реально работающих и построенных из обычных реле. Отмечается, что на этом основании функцию f можно рассматривать как структурную формулу реальной работы некоторого r-обмоточного реле. Релейные схемы такого типа названы схемами P—1. Указывается, что можно легко доказать следующее предложение: любые совместные условия реальной работы устройства могут быть реализованы схемой P—1. В. М. Остиану

11401. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. VI. Поляризованные реле с неустойчивым нейтральным положением. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanis-

melór automate. VI. Relee polarizate cu neutrul instabil. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 5, 411—413 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается поляризованное реле с неустойчивым нейтральным положением контакта, а также его характеристическое уравнение и логическая функция, реализуемая им.

Доказана теорема: Любую трехзначную функцию трехзначных переменных можно рассматривать как функцию работы некоторого поляризованного реле с неустойчивым нейтральным положением контакта.

В. М. Остиану

11402. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. VII. Работа обычных реле, сохраняющих включенное состояние при пониженной величине тока. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanismelor automate. VII. Funcţionarea releelor ordinare cu curent de autoменţinere redus. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 6, 531—532 (рум.; рез. русск., франц.)

Отмечается, что при исследовании различных вопросов теории схем работу реле идеализируют, считая, что реле срабатывает при определенной величине тока и отпускает при любой величине тока, меньшей тока срабатывания. Однако фактически существуют две различные величины тока — ток срабатывания и ток отпускания, причем величина последнего значительно ниже величины первого. Поэтому следует рассматривать схемы, работа которых зависит от величины тока. Отмечается, что теория таких схем изучалась Рогинским и Майстровой. Величине тока, протекающего по обмотке реле, ставится в соответствие трехзначная переменная ζ

$$\zeta=\begin{cases}0, & \text{когда обмотка обесточена,}\\ \frac{1}{2}, & \text{когда величина тока в обмотке больше тока отпускания, но меньше тока срабатывания,}\\ 1, & \text{когда величина тока в обмотке не меньше тока срабатывания реле.}\end{cases}$$

Тогда $\nu\zeta=1$ означает, что величина тока достаточна для срабатывания реле, а $\nu\zeta=0$ — что величина тока не достаточна для срабатывания того же реле. Точно так же $\mu\zeta=1$ означает, что величина тока достаточна, чтобы удержать реле во включенном состоянии, а $\mu\zeta=0$ — что величина тока для этого недостаточна. Ставя в соответствие контактам реле, как обычно, двузначные переменные, можно получить характеристическое уравнение для такого реле в виде

$$x_{N+1}=\mu\zeta_N\cap(\nu\zeta_N\cup x_N).$$

Если обмотки реле питаются от параллельного соединения двух двухполюсников, один из которых A является контактным, а второй последовательным соединением контактного двухполюсника B с сопротивлением, то $\zeta=A\cup(1/\cap B)$. В этом случае надлежит условиться в том, что $A\cap B=0$.

В. М. Остиану

11403. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. VIII. Контактный двухполюсник в классе π-схем, содержащий сопротивления. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanismelor automate. VIII. Dipoli π cu contacte şi rezistenţe. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 6, 533—536 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются схемы двух типов: (1) — контактный двухполюсник, содержащий сопротивления, соединен последовательно с исполнительным элементом, (2) — контактный двухполюсник, содержащий сопротивления, соединен параллельно с исполнительным элементом. Проводимость двухполюсника в схеме типа (1) обозначается через $i(D)$. Тогда $w^*=c(D)$, где w^* — состояние исполнительного элемента в схеме (1). Через $k(D)$ обозначается проводимость двухполюсника в схеме типа (2), причем $k(D)=1$, если существует в двухполюснике хотя бы одна цепь между его полюсами, содержащая сопротивления низшего порядка, чем сопротивление исполнительного элемента в схеме типа (2), и $k(D)=0$, если не существует такой цепи. Тогда $w^{**}=k(D)$, где w^{**} — состояние исполнительного элемента в схеме (2). Вводится новая переменная $\varkappa(D)$, принимающая одно из трех значений:

$$\varkappa(D)=\begin{cases}0, & \text{если двухполюсник } D \text{ не проводит ток,}\\ \frac{1}{2}, & \text{если двухполюсник } D \text{ проводит ток через сопротивление,}\\ 1, & \text{если двухполюсник } D \text{ проводит ток по цепи, не содержащей сопротивления.}\end{cases}$$

Тогда исследование схем любого типа (1) или (2) сводится к начатому Рогинским и Майстровой исследованию схем с несколькими ступенями величины тока. Законы композиции „$\cup$“ и „$\cap$“ заданы таблицами:

$\cup$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\cap$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

Доказывается, что проводимость $\varkappa(D)$ есть функция, порождаемая структурной формулой F в алгебре трехзначной логики L_3. Указывается также, что любой контактный двухполюсник в классе Π-схем, содержащий сопротивления, может быть представлен в виде параллельного соединения двух двухполюсников, один из которых A является контактным, а второй представляет собой последовательное соединение контактного двухполюсника B с сопротивлением, т. е. $D=A\cup(1/\cap B)$. Приводится пример.

В. М. Остиану

11404. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. IX. Контактные двухполюсники из класса π-схем, содержащие выпрямители и сопротивления. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanismelor automate. IX. Dipoli π cu contacte, supape şi rezistenţe. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 7, 665—666 (рум.; рез. русск., франц.)

Показано, что контактный двухполюсник из класса Π-схем, содержащий выпрямители и сопротивления, можно рассматривать как схему, содержащую цепи девяти видов: 0 — разомкнутая цепь, 1 — замкнутая цепь, $\frac{1}{2}$ — цепь, содержащая сопротивления, ε и $\bar{\varepsilon}$ — цепи с односторонней проводимостью, а также комбинации этих цепей $\frac{1}{2}\cap\varepsilon$, $\frac{1}{2}\cap\bar{\varepsilon}$, $\frac{1}{2}\cup\varepsilon$, $\frac{1}{2}\cup\bar{\varepsilon}$.

Указано, что эти девять типов элементов составляют структуру, являющуюся прямым произведением структуры L_3^2 с самой собой, где L_3 есть алгебра трехзначной логики Лукасевича. Отмечается, что задачи анализа, синтеза и преобразования двухполюсников, содержащих выпрямители и сопротивления, решаются с помощью вычислений в L_3^2.

В. М. Остиану

11405. Использование трехзначных логик в теории автоматических устройств. X. Физическая интерпретация характеристической функции многополюсника. Моисил (Întrebuinţarea logicilor trivalente în teoria mecanismelor automate. X. Interpretarea fizică a funcţiei caracteristice a unui multipol. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 7, 667—669 (рум.; рез. русск., франц.)

Указывается, что А. Г. Лунцем (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, **16**, 405) введена характеристическая функция многополюсника

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i \bar{x}_j, \qquad (1)$$

где a_{ij} — проводимость от узла i к узлу j, а переменной $\bar{x}_k$ обозначен k-й узел многополюсника. Показано, что проводимость от положительного полюса к отрицательному полюсу многополюсника есть функция

$$g(w_1, \ldots, w_n) = \sum a_{ij} \nu w_i \eta w_j, \qquad (2)$$

где w_k — трехзначная переменная ($w_k = 1$ означает, что k-й узел соединен с положительным полюсом, $w_k = 1/2$ — что k-й узел является внутренним узлом схемы, $w_k = 0$ — что k-й узел соединен с отрицательным полюсом). Переходя от трехзначной переменной w к двузначной переменной x с помощью замены $x_i = \nu w_i$; $\bar{x}_j = \eta w_j$, получим характеристическую функцию (1). Отмечается, что функция (2) позволяет рассматривать эквивалентность многополюсников при введении дополнительных внутренних узлов, как это делается в исследованиях Константинеску (P. Constantinescu). В. М. Остиану

11406. Об одной теореме существования в алгебраической теории дискретных автоматических устройств. Моисил (Sur un théorème d'existence dans la théorie algébrique des mécanismes automatiques discrets. Moisil Gr C), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 1, 9—23 (франц.)

Рассматриваются дискретные автоматические устройства. Состояние приемных элементов названо командой, состояние исполнительных элементов — исполнением. Описаны условия, характеризующие дискретные автоматические устройства:

1. Множества команд, исполнений, состояний реагирующих органов, а следовательно, и контактов внутренних элементов являются конечными.

2. Существует соотношение

$$Z^0_{N+1} = \varphi^0(Z^0_N, \ldots, Z^0_{N-\mu}, \Xi^0_N, \ldots, \Xi^0_{N-\nu}),$$

где Ξ^0 принимает значения в множестве состояний реагирующих органов внутренних элементов, а Z^0 — в множестве состояний их контактов.

3. Схема устройства позволяет построить две функции $\psi^0(K^0, Z^0)$, $\Phi^0(K^0 Z^0)$ такие, что $\Xi^0 = \psi^0(K_N, Z^0_N)$, $W_N = \Phi^0(K_N, Z^0_N)$, где W_N принимает значения в множестве исполнений.

Доказано, что без ограничения общности, можно считать все элементы устройства двухпозиционными. Доказываются следующие теоремы:

I. Для устройств с задержкой состояние контактов внутренних элементов и команды связаны рекуррентным уравнением $Z^0_{N+1} = F^0(K_N, \ldots, K_{N-\nu}, Z^0_N, \ldots, Z^0_{N-\rho})$. В случае устройств без задержек это уравнение переходит в $Z^0_{N+1} = F^0(K_N, Z^0_N)$.

II. Принцип детерминизма. При заданной команде эволюция устройства определяется состоянием контактов внутренних элементов в некоторый заданный момент времени.

III. Общий принцип детерминизма. Для точной программы команд эволюция устройства без задержек определяется состоянием контактов внутренних элементов в некоторый заданный момент времени. Под точной программой команд понимается конечная последовательность команд $K_0, K_1, \ldots, K_N$ такая, что в N-м такте подается N-я команда.

Точной программой названо множество трех таблиц

$$\begin{array}{ll} F(K_0, Z_0) = Z_0 & \Phi(K_0\ Z_0) = W_0 \\ F(K_1, Z_0) = Z_1 & \Phi(K_1, Z_0) = W_1 \\ F(K_2, Z_1) = Z_2 \quad \text{(I)} & \Phi(K_2, Z_1) = W_2 \quad \text{(II)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ F(K_n, Z_{n-1}) = Z_n & \Phi(K_n, Z_{n-1}) = W_n \\ F(K_0, Z_n) = Z_0 & \Phi(K_0, Z_n) = W_{n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Z_i = Z_j \\ \ldots\ldots \quad \text{(III)} \\ Z_h = Z_k, \end{array}$$

где $K_0, \ldots, K_n, W_0, \ldots, W_{n+1}$ заданы, но ни значения $Z_0, \ldots, Z_n$, ни область их изменения, ни функции F_i, Φ не заданы. Таблица I называется программой работы внутренних элементов, таблица II — программой работы исполнительных элементов, таблица III — таблицей равенств программы. Отмечается, что таблица II может быть неполной. Показано, что с помощью таблиц I и II можно дополнить таблицу III рядом равенств и составить таблицу неравенств вида

$$Z_\alpha \neq Z_\beta. \qquad (IV)$$

Если для любой пары Z_α и Z_β нельзя найти одновременно в таблицах III и IV противоречащие друг другу соотношения $Z_\alpha = Z_\beta$ и $Z_\alpha \neq Z_\beta$, то говорят, что точная программа совместна. Если существует устройство, реализующее точную программу, то последнюю называют реализуемой. Доказываются утверждения:

IV. Всякая реализуемая точная программа совместна.

V. Всякая совместная точная программа может быть реализована релейно-контактной π-схемой при идеальной работе реле.

Основная теорема. Необходимое и достаточное условие реализуемости точной программы состоит в ее совместности.

Приводятся примеры. В. М. Остиану

11407. О гомоморфизме релейно-контактных схем. Моисил (Sur l'homomorphisme des schémas à contacts et relais. Moisil Gr. C.), Изв. Матем. ин-т.Ълг. АН, 1959, 3, № 2, 163—167 (франц.; рез. болг., русск.)

Рассматриваются две релейно-контактные схемы S и S^* с рекуррентными уравнениями $P_{N+1} = F(C, P_N)$, $P^*_{N+1} = F^*(C, P^*_N)$, где C — состояние приемных элементов, а P — состояние внутренних и исполнительных элементов. Преобразование $P^* = f(P)$, ставящее в соответствие каждому состоянию P схемы S некоторое состояние P^* схемы S^*, называется гомоморфизмом, если состояния схемы S^*, соответствующие последовательным состояниям схемы S, также следуют друг за другом (в той же последовательности). Тогда

$$F^*(C, f(P)) = f(F(C, P)). \qquad (1)$$

Указывается, что соотношение (1) является необходимым и достаточным условием гомоморфизма между S и S^*. Так определенный гомоморфизм схем называется гомоморфизмом „заданного воздействия" или „гомоморфизмом автономных эволюций". Если функция f задает однозначное преобразование, то гомоморфизм схем S и S^* превращается в изоморфизм. Приводится пример гомоморфных схем. В. М. Остиану

11408. Развитие алгебраической теории релейно-контактных схем в РНР. Моисил (Dezvoltarea în R. P. R. a teoriei algebrice a schemelor cu contacte şi relee. Moisil Grigore C.), Automat. şi electron., 1959, 3, № 4, 152—160 (рум.)

В части I описан путь создания румынского коллектива, ведущего исследования в области алгебраической теории релейных устройств. Перечисляются совещания и съезды, в работе которых принимали участие члены этого коллектива. В последующих частях (II—XI) кратко охарактеризованы направления исследований: анализ и синтез многотактных схем, схемы, построенные из релейных контактных и бесконтактных элементов различных видов (в том числе из магнитных сердечников и криотронов, элементов с параметрическими зависимостями), исследование релейных схем на базе теории полей Галуа или многозначной логики, исследова-

ние мостиковых схем, преобразования релейных схем, содержащих вентильные элементы и сопротивления, исследование конечных автоматов, не содержащих элементов задержки. В заключение приводится полная библиография румынских работ за 1950—1959 гг.

В. М. Остиану

11409. Электронные схемы релейного действия. Неделку (Scheme electronice cu funcționare de releu. Nedelcu Mariana), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 9, 893—895 (рум.; рез. русск., франц.)

Для анализа электронных схем предложен новый метод, который разработан на основе метода рекуррентных уравнений для анализа релейно-контактных схем. Приводится анализ двух схем, содержащих триоды.

В. М. Остиану

11410 К. Однотактные релейно-контактные схемы. Моисил (Scheme cu comandă directă cu contacte și relee. Moisil Gr. C. București, Acad. RPR, 1959, 205 p., il., 9.65 lei) (рум.)

Книга написана на основе курса лекций по алгебраической теории автоматических устройств, систематически читающегося в Бухарестском университете и на курсах повышения квалификации инженеров при Институте электро-технических исследований. Она предназначена для математиков и инженеров и издана с целью ознакомления читателей с основными принципами и методами алгебраической теории автоматических устройств. Книга освещает вопросы, связанные только с однотактными схемами. Она содержит одиннадцать глав и два приложения. Глава 1 посвящена описанию различных контактных элементов. Во 2-й главе вводится понятие структурной формулы схемы, приводятся многочисленные примеры схем и соответствующие им структурные формулы. В 3-й главе изучается функция работы контактного двухполюсника. В 4-й главе изучается связь между структурной формулой и функцией работы двухполюсника. Доказывается теорема: Функция работы контактного двухполюсника класса П есть функция, порожденная его структурной формулой. В 5-й главе изучаются законы булевой алгебры и вопросы эквивалентности двухполюсников в классе П. В 6-й главе описываются различные типы электромагнитных реле и реализуемые ими логические функции. В 7-й и 8-й главах излагаются теоремы булевой алгебры о дизъюнктивной и конъюнктивной совершенных нормальных формах булевых функций. В 9-й главе изучаются свойства импликации. 10-я глава посвящена разложению функций на конституанты нуля и единицы. Приведена геометрическая интерпретация разложения функции на конституанты. Излагаются основы минимизации булевых функций. В 11-й главе дается историко-библиографический очерк теории релейно-контактных схем, в котором должное внимание уделено работам советских ученых. Каждая глава снабжена большим количеством примеров. В первом приложении приведены условия 30 задач и упражнений, а также более 250 чертежей различных релейно-контактных схем. Во втором приложении даны ответы и указания к задачам и упражнениям, содержащимся в первом приложении.

В. М. Остиану

См. также: 11183, 11210, 11257, 11411, 11417, 11452, 11760, 11771, 12050, 11221 К.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

11411. Транзитивность и связность. Руа (Transitivité et connexité. Roy Bernard), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 2, 216—218 (франц.)

Рассматривается множество Ω квадратных матриц порядка n, элементы которых есть 0 или 1 (причем все элементы главной диагонали матрицы равны 1). Многозначному отображению Γ, определенному на конечном множестве $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, ставится во взаимно однозначное соответствие матрица $M\in\Omega$ следующим образом: $M=\{a_{ij}\}$, где $a_{ii}=1$, $a_{ij}=1 (i\neq j)$, если $x_j\in\Gamma x_i$, $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$, если $x_j\notin\Gamma x_i$. Матрица $\hat{M}\in\Omega$, которая соответствует транзитивному замыканию $\hat{\Gamma}$ (Berge, La théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1958, стр. 4), называется транзитивным замыканием матрицы M, соотнесенной отображению Γ. Наконец, на множестве Ω определяется семейство преобразований $T_i (i=1,2,\ldots,n)$. Если $M=\{a_h^k\}$, то $T_l\cdot M=\{b_h^k\}$, где $b_h^k=a_h^k$, если $a_h^i=0$ $(h=1,2,\ldots,n)$, $b_h^k=\max[a_h^k, a_i^k]$, если $a_h^i=1$.

Доказывается теорема: Матрица $T_n\cdot T_{n-1},\ldots,T_1\cdot M$ есть транзитивное замыкание матрицы $M\in\Omega$. Эта теорема позволяет достаточно просто получить транзитивное замыкание отображения, а следовательно, разложить граф на сильно связные компоненты. Кроме того, она позволяет решить и некоторые другие проблемы теории графов (например, известные задачи о существовании центра графа, контура графа, проходящего через две заданные вершины графа, и т. д.). В. П. Мякишев

11412. Замечания к теореме Рамсея. Эрдёш (Remarks on a theorem of Ramsay. Erdős P.), Bull. Res. Council Israel, 1957, F7, № 1, 21—24 (англ.)

Пусть $f(k,l)$ — наименьшее целое число такое, что любой граф с $f(k,l)$ вершинами имеет либо k попарно смежных, либо l попарно несмежных вершин. Доказывается существование такой постоянной $c>0$, что $f(3,l)>l^{1+c}$. Дается обзор некоторых других оценок и открытых вопросов, относящихся к функции $f(k,l)$.

А. А. Зыков

11413. Теория графов и вероятность. Эрдёш (Graph theory and probability. Erdős P.), Canad. J. Math., 1959, 11, № 1, 34—38 (англ.)

Пусть $f(k,l)$ то же, что и в предыдущем реферате (реф. 11412). Если допустить, что вероятность существования ребра у двух вершин 1/2, то при фиксированном k и достаточно большом l справедливы следующие три оценки с вероятностью единица: $f(k,l)>l^{1+1/2k}$, $f(2k+1,l)>c_1 l^{1+1/k}$, $f(2k+2,l)<c_2 l^{1+1/k}$. Эти неравенства тесно связаны с известной теоремой Рамсея (Skolem, Fundam. math., 1933, 20, 254 — 261) и хроматическим числом.

Э. И. Вилкас

11414. Заметка к одной проблеме об эйлеровых графах. Седлачек (Poznámka k jednomu problému o eulerovských grafech. Sedláček Jiří), Mat.-fyz. časop., 1958, 8, № 3, 151—154 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается конечный неориентированный граф без петель. Два его подграфа называются дополнительными, если множества их вершин совпадают с множеством вершин графа, а множества ребер являются взаимно дополнительными подмножествами множества ребер графа. Подграф H графа G называется полным по отношению к некоторому подмножеству U множества вершин графа G, если он содержит звезды всех вершин $x\in U$ и существует эйлеров подграф $H'\subset G$ дополнительный к H. Доказывается, что для несуще

ствования в графе G подграфа (отличного от G), полного по отношению к некоторому непустому подмножеству U множества его вершин, необходимо и достаточно, чтобы на каждом цикле графа лежала по крайней мере одна вершина из U. Рассматривается граф с вершиной c, лежащей на всех циклах графа. Тогда пересечение двух любых его циклов содержит либо одну компоненту (в этом случае имеем или изолированную вершину, или цепь с крайней вершиной c), либо две компоненты (в этом случае одна из них есть узел c). Эти теоремы представляют собой обобщение предложений Уре (Ore O., Elemente d. Math., IV, 1951, № 3, 49—53) и Баблера (Bäbler F., РЖМат, 1956, 2042).

Ф. Я. Ветухновский

11415. Об одном типе хорошо ориентированных графов. Седлачек (O jednom typu dobře orientovaných grafů. Sedláček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 1, 7—15 (чешск.; рез. русск., нем.)

Конечный ориентированный граф $\vec{D}$ называется хорошо ориентированным, если в $\vec{D}$ существует путь от каждой его вершины ко всем вершинам. Если в $\vec{D}$ существует вершина, лежащая в каждом цикле графа $\vec{D}$, то такая вершина называется центром графа $\vec{D}$. Доказывается теорема: Пусть D — конечный неориентированный связный граф без петель, двуугольников и перешеечных вершин. Пусть D имеет хотя бы три вершины и пусть c означает любую из его вершин. Тогда можно все ребра графа D ориентировать таким образом, что возникает ориентированный граф $\vec{D}$ с центром c. M. Fiedler

11416. О матрицах инцидентности ориентированных графов. Седлачек (O incidenčních maticích orientovaných grafů. Sedláček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 3, 303—316 (чешск.; рез. русск., нем.)

Работа является продолжением более ранней работы автора (РЖМат, 1959, 186). Определяется произведение подграфов L_1, L_2 основного графа G (например, полного ориентированного графа) как такой подграф графа G, в котором существует ребро $\vec{vw}$ тогда и только тогда, когда существует вершина $x \in G$ такая, что ребра $\vec{vx} \in L_1$ и $\vec{xw} \in L_2$. Аналогично определена степень (с натуральным показателем) графа и показывается, что матрица инцидентности для r-й степени графа равна r-й степени Буля матрицы инцидентности графа L. Вводится понятие примитивной вершины графа G как вершины, из которой существуют для некоторого натурального числа d пути в вершину y длиною d, причем это имеет место для каждой вершины $y \in G$. Наименьшее из таких чисел d, соответствующих примитивной вершине графа G, называется указателем вершины x. Граф, все вершины которого являются примитивными, называется примитивным графом. Это понятие соответствует понятию примитивной неотрицательной матрицы. Указатели вершин примитивного графа образуют множество нескольких следующих за собой натуральных чисел; наименьшее из этих чисел $\leqslant n^2 - 3n + 3$, где n — число вершин графа. Эта оценка является точной и дополняет известную верхнюю оценку Виландта для наибольшего из указателей, равного указателю примитивности матрицы (Wielandt H., Math. Z., 1950, 52, 642—648). Неориентированный граф (каждое из его ребер xy рассматривается как пара ориентированных ребер xy и yx) является примитивным тогда и только тогда, если он связный и нечетный. В заключение вводится понятие спектра конечного ориентированного графа (по поводу этого понятия см. РЖМат, 1958, 8651). Оказывается, что спектр графа G равен объединению спектров его квазикомпонент. Максимальное (положительное) собственное число матрицы инцидентности графа, содержащего хотя бы один цикл, $\geqslant 1$. Для того чтобы граф был ациклическим, необходимо и достаточно, чтобы его спектр был образован одними нулями. M. Fiedler

11417. Группы, представимые группами гомеоморфизмов. I. Грот (Groups represented by homeomorphism groups. I. Groot J. de), Math. Ann., 1959, **138**, № 1, 80—102 (англ.)

Рассматриваются условия, при которых абстрактная группа $\mathfrak{G}$ может быть изоморфно представлена как группа авто(гомео)-морфизмов некоторого алгебраического или топологического строения из различных классов строений. Перечисляются следующие факты. Каждая группа может быть группой авто(гомео)-морфизмов графа, дистрибутивной структуры (Биркгоф), коммутативного кольца и бикомпактного связного хаусдорфова пространства. С другой стороны, произвольная группа, вообще говоря, может не быть группой автоморфизмов группы, нульмерного бикомпактного хаусдорфова пространства и дистрибутивной структуры с дополнениями. Основную роль в работе играет следующая теорема: Для произвольной группы $\mathfrak{G}$ можно построить такое полное связное, локально связное метрическое пространство M любой положительной размерности, что группа $\mathfrak{G}$ изоморфна группе автоморфизмов пространства M. Построение проходит следующими этапами. Вначале по группе $\mathfrak{G}$ строится ее граф Кэли G^*. С помощью G^* строится такой граф G, что $\mathfrak{G}$ есть группа автоморфизмов графа G. Затем в G каждое ребро заменяется подходящим жестким (т. е. с единичной группой автоморфизмов) пространством. В полученном таким образом множестве вводится соответствующая метрика. Предварительно исследуются некоторые типы жестких континуумов. В работе имеется ряд понятий и промежуточных результатов. Б. И. Плоткин

11418. Формулы для графов Фейнмана произвольной топологии. Буккафурри, Фано (Formulae for Feynman graphs of arbitrary topology. Buccafurri A., Fano G.), Nuovo cimento, 1959, **13**, № 3, 628—636 (англ.; рез. итал.)

Кайаньелло (Caianiello) предложил (Nuovo Cimento, 1954, **12**, 561) метод, с помощью которого можно записать в компактной форме вклад от всех диаграмм Фейнмана заданного порядка. В этом методе важную роль играют специального вида детерминанты, построенные из пропагаторов свободных квантованных полей, так называемые хафнианы. В реферируемой работе эти формулы подвергаются дальнейшей перестройке, что дает возможность установить связь этих формул с отдельными диаграммами. Такая прозрачная запись может быть использована как источник для разработки аппроксимационной техники. О. С. Парасюк

11419. Замечание к теореме Кантора—Бендиксона. Фрёйд (Ein Beitrag zu dem Satze von Cantor und Bendixson. Freud G.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 3-4, 333—336 (нем.)

В T_1-пространстве X рассматривается какая-либо система множеств $\mathfrak{A} = \{A\}$, удовлетворяющая следующим двум требованиям: а) если $A \in \mathfrak{A}$ и $A_0 \subseteq A$, то и $A_0 \in \mathfrak{A}$, б) если $A_1 \in \mathfrak{A}$ и $A_2 \in \mathfrak{A}$, то и $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$. Всякую такую систему множеств автор называет „системой почти пустых множеств“. Система $\mathfrak{A}$ позволяет ввести новую топологию в пространстве X, называя точку ξ точкой $\mathfrak{A}$-накопления множества $M \subseteq X$, если пересечение множества $M \setminus \xi$ с любой окрестностью O_ξ точки ξ не является „почти пустым“ множеством (т. е. элементом системы $\mathfrak{A}$). Автор доказывает, что получаемая таким образом новая топология является T_1-топологией. Далее понятие „класса $\mathfrak{A}$ почти пустых множеств“ усиливается двумя требованиями: в) класс $\mathfrak{A}$ содержит все одноточечные множества; г) если для каждой точки x данного множества M имеется такая окрестность Ox, что

$M \cap Ox$ почти пусто, то и все M почти пусто. Примерами „классов почти пустых множеств" — даже в усиленном смысле — могут служить: класс всех рассеянных множеств, т. е. множеств с пустым плотным в себе ядром, класс нигде неплотных множеств (в пространствах без изолированных точек) и др. При любом выборе усиленного класса почти пустых множеств в соответствующей топологии верна теорема: Каждое замкнутое множество есть сумма совершенного и „почти пустого". Отсюда, наряду с другими результатами, в частности, легко получается теорема Кантора — Бендиксона. П. С. Александров

11420. О различных видах полноты топологических пространств. Киртадзе Г. А., Матем. сб., 1960, **50**, № 1, 67—90

Продолжение X пространства R называется T-продолжением R, если каждая точка $\xi \in X \setminus R$ обладает свойством T (является T-точкой). Пространство R называется T-полным, если R замкнуто в любом своем T-продолжении. Рассматриваются случаи аксиом отделимости T_1, T_2, T_3, T_ρ и устанавливаются критерии T_i-полноты ($i = 1, 2, 3, \rho$), сохранение T_i-полноты ($i = 2, 3, \rho$) при непрерывных отображениях. Строится пример T_2-пространства, обладающего свойством (E) (всякое бесконечное множество E, лежащее в R, имеет в нем точку T_2-накопления, т. е. точку ξ такую, что мощность $[O_\xi] \cap E$ — мощности E для любой окрестности O_ξ), но не H-замкнутого. Б. Т. Левшенко

11421. К определению бикомпактных пространств. Керстан (Zur Definition der bikompakten Räume. Kerstan J.), Math. Nachr., 1958, **17**, № 1-2, 19—21 (нем.)

Пусть в топологическом пространстве R дана такая псевдобаза открытых множеств, которая вместе с любыми двумя своими элементами содержит и их сумму. Основная теорема: Для того чтобы пространство R было бикомпактным, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы всякое покрытие, состоящее из элементов такой базы, содержало точечно-конечное покрытие. Эта теорема обобщается на инициально-компактные пространства. Для финально-компактных пространств достаточное условие выглядит так: если каждое открытое покрытие содержит точечно-счетное подпокрытие, то пространство финально-компактно. Есть и другие обобщения. Ю. М. Смирнов

11422. Расширения топологических пространств. Пикерт (Erweiterungen eines topologischen Raumes. Pickert Günter), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 155—161 (нем.)

В дальнейшем R — топологическое пространство, $\widetilde{R}$ — его расширение, $\mathfrak{U}$ и $\widetilde{\mathfrak{U}}$ — соответственно системы всех их замкнутых множеств, $\mathfrak{U}_X = \{Y;\ X \cap Y \in \widetilde{\mathfrak{U}}, Y \subseteq R\}$ и $\mathfrak{U}_X^* = \cup_{X' \subseteq X} \mathfrak{U}_{X'}$, где $\widetilde{X} \subseteq Q = \widetilde{R} - R$. Тогда

$$\widetilde{\mathfrak{U}} = \{X \cup Y; Y \in \mathfrak{U}_X,\ X \subseteq Q\}. \qquad (1)$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(S)$ систему всех подмножеств множества S. Пусть R — топологическое пространство, Q — множество и $R \cap Q = \varnothing$. Отображение $X \to \mathfrak{U}_X$ системы $\mathfrak{P}(Q)$ в систему $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(R))$ тогда и только тогда порождает на множестве $R \cup Q$ топологическое пространство с системой замкнутых множеств (1), являющееся расширением R, когда выполнены условия: 1) $\mathfrak{U}_Q^* = \mathfrak{U}$; 2) $\mathfrak{U}_X^*$ непусто, содержит все подмножества своих множеств и объединение любых двух из них; 3) Если $\mathfrak{U}_X \neq \varnothing$, то существует $A_X \in \mathfrak{U}_X$ такое, что $\mathfrak{U}_X = \{Y; A_X \subseteq Y \in \mathfrak{U}_X^*\}$; 4) $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathfrak{U}_X^* = \mathfrak{U}_{\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X}$ для всякого $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(Q)$; 5) Если $\mathfrak{U}_X$ и $\mathfrak{U}_{X'} \supset \varnothing$, то $\mathfrak{U}_{X \cup X'} \supset \varnothing$ и $A_{X \cup X'} = A_X \cup A_{X'}$; 6) $\mathfrak{U}_{\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X} = \varnothing$, если $\mathfrak{U}_X \supset \varnothing$ для всех $X \in \mathfrak{X}$.

Изучаются случаи, когда в этом расширении Q замкнуто и нигде не плотно (в $\widetilde{R}$) и когда $\widetilde{R}$ бикомпактно. В частности, автор получает в следующей форме известную теорему П. С. Александрова об одноточечной бикомпактификации пространства: С точностью до гомеоморфизма существует не более чем одно одноточечное бикомпактное расширение топологического пространства R, при котором присоединяемая точка обладает T_2-свойством. Такое расширение существует только тогда, когда R локально бикомпактно. Оно только тогда хаусдорфово, когда хаусдорфово само топологическое пространство R. Г. Я. Арешкин

11423. О компактификации пространств близости. Часар, Мрувка (Sur la compactification des espaces de proximité. Császár A., Mrówka S.), Fundam. math., 1959, **46**, № 2, 195—207 (франц.)

Вводится понятие „близостной базы" и близостного веса пространства близости (частные случаи близостных баз рассматривались в работе П. Александрова и В. Пономарева (РЖМат, 1959, 2457). Обозначая через θ близостный, а через τ обычный („топологический") вес пространства близости X, авторы доказывают неравенство $\tau \leqslant \theta \leqslant 2^\tau$ и дают новое доказательство основной теоремы Ю. М. Смирнова о взаимно однозначном соответствии между близостными строениями ν, совместными с данным вполне регулярным пространством X и его бикомпактными расширениями νX, отмечая, что вес бикомпакта νX равен близостному весу соответствующего ему пространства близости (X, ν). Доказывается также, что пространства близости счетного близостного веса, и только они, близостно эквивалентны (равномерно-гомеоморфны или „эквиморфны") вполне ограниченным метрическим пространствам. П. С. Александров

11424. Некоторые операторы на равномерных пространствах. Гинсберг, Исбелл (Some operators on uniform spaces. Ginsburg Seymour, Isbell J. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, № 1, 145—168 (англ.)

Главной своей заслугой авторы признают введение и изучение некоторого класса равномерных пространств, названных ими локально тонкими (см. п. 4.). Равномерное пространство P определяется здесь, следуя Таккею (Tukey J., Convergence and Uniformity in topology, Princeton, 1940 или Ю. Смирнов, Матем. сб., 1956, **31**, № 3, 283—302, РЖМат, 1957, 3874) с помощью равномерного строения, состоящего из покрытий. Покрытие γ пространства P называют равномерно локально равномерным, если существует покрытие $\omega \in \Sigma$ такое, что на каждом элементе $U \in \omega$ покрытие $\gamma \cap U$, состоящее из всех пересечений $\Gamma \cap U$, $\Gamma \in \gamma$, принадлежит строению $\Sigma \cap U$ покрытий $\eta \cap U$, где покрытия η пробегают все заданное строение Σ пространства P. Равномерное пространство P называется локально тонким, если всякое равномерно локально равномерное покрытие γ равномерно, т. е. $\gamma \in \Sigma$. Легко видеть, что всякое прекомпактное, а также всякое максимальное (fine) равномерное пространство (т. е. пространство, определяемое таким равномерным строением Σ_a, которое является максимальным из всех строений, порождающих одну и ту же топологию) является локально тонким. Однако класс локально тонких пространств не широк: полное метрическое пространство в своем естественном строении локально тонко тогда и только тогда, когда множество

A всех предельных точек компактно и когда при этом дополнение $P \setminus UA$ к любой окрестности UA компактна A равномерно дискретно в том смысле, что для всех пар xy, $x \neq y$, $x, y \in UA$, расстояния $\rho(x,y)$ ограничены снизу положительным числом, так что уже прямая не является локально тонкой. Отсюда непосредственно следует (РЖМат, 1960, 3618), что полное метрическое пространство локально тонко тогда и только тогда, когда на нем всякая непрерывная функция — равномерно непрерывна.

На локально тонкие пространства обобщается одна теорема Гельфанда—Колмогорова—Широта: пополнение локально тонкого пространства можно получить с помощью всех равномерно-непрерывных действительных функций.

Следствие: Локально тонкое пространство P полно тогда и только тогда, когда оно функционально-замкнуто относительно всех равномерно непрерывных функций, т. е. когда у пространства P нет ни одного такого равномерного расширения $\tilde{P}$, на которое все равномерно непрерывные функции можно непрерывно продолжить. Обобщается и теорема Урысона: всякая равномерно непрерывная функция, заданная на каком-либо подпространстве S локально тонкого пространства P можно продолжить в равномерно непрерывную функцию на все пространство P. Важное значение имеет следующая теорема: Для каждого равномерного пространства P со строением Σ в классе всех локально тонких равномерных строений Σ', более сильных чем Σ (т. е. $\Sigma' \supseteq \Sigma$), имеется минимальное строение Σ_λ; пространство локально тонко тогда и только тогда, когда $\Sigma = \Sigma_\lambda$.

§§ 1, 2, 3 носят общий в основном вспомогательный характер. Изучаются разбиения равномерного пространства, соответствующие равномерно непрерывным отображениям, при помощи равномерных отношений. Обобщается один результат Поспишиля: Мощность бикомпактного расширения, порождающего близость данного полного равномерного пространства, не меньше, чем $2^{\mathfrak{C}}$, где $\mathfrak{C}$ — мощность континуума. Доказываются вспомогательные утверждения, из которых интересны специальные теоремы: Если покрытие α дважды звездно вписано в покрытие γ ($\alpha^{**} < \gamma$) и обладает одним из следующих свойств, то существует покрытие β, обладающее тем же свойством, что γ, и такое, что $\alpha < \beta^* < \gamma$. Вот эти свойства покрытий: конечность, счетность, неизмеримость мощности по Уламу, конечномерность, звездная конечность, точечная конечность. При этом для всех свойств, кроме счетности, требование $\alpha^{**} < \gamma$ можно заменить на $\alpha^* < \gamma$. Операторы, о которых идет речь в данной работе, это переходы от данного строения Σ к тому или иному его подстроению, например оператор s перехода к подстроению всех счетных, звездно-конечных покрытий или оператор c перехода к таким покрытиям строения Σ, которые являются полными прообразами (при равномерно-непрерывных отображениях) равномерных покрытий евклидовых пространств. Некоторые из них являются функторами. Ю. М. Смирнов

11425. Пространства, обладающие единственным равномерным строением. Гал (Uniformizable spaces with a unique structure. Gal I. S.), Pacif. J. Math., 1959, **9** № 4, 1053—1060 (англ.)

Доказывается теорема: Хаусдорфово пространство обладает одним единственным равномерным строением тогда и только тогда, когда всякую ограниченную непрерывную действительную функцию, определенную на этом пространстве, можно приблизить такими ограниченными непрерывными действительными функциями, каждая из которых постоянна на дополнении к некоторому бикомпакту. Теорема доказывается непосредственно. В качестве следствий получается известный критерий Досса — если замкнутые множества функционально отделимы, то одно из них бикомпактно — (Does R., Amer. J. Math., 1949, **71**, 19—23), а также утверждение Самюэля о том, что все такие пространства локально бикомпактны (Samuel P., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 100—132). Ю. М. Смирнов

11426. Многозначные функции и частичная упорядоченность. Кейпел, Стротер (Multi-valued functions and partial order. Capel C. E., Strother W. L.), Portug. math., 1958, **17**, № 1-2, 41—47 (англ.)

Пусть X и Y — топологические хаусдорфовы пространства, а F — многозначное отображение пространства X в пространство Y (РЖМат, 1959, 9 59). F называется точечно-связным, если при этом отображении образ каждой точки $x \in X$ является связным множеством; F называется слабо (остаточно) непрерывным, если каково бы ни было $x \in X$ и открытое подмножество V пространства Y такое, что $F(x) \subset V$ (соответственно $F(x) \cap V \neq 0$) существует открытое подмножество U пространства X такое, что $x \in U$ и для любого $z \in U$ имеет место $F(z) \subset V$ (соответственно $F(z) \cap V \neq 0$); многозначное отображение F называется просто непрерывным, если оно слабо и остаточно непрерывно. Если F является непрерывным многозначным отображением X в Y, то всякое однозначное непрерывное отображение $y = f(x)$ пространства X в Y такое, что для каждого $x \in X$ имеет место $f(x) \in F(x)$, называется следом отображения F. Изучается вопрос о существовании следов и неподвижных точек многозначных отображений. Например, доказывается, что если Y является компактным и непрерывным (относительно имеющейся в нем топологии) частично упорядоченным пространством, то всякое отображение пространства X в Y такое, что при этом отображении образ каждой точки $x \in X$ имеет первый элемент, имеет след. При предположении, что пространство X является деревом, а отображение F пространства X в X слабо непрерывно и точечно-связно, доказывается, что отображение F имеет неподвижную точку. Л. Д. Кудрявцев

11427. О локально ограниченных функциях. Исэки (On locally bounded functions. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1959, **35** № 6, 279—280 (англ.)

Следуя Акуаро (РЖМат, 1957, 8525), автор называет вещественную функцию $f(x)$ на топологическом пространстве S локально ограниченной, если она ограничена в некоторой окрестности каждой точки этого пространства. В работе приведено несколько элементарных утверждений о связи этого понятия с различного рода компактностью. Например, если всякая локально ограниченная функция на S является ограниченной, то пространство псевдокомпактно. Е. А. Горин

11428. Компактность некоторых отображений. Уайберн (Compactness of certain mappings. Whyburn G. T.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 2, 306—314 (англ.)

Говорят, что пространство X обладает свойством Брауэра, если всякое подмножество пространства X, гомеоморфное некоторому открытому множеству пространства X, открыто в X. Если X и Y — гомеоморфные локально компактные пространства, обладающие свойством Брауэра, то каждое взаимно однозначное непрерывное отображение пространства X на пространство Y является гомеоморфизмом. В связи с этим строится пример замкнутого связного множества на плоскости, которое допускает взаимно однозначное непрерывное отображение на себя, не являющееся гомеоморфизмом. Однако это множество не обладает свойством Брауэра. Монотонное непрерывное отображение f пространства X на локально компактное пространство Y, обладающее

свойством Брауэра и гомеоморфное естественному разбиению пространства X, является компактным. Точно так же монотонное отображение евклидова многообразия M на себя, для которого пространство разбиения гомеоморфно M, является компактным. В частности, всякое монотонное отображение прямой на прямую и плоскости на плоскость являются компактными. Если $f(X)=Y$ — монотонное отображение плоскости X на топологическое пространство Y, то Y будет топологической плоскостью тогда и только тогда, когда отображение f компактно и прообразы точек не разбивают X, при этом компактность отображения существенна. Например, комплексную z-плоскость можно отобразить монотонно на единичную окружность $|w|=1$ посредством отображения $w=e^{im(z)}$, где $m(z)=2\pi r/(r+1)$, $r=[z]$, однако это отображение не будет компактным. В связи с этим автор приводит следующий критерий компактности монотонного отображения плоскости: Всякое монотонное отображение плоскости X на локально компактное пространство Y, содержащее открытую двумерную клетку, в котором всякая двумерная клетка есть открытое множество, является компактным.

А. С. Пархоменко

11429. Достаточные условия для того, чтобы отображение было открытым. Тайтус (Sufficient conditions that a mapping be open. Titus Charles J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10** № 6, 970—973 (англ.)

Пусть M, N — связные ориентированные n-многообразия. Отображение $f: M \to N$ называется квазиоткрытым, если для каждой точки $\pi \in f(N)$ и любого открытого множества U, содержащего компактную компоненту множества $f^{-1}(\pi)$, точка π есть внутренняя точка множества $f(N)$ в N. Открытое отображение квазиоткрыто. Существуют условия, при которых квазиоткрытые отображения являются открытыми (РЖМат, 1959, 3878). Поэтому представляет интерес нахождение достаточных условий того, чтобы отображение являлось квазиоткрытым. В работе дано такое условие.

Пусть W — множество всех точек из M, в которых отображение локально топологическое и не меняет ориентацию, Z — множество всех точек из M, в которых f не является локально взаимно однозначным отображением. Отображение $f: M \to N$ принадлежит классу F, если: 1) $W \cup Z = M$, 2) $f(z)$ не содержит внутренних точек, 3) f постоянно на каждой открытой компоненте множества z. Всякое отображение f из класса F квазиоткрыто или является тривиальным отображением компактного множества M в точку $f(M)$. Приведены примеры квазиоткрытых дифференцируемых отображений дифференцируемых многообразий.

А. Д. Тайманов

11430. Совокупности континуумов, которые в сумме составляют разбиение двумерного многообразия. Слай (Collections whose sums are two-manifolds. Slye John Marshall), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 275—298 (англ.)

Пусть S — компактное двумерное многообразие и пусть f — непрерывное отображение S на простую дугу Y. Автор доказывает, что если каждое $f^{-1}(y)$ является простой дугой, то S — двумерная клетка, а если каждое $f^{-1}(y)$ является простой замкнутой кривой, то S является либо кольцом, либо листом Мёбиуса, либо бутылкой Клейна.

R. H. Fox

Перевод из Math. Revs, 1960, **21**, № 3, 301

11431. Циклические элементы высших размерностей. Гэри (Higher dimensional cyclic elements. Gary John), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 4, 1061—1070 (англ.)

Изучаются циклические элементы высших размерностей, введенные Уйаберном (Whyburn G. T., Amer. J. Math., 1934, **56**, 133—146). Получены результаты, продолжающие исследования Симона (РЖМат, 1960, 1494), о связи группы когомологий и циклических элементов топологического пространства. Свойства нульмерных циклических элементов в локально связных пространствах и связь этих циклических элементов с монотонными отображениями являются основными в приложениях теории нульмерных циклических элементов. Построен пример, показывающий невозможность перенесения этих свойств на циклические элементы высших размерностей.

В. И. Кузьминов

11432. Теорема о продолжении гомотопии в банаховых пространствах и ее некоторые приложения в теории нелинейных уравнений. Гранас А., Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 7, 387—394 (рез. англ.)

Пусть X_0 — граница открытого множества X, лежащего в банаховом пространстве E, и пусть $f_0(x)=x-F_0(x)$ — вполне непрерывное ($F_0(X_0)$ компактно) векторное поле, заданное на X_0 и не обращающееся в нуль. $f_0(x)$ называется несущественным, если существует вполне непрерывное продолжение на X поля $f_0(x)$, не обращающееся в нуль. В противном случае поле $f_0(x)$ называется существенным. Основной результат работы касается вопроса о продолжении решения уравнения $x-F(x)=0$ по параметру и заключается в следующей теореме: Свойство существенности, а также несущественности вполне непрерывного неисчезающего векторного поля является инвариантом гомотопии.

Примечание референта. Эта теорема, а также указанные автором следствия из нее известны, но ранее формулировались в других терминах.

Ю. Г. Борисович

11433. Соотношения между категорией и n-мерной категорией. Ганя (Relations between category and n-dimensional category. Ganea Tudor), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, **2**, 327—329 (англ.)

Пусть X — связное, локально линейно связное паракомпактное пространство, над которым доминирует некоторый комплекс с клеточным разбиением (РЖМат, 1960, 2775). Обозначим через ΔX наименьшую размерность таких комплексов, доминирующих над X. Автор доказывает, что в случае, когда пространство X асферично, $\Delta X = \mathrm{cat}X = \mathrm{cat}_1 X$ (под асферичным пространством понимается пространство, удовлетворяющее условию $(X)=0$ при $i \geqslant 2$, через $\mathrm{cat}X$ обозначается категория пространства X, через $\mathrm{cat}_1 X$ обозначается одномерная категория пространства X).

А. С. Шварц

11434. Двойственность групп гомологий и когомологий в теории пучков. Кульце (Dualität von Homologie- und Cohomologiegruppen in der Garbentheorie. Kultze Rolf), Arch. Math., 1959, **10**, № 6, 438—442 (нем.)

Дается конструкция групп гомологий с коэффициентами в копучке как объектов, двойственных группам когомологий с коэффициентами в соответствующем (двойственном) пучке. Пусть X — топологическое пространство, K — коммутативное кольцо с единицей. Говорят, что на X задан копучок G (K-модулей), если для каждого открытого множества U пространства X определен K-модуль G_U и для каждой пары открытых в X множеств $U \subset V$ определен K-гомоморфизм $r_U^V: G_U \to G_V$, причем: 1) если $U \neq \emptyset$, то $G_U \neq 0$; 2) если $U = V$, то r_U^V — тождественный гомоморфизм; 3) если $U \subset V \subset W$, то $r_U^W = r_V^W \cdot r_U^V$. Понятия пучка и копучка двойственны и потому для копучков естественно вводятся понятия, двойственные таким понятиям теории пучков, как гомоморфизм, ядро, коядро, подпучок, факторпучок, точная последовательность и т. д. q-мерная группа гомологий $H_q(X, \mathfrak{G})$ ($q \geqslant 0$) пространства X с коэффициентами в копучке G определяется как проективный предел групп $H_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ при очевидном опреде-

лении $H_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X и гомоморфизмов $t^{\mathfrak{U}}_{q\mathfrak{V}}: H_q(\mathfrak{V}, G) \to H_q(\mathfrak{U}, G)$ для любых $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$ — вписано в $\mathfrak{U}$). Рассматривается случай, когда основной пучок G' является $\mathfrak{F}$-пучком (все G'_U являются $\mathfrak{F}$-пространствами, т. е. полными, метрическими, локально выпуклыми, комплексными топологическими векторными пространствами) и G — копучок, топологически двойственный G', а X — счетное на бесконечности локально компактное пространство. Автор формулирует ряд теорем типа двойственности и конечности, которые, как он замечает, могут быть доказаны известными методами теории пучков и теории топологических векторных пространств. А. А. Иванов

11435. Соотношения между гомотопическими группами и группами гомологий и некоторые их применения. Чжоу Сюе-гуан (The relations between homotopy groups and homology groups and some of their applications. Chow Sho-kwan), Scientia sinica, 1958, 7, № 7, 686—703 (англ.)

Перевод с китайского, см. РЖМат, 1958, 9670.

11436. О внутренних неравенствах, связанных с некоторыми непрерывными отображениями и их приложениях к расслоенным пространствам. Чжан Су-чэн (Chang Su-cheng), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9 № 1, 51—68 (кит.; рез. англ.)

Полное изложение опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1959, 6734). М. М. Постников

11437. Об инвариантных гомоморфизмах гомотопических групп сфер. Чжан Су-чэн (On invariants of homotopy groups of spheres. Chang Su-cheng), Sci. Rec., 1960, 4, № 2, 88—90 (англ.)

На группе $\pi_{i+1}(S^{n+1})$, где $i = pn + r$, $p \geqslant 1$, $0 \leqslant r < n - 1$, строится ряд гомоморфизмов $H_{p-1}, K_{p-1}, \ldots, H_1, K_1$, из которых каждый определен на ядре предшествующего. Все эти гомоморфизмы равны нулю на надстроечных элементах и только на них. При $p = 2$ отображение K_1 тривиально, а отображение H_1 сводится к обобщенному инварианту Хопфа. М. М. Постников

11438. Накрывающие пространства и инвариант k. Мурасуги (Covering spaces and the invariant k. Murasugi Kunio), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1955, A5, 31 March, 49—51 (англ.)

Устанавливается связь между n-м фактором гомотопической резольвенты (натуральной системы) некоторого пространства X и соответствующим фактором пространства (X, u), убивающего гомотопические группы пространства X до размерности $n - 1$ включительно.

М. М. Постников

11439. Приведенные степени пространств. Джеймс И. М. (James I. M.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 3, 3—33

См. РЖМат, 1960, 1505.

11440. Надстроечные триады сфер. Джеймс И. М. (James I. M.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 2, 25—46

См. РЖМат, 1960, 1507.

11441. Приведенные соединения и произведения Уайтхеда. Тода Хироси (Toda H.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 3, 3—20

См. РЖМат, 1958, 9667.

11442. Несуществование отображений сферы S^{31} в сферу S^{16} с инвариантом Хопфа равным единице. Тода Хироси (Toda H.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 3, 21—24

См. РЖМат, 1958, 1092.

11443. Несколько следствий одной теоремы Ботта. Милнор Дж. (Milnor J.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, 3, № 3, 3—7

См. РЖМат, 1959, 9877.

11444. О многообразиях гомеоморфных семимерной сфере. Милнор Джон (Milnor J.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 3, 35—42

См. РЖМат, 1959, 6939.

11445. Теория классов Чжэня (приложение к мемуару А. Бореля и Ж. П. Серра). Гротендик (La théorie des classes de Chern. Appendice au mémoire de A. Borel et J.-P. Serre. Grothendieck Alexander) Bull. Soc. math. France, 1958, 86, № 2, 137—154 (франц.)

Пусть X — неособое алгебраическое пространство над алгебраически замкнутым полем, E — векторное расслоенное пространство над X. Обозначим через $P(E)$ присоединенное расслоение, слоем которого является проективное пространство. Над пространством $P(E)$ существует естественное расслоение на прямые; сопряженное к нему расслоение обозначается через L_E. Допустим, что задана категория V, состоящая из неособых алгебраических пространств и обладающая тем свойством, что, если $X \in V$ и E — векторное расслоенное пространство над X, то $P(E) \in V$. Допустим также, что заданы: контравариантный функтор $X \to A(X)$ из категории V в категорию антикоммутативных градуированных колец с единицей; функциональный гомоморфизм $p_X: G(X) \to A^2(X)$ ($X \in V$), где $G(X)$ — группа расслоений на комплексные прямые с базой X; для всякого $X \in V$ и всякого замкнутого подпространства $Y \subset X$ коразмерности p аддитивный гомоморфизм $i_*: A(Y) \to A(X)$, увеличивающий степени на $2p$ единиц. Элемент $i_*(1)$ обозначается через $z_X(Y)$. Допустим, что выполняются следующие три условия: 1) Пусть $X \in V$, E — векторное расслоенное пространство над X с p-мерным слоем. Положим $\xi_E = p_{P(E)}(L_E) \in A(P(E))$. Гомоморфизм $f^*: A(X) \to A(P(E))$, связанный с проекцией $f: P(E) \to X$, позволяет рассматривать $A(P(E))$ как $A(X)$-модуль. Требуется, чтобы элементы $\xi_E^i (i = 0, \ldots, p-1)$ составляли базис модуля $A(P(E))$ над $A(X)$. 2) Пусть E — векторное расслоение над X, $X' \subset E$ — образ нулевого сечения. Сечение $s: X \to E$ расслоения E называется трансверсальным к нулевому сечению, если в каждой точке множества $s^{-1}(X')$ касательное к s отображение является эпиморфизмом по модулю касательного пространства к X'. Требуется, чтобы для всякого расслоения на прямые L над $X \in V$ и всякого сечения s в этом расслоении, трансверсального к нулевому сечению и такого, что множество его нулей $Y \in V$, имело место равенство $p_X(Y) = p_X(L)$. 3) Если $Z \subset Y \subset X$ и $X, Y, Z \in V$, причем $i: Z \to Y$ и $j: Y \to X$ — вложения, то $(ji)_* = j_* i_*$. 4) Если $X, Y \in V$, $Y \subset X$, i — вложение, то $i_*(bi^*(a)) = i_*(b)\, a$ ($a \in A(X)$, $b \in A(Y)$. Пусть теперь E — векторное расслоенное пространство над $X, \in V$ с p-мерным слоем. Из требования 1) следует, что существуют однозначно определенные элементы $c_i(E) \in A^{2i}(X)$, удовлетворяющие равенству $\sum_{i=0}^{p} c_i(E) \xi_E^{p-i} = 0$, причем $c_0(E) = 1$. Элементы $c_i(E)$ и $c(E) = \sum_i c_i(E)$ называются классами Чженя расслоения E. Доказывается, что они обладают следующими свойствами, которые определяют их однозначно: если $f: X \to Y$ — морфизм в категории V, E — расслоение над Y, $f^{-1}E$ — индуцированное расслоение над X, то $c(f^{-1}E) = f^* c(E)$; если E — расслоение на прямые над X, то $c(E) = 1 + p_X(E)$; если $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность векторных расслоений над X, то $c(E) = c(E')\, c(E'')$. Требования 1) — 4) выполняются, в частности, в том случае, когда V — категория всех неособых квазипроективных алгебраических пространств, а $A(X)$ — кольцо классов циклов на X относительно рациональной экви-

валентности. Отсюда выводится, что кольцо $A(X)$ изоморфно, с точностью до периодических групп, градуированному кольцу $GK(X)$, присоединенному к кольцу $K(X)$ классов когерентных пучков на X с некоторой фильтрацией. Аксиомы выполнены также в случае, когда V — категория всех неособых алгебраических пространств над полем комплексных чисел, $A(X)$ — кольцо целочисленных когомологий пространства X. В заключение при некоторых дополнительных условиях (выполненных в указанных выше случаях) доказывается, что если E — векторное расслоение с p-мерным слоем над $X \in V$, s — его регулярное сечение, трансверсальное к нулевому сечению, и Y — множество нулей сечения s, то $p_X(Y) = c_p(E)$. А. Л. Онищик

11446. О подмногообразиях некоторых функциональных пространств. Илс (On submanifolds of certain function spaces. Ells James, Jr), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 10, 1520—1522 (англ.)

Пусть M — гладкое многообразие. Если $R \subset M$, то через E_R будем обозначать пространство путей в многообразии M, выходящих из точки $m_0 \in M$ и кончающихся в множестве R. Пусть A и B — гладкие замкнутые подмногообразия многообразия M такие, что $A \subset B$ и $\dim B - \dim A = r$ (т. е. A — гладкое подмногообразие многообразия B „коразмерности" r). Тогда группа когомологий $H^i(E_A)$ изоморфна группе когомологий, $H^{i+r}(E_B, E_{B-A})$ (группы когомологий берутся с коэффициентами в группе Z_2, для целочисленных групп когомологий теорема верна, если группы когомологий пространства E_A рассматривать с коэффициентами в некоторой локальной системе). Доказательство этой теоремы основано на том, что слегка модифицируя определения пространств E_A и E_B, можно считать, что эти пространства являются бесконечномерными гладкими многообразиями, причем E_A является гладким подмногообразием многообразия E_B „коразмерности" r.

Приводятся некоторые следствия сформулированной выше теоремы. Указывается, в частности, что имеет место точная последовательность $\to H^{i-1}(E_{B|A}) \to H^i(E_A) \to H^i(E_B) \to H^i(E_{B|A}) \to$. Полагая в этой точной последовательности $B = M$ и замечая, что E_M стягиваемо, можно убедиться, что $H^{q-1}(E_{M \setminus A}) = H^{q-r}(E_A)$ при $q > 1$. А. С. Шварц

11447. Существование областей голоморфности с наперед заданной первой группой Бетти. Рамшпотт (Existenz von Holomorphiegebieten zu vorgegebener erster Bettischer Gruppe. Ramspott Karl-Josef), Math. Ann., 1959, 138 № 4, 342—355 (англ.)

Пусть B — любая счетная абелева группа без кручения. Доказывается, что если $n > 1$, то в пространстве C^n существует ограниченная область голоморфности, одномерная группа Бетти которой изоморфна B. А. Л. Онищик

11448. Характеристические числа однородных областей. Хирцебрух (Characteristic numbers of homogeneous domains. Hirzebruch F.), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, 1958, 92—104 (англ.)

Пусть X — ограниченная симметрическая область в m-мерном аффинном комплексном пространстве, ds^2 — инвариантная келерова метрика в X, ω — внешняя форма, связанная с ds^2. Тензор кривизны метрики ds^2 представляется матрицей Ω, состоящей из формы типа $(1, 1)$. Пусть $c = \det(E - (1/\pi i)\Omega)$. Тогда $c = 1 + c_1 + \ldots + c_m$, где c_k — компонента типа (k, k). Если $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ — разбиение числа m и $c_{(\lambda)} = c_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge c_{\lambda_r}$, то $c_{(\lambda)} = (-\pi)^{-m} d_{(\lambda)}$ $(\omega^m/m!)$, где $d_{(\lambda)}$ — действительные числа, которые называются характеристическими числами области X. Дается метод для вычисления чисел $d_{(\lambda)}$. Пусть область X неприводима и пусть X' — соответствующее ей симметрическое алгебраическое многообразие. Тогда из результатов автора (Hirzebruch F., 1960, 1140K) следует, что $d_{(\lambda)} = m!\,(c_{(\lambda)}(X')/c_1(X')^m$, где $c_{(\lambda)}(X')$ и $c_1(X')$ — соответственно характеристические числа и первый класс Чженя многообразия X'. Мы имеем $X' = G/U$, где G — простая компактная группа Ли. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — положительные корни группы G, не принадлежащие U, и пусть b_1 — простой корень. Доказывается, что $c_1(X')^m = m!\,2^m\,(b,\ b_1)^m / \prod_{k=1}^{m}(a, b_k)$.

С помощью этой формулы автор находит для обобщенной верхней полуплоскости Зигеля X число d_m и эйлерову характеристику компактного многообразия X/Δ, где Δ — дискретная группа автоморфизмов, не имеющая неподвижных точек. Дается также формула для степени однородного вложения многообразия X' в комплексное проективное пространство. А. Л. Онищик

11449. Гомологии компактных групп Ли. Дынкин (Homologies of compact Lie groups. Dynkin E. B.), Amer. Math. Soc. Translat., 1959, 12, 251—300 (англ.)
См. РЖМат, 1954, 4770.

11450. Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли. Дынкин (Topological characteristics of homomorphisms of compact Lie groups Dynkin E. B.), Amer. Math. Soc. Translat., 1959, 12, 301—342 (англ.)
См. РЖМат, 1955, 2607.

11451. Когомологии моноидальных преобразований. Сампсон, Уошницер (Cohomology of monoidal transforms. Sampson J. H., Washnitzer G.), Ann. Math., 1959, 69 № 3, 605—629 (англ.)

Пусть U — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие без особенностей над алгебраически замкнутым полем и пусть $x_1, \ldots, x_m$ — регулярные функции на U, обладающие следующим свойством (C): для каждой точки $p \in U$ функции $x_i - x_i(p)$ образуют подмножество некоторой регулярной системы параметров в локальном кольце точки p. Пусть P — $(m-1)$-мерное проективное пространство с однородными координатами $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Обозначим через U^* подмножество в $U \times P$, которое определяется уравнениями $\tau_i x_j - \tau_j x_i = 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Рассмотрим теперь произвольное неприводимое многообразие X без особенностей размерности r, и пусть V — его подмногообразие без особенностей размерности $d < r - 1$. Существует конечное покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия X открытыми аффинными множествами, обладающее следующими свойствами: если $V_\alpha = U_\alpha \cap V$ непусто, то оно задается уравнениями $x_i^\alpha = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r-d)$, где x_i^α — регулярные функции в U_α, удовлетворяющие условию (C); если $V_\alpha \| V_\beta \neq 0$, то в $U_\alpha \cap U_\beta$ существуют такие регулярные функции $f_{ij}^{\alpha\beta}$ и $f_{ij}^{\beta\alpha}$, что $x_i^\alpha = \sum_j f_{ij}^{\alpha\beta} x_j^\beta$ и $x_i^\beta = \sum_j f_{ij}^{\beta\alpha} x_j^\alpha$. Для каждого α рассмотрим определенное выше многообразие U_α^*. С помощью функций $f_{ij}^{\alpha\beta}$ можно склеить эти многообразия в новое многообразие X^*, которое называется моноидальным преобразованием многообразия X с центром в V. Существует естественное регулярное отображение π многообразия X^* на X. Основной результат работы заключается в том, что если F — локально свободный пучок на X или когерентный пучок на V, продолженный нулем на все X, и если F^* — его алгебраический обратный образ на X^*, то $\pi^*: H^q(X, F) \to H^q(X^*, F^*)$ является изоморфизмом для всех q. Отсюда следует, что если X — полное проективное многообразие, то X и X^* имеют один и тот же арифметический род. Другое следствие состоит в том, что

$\chi(X^*,\Omega^1_{X^*})=\chi(X,\Omega^1_X)-\chi(V,O_V)$, где Ω^1_X, $\Omega^1_{X^*}$ — пучки ростков простых дифференциалов на X и X^*, а O_V — пучок локальных колец на V. В конце работы изучаются пучки $\mathrm{Tor}^0_p(G_V,\ 0^*)$ на $V^*=\pi^{-1}(V)$, где G_V — когерентный пучок на V, O и O^* — пучки локальных колец на X и X^*. В частности, доказывается, что эти пучки когерентны и что $H^q(V^*,\ \mathrm{Tor}^0_p(G_V,O^*))=0$ для $q\geqslant 0$ и $p>0$. А. Л. Онищик

11452. О гомологиях, ассоциированных с некоторым множеством дифференциалов. Норге (Sur l'homologie associée à une famille de dérivations. Norguet François), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 15, 1081—1083 (франц.)

Автор находит достаточное условие для того, чтобы при всех m и $\{\omega_i\}$, $1\leqslant i\leqslant p$, имело место следующее утверждение: из $(\wedge\omega_i)\wedge m=0$ следует $m=\sum\omega_i\wedge m_i$ для некоторого набора $\{m_i\}$. Здесь ω_i — элементы конечно порожденного свободного модуля A^n над коммутативным кольцом A с единицей; m — элемент тензорного произведения $M\otimes E$, где M — унитарный A-модуль, E — внешняя алгебра, порожденная модулем A^n; символ $\wedge$ обозначает внешнее произведение. Если $p=1$, то утверждение полученной теоремы сводится к известному результату де Рама (РЖМат, 1956, 6114). Более общая задача может быть поставлена в абелевых категориях, но попыток для ее решения в рассматриваемой заметке не делается. D. Zelinsky

Перевод из Math. Revs, 1960, **21**, № 1, 77.

11453. Теория когомологий и дифференты. Куниёси, (Cohomology theory and different. Kuniyoshi Hideo), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 3, 313—337 (англ.)

Пусть R — дедекиндово кольцо, K — его поле отношений, L — конечное сепарабельное расширение K, Λ — максимальный порядок (единственный) L над R, A — двусторонний Λ-модуль. В группы гомологий и когомологий $H_n(\Lambda,A)$ и $H^n(\Lambda,A)$ естественным образом вводится структура двусторонних Λ-модулей. Множество $\lambda\in\Lambda$ таких, что $\lambda H_n(\Lambda,A)=0$ для всех A, называется n-мерной левой гомологической дифферентой Λ/R. Аналогично определяются правые, двусторонние, а также когомологические дифференты для Λ/R. Все эти дифференты равны между собой и совпадают с обычной дифферентой для Λ/R (определяемой с помощью $Sp_{L|K}$). Б. Б. Венков

11454. Проективные инъективные модули. Джанс (Projective injective modules. Jans J. P.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 4, 1103—1108 (англ.)

Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы точный неприводимый (правый, унитарный) модуль над примитивным кольцом R с минимальными правыми идеалами был инъективным (он автоматически является проективным). Условие сформулировано в терминах, введенных в гл. IV книги Джейкобсона (РЖМат, 1959, 1303К). В качестве следствия получается, что $R=S+K$ (сумма прямая), где S — простое кольцо с условием минимальности, если R имеет левые и правые неприводимые проективные инъективные модули с одним и тем же аннулятором K. Пусть далее T — любой R-модуль и $Q(T)$ — однозначно определенный, наименьший в некотором смысле (точное определение в работе Экмана и Шопфа, РЖМат, 1954, 2870), инъективный модуль, содержащий T в качестве подмодуля. Доказано, что если нетерово справа кольцо R имеет минимальный точный левый модуль M (точный инъективный модуль, являющийся прямым слагаемым каждого точного модуля), то левый модуль $Q(R)$ проективен. Обращение этого утверждения дано для полупримарных колец: если R — полупримарное кольцо с проективным левым модулем $Q(R)$, то R имеет минимальный точный модуль. Для колец с условием минимальности отсюда вытекает утверждение, доказанное ранее Тролем (Thrall R. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 173—183, теорема 5) лишь для конечномерных алгебр. А. И. Кострикин

11455 К. Топологические теоремы двойственности. I. Замкнутые множества. Александров (Die topologischen Dualitätssätze. I. Abgeschlossene Mengen. Alexandroff P. (Math. Forschungsber., 7). Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 106 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского, РЖМат, 1956, 2070.

См. также: 11332, 11530—11532, 11598, 11742, 12013, 12033, 12088, 12096.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А Конюшков*

11456. К теории лебеговской меры. Пхакадзе Ш. С., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР Мецниереба Академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1958, **25**, 3—271

Работа представляет собою фундаментальное исследование, посвященное изучению инвариантных продолжений меры Лебега. Известно, что такие продолжения существуют, однако до сих пор наши сведения о них были весьма скудны и сводились в основном к примерам. Автору удалось доказать о них ряд общих структурных теорем.

Класс подмножеств евклидова пространства R^n называется допустимым, если он замкнут относительно операций вычитания и счетного сложения множеств, инвариантен относительно изометрических преобразований пространства и содержит единичный куб. Неотрицательная функция, определенная на допустимом классе, называется инвариантной мерой, если она счетно-аддитивна, инвариантна относительно изометрических преобразований пространства и равна 1 на единичном кубе. Допустимый класс, на котором существует инвариантная мера, называется разрешимым. Множество $X\subset R^n$ называется абсолютно нульмерным, если любая счетная сумма множеств, конгруэнтных X, содержится в некотором разрешимом классе и имеет меру нуль относительно всякой инвариантной меры, определенной на таком классе. Множество $X\subset R^n$ называется собственно почти инвариантным, если всякое множество X', конгруэнтное X, отличается от X на множество неконтинуальной мощности и всякое множество неконтинуальной мощности отличается как от X, так и от его дополнения, на множество с положительной внешней мерой Лебега. Значительная часть работы посвящена изучению свойств абсолютно нульмерных и собственно почти инвариантных множеств и их построению. Собственно почти инвариантные множества строятся в R^n при любом n, абсолютно нульмерные множества, неизмеримые по Лебегу, строятся в R^1 и R^2 (существуют ли они в R^n при $n>2$ — неизвестно). Устанавливается, что счетная сумма абсолютно нульмерных множеств может не быть абсолютно нульмерным множеством. По-

строения проводятся теоретико-групповыми средствами. Опираясь на эти построения, автор разрабатывает общие методы расширения разрешимых классов и продолжения инвариантных мер (эти методы представляют собой усиление и обобщение метода, предложенного Шпильрайном для продолжения меры Лебега). В частности, доказывается, что всякий разрешимый класс может быть включен в более широкий разрешимый класс. Эта теорема тесно связана с проблемой Серпинского: существует ли инвариантная мера, не допускающая продолжения? Доказывается, что из гипотезы континуума (а также из гипотезы: всякое кардинальное число, не превосходящее мощности континуума, достижимо) следует отрицательное решение проблемы Серпинского. Инвариантная мера μ называется мерой типа (B), если для всякого множества X с $\mu(X)>0$ существует такая счетная сумма X' множеств, конгруэнтных X, что $\mu^*(R^n - X) = 0$. Доказывается, что если на разрешимом классе существует полная инвариантная мера типа (B) (полнота означает, что мера определена для всех подмножеств множеств меры нуль), то других инвариантных мер на этом классе не существует, а если на разрешимом классе существует инвариантная мера, не удовлетворяющая условию (B), то на этом классе существует континуум инвариантных мер. Если множество E принадлежит к разрешимому классу, на котором определена инвариантная мера μ, и обладает тем свойством, что $\mu(E\,\Delta E') = 0$ для всякого множества E', конгруэнтного E, но $\mu(E)>0$, то формула $\mu_1(X) = \mu(XE)$ определяет на том же разрешимом классе функцию, только постоянным множителем отличающуюся от некоторой инвариантной меры. Эта функция называется частью меры μ. Если мера μ удовлетворяет условию (B), то она является своей единственной частью. Для инвариантных мер, не удовлетворяющих условию (B), строится каноническое разложение $\mu = \mu_0 + \sum_k \mu_k$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — части меры μ, удовлетворяющие условию (B), а μ_0 — либо нуль, либо часть меры μ. Если $\mu_0 = 0$, то мера μ называется элементарной. Доказывается существование элементарных мер с любым конечным или счетным числом слагаемых μ_k. Существуют ли неэлементарные меры — неизвестно, вопрос о непрерывном разложении меры не ставится. Если мера обладает частью типа (B), то для нее проблема Серпинского решается отрицательно независимо от каких-либо дополнительных гипотез. Если заменить группу всех изометрических преобразований пространства R^n какой-либо ее подгруппой F, то возникнет новое понятие инвариантности и все предыдущие определения приобретут новый смысл, зависящий от выбора F. Значительная часть работы написана применительно к произвольной группе F, по мере надобности на нее накладываются те или иные ограничения. Рассмотрение различных групп F позволяет получить много новых результатов. Например, доказывается, что в R^n при любом n существуют неизмеримые по Лебегу множества, абсолютно нульмерные относительно группы всех переносов.

Многие результаты работы были кратко опубликованы ранее (РЖМат, 1955, 2610, 3674; 1956, 5790; 1957, 268, 5435; 1958, 1946).

Примечание референта. Терминология автора в ряде случаев вызывает возражения; особенно это относится к „абсолютно нульмерным множествам".

В. А. Рохлин

11457. Абсолютно сходящиеся ряды и мера Хаусдорфа. Шалат (Absolut konvergente Reihen und das Hausdorffsche Mass. Salát Tibor), Чехосл. матем. ж., 1959, 9, № 3, 372—389 (нем.; рез. русск.)

Изучаются с точки зрения меры Хаусдорфа линейные множества, определенные абсолютно сходящимися рядами.

Пусть $M \subset [-A, A]$, $A>0$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, $I_1 \subset [-A, A]$, I_n состоит из конечного числа g_n не перекрывающихся сегментов одинаковой длины λ_n. Пусть для некоторого $a \in (0, 1)$ $\tau(n) = \lambda_{n+1}/\lambda_n < c$. Положим $l = \varliminf_{n\to\infty} \tau(n)$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} \tau(n)$ и на $[0, a]$ определим функцию $f(x)$: $f(0) = 0$ и для $0 < x < a$ $f(x) = \log 2/\log x^{-1}$. Тогда имеет место теорема 1.1 о хаусдорфовой размерности линейных множеств:

Пусть $g_n = 2^{n\mu_n}$, $\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n < +\infty$, каждое из множеств I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ состоит из g_n интервалов i_n^m $(m = 1, 2, \ldots, g_n)$, причем каждый из интервалов i_n^m содержит одинаковое число интервалов $i_{n+1}^m \subset I_{n+1}$. Тогда $\mu f(l) \leqslant \dim M \leqslant \mu f(L)$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходящийся ряд с положительными членами и $a_k > R_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} (k = 1, 2, \ldots)$, то $R_{n+1}/R_n < 1/2$. Пусть W обозначает множество всех тех действительных чисел x, которые можно выразить в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, где $\varepsilon_n = 1$ или -1. Тогда имеют место теоремы:

Теорема 2.1. $f(l) \leqslant \dim W \leqslant f(L)$, где $l = \varliminf_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$, $L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$ и $f(x)$ определена на $[0, 1/2]$ так, как указано выше.

Теорема 2.2. Пусть $\dim W = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что $a_{n+1} < \varepsilon a_n$.

Теорема 2.3. Пусть $\dim W = 1$. Тогда для каждого q, $0 < q < 1/2$, существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что $a_{n+1} > q a_n$.

Пусть $\mu(M)$ — лебегова мера множества M, $f(n, x)$ — количество чисел $+1$ в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $g(n, x)$ — количество чисел -1 в той же последовательности и $x = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n a_n \in W$. Тогда справедлива

Теорема 3.1. Пусть $\mu(W) > 0$. Обозначим через $W(\eta)$, $0 < \eta < 1/2$, множество всех тех $x \in W$, для которых неравенство $f(n, x) < \eta n$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах n. Тогда $\dim W(\eta) = \frac{\eta \log \eta + (1-\eta)\log(1-\eta)}{\log \frac{1}{2}}$.

Для меры Хаусдорфа справедлива

Теорема 3.2. Если $\mu(W) = 0$, то $\dim \overline{W} \geqslant f(l)$, где $l = \varliminf_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$ и $\overline{W} = E_{x\in W} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$.

Ф. И. Шмидо

11458. Условия эквивалентности постоянной функции интегрируемых в смысле Римана, и функций со свойством Бэра. Маркус (Condiţii de echivalenţă cu constantă pentru funcţii integrabile Riemann şi funcţi cu proprietatea lui Baire. Marcus S.), An. Univ «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1959, № 22, 59—6 (рум.; рез. русск., франц.)

11459. Функция с почти ограниченной второй вариацией и интеграл Стилтьеса 2-го порядка. Лю Тунцзюе, Шаньси шифань сюэюань сюэбао, Shanxi shi fan xueyuan xuebao, 1959, № 2, 123—128 (кит.)

11460. Интегралы Беркилла, зависящие от параметра Зитек (Burkillovy integrály závislé na parametru

Zítek František), Časop. pěstov. mat., 1959, 84, № 2, 165—176 (чешск.; рез. русск., нем.)

Исследуются (вообще комплексные) функции f двух переменных, определенные на $\mathbf{K}\times X$, где $\mathbf{K}$ — система всех подынтервалов типа $<,)$ конечного действительного интервала $K=<a, b)$ и $X\subset R=(-\infty, \infty)$. Автор пользуется следующим понятием равномерной сходимости интеграла Беркилла: интеграл $F(K, x)=\int_K f(I, x)$ сходится равномерно по $x\in X$, если для каждого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство $\sup_{x\in X}\left|\sum_{I\in D} f(I, x)-F(K, x)\right|<\varepsilon$ для любого разбиения D интервала K, норма которого достаточно мала.

При помощи этого понятия доказано несколько теорем о предельном переходе, дифференцировании и интегрировании под знаком интеграла Беркилла, которые в большинстве случаев вполне аналогичны теоремам для интегралов Римана и Лебега. Даются также некоторые применения полученных результатов на случай интегралов Римана и Лебега. V. Dlab

11461. Краткое доказательство теоремы вложения типа теоремы Кондрашова. Шептыцкий (A simple proof of an imbedding theorem of the Kondrashev type. Szeptycki P.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 9, 561—564 (англ.; рез. русск.)

Дается новое доказательство одной из теорем вложения В. И. Кондрашова (см., например, Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Л., 1950), но для другого чем у В. И. Кондрашова класса областей. Рассматривается класс областей G n-мерного евклидова пространства R^n, введенный Ниренбергом (РЖМат, 195 , 1 03) и называемый классом областей с сильным коническим условием. Это условие состоит в том, что для каждой области G этого класса существует фиксированный n-мерный сферический сектор Σ такой, что для любых двух точек $x\in G$ и $y\in G$ найдутся два сферических сектора Σ_x и Σ_y с центрами соответственно в точках x и y, которые изометричны с конусом Σ и таковы, что $\operatorname{mes}\{z: z\in\Sigma_x\cap\Sigma_y,\ \rho(x, z)<\rho(x, y),\ \rho(y, z)<\rho(x, y)\}\geqslant\lambda|x-y|^n$, где λ для данной области — некоторая постоянная, т. е. не зависит от выбора точек x и y. На указанных областях G рассматриваются классы непрерывных функций $C(G)$ и соболевские классы $W_p^{(l)}$ (см. указанную выше книгу С. Л. Соболева). Для n-мерной ограниченной области G, удовлетворяющей сильно коническому условию, доказывается теорема В. И. Кондрашова: Если натуральное число l удовлетворяет неравенству $l\geqslant[n/p]+1$, $p>1$, то $W_p^{(l)}(G)\subset C(G)$, и оператор вложения пространства $W_p^{(l)}$ в пространство $C(G)$ является вполне непрерывным оператором. При доказательстве используются некоторые неравенства Ниренберга со степенным весом для норм функций и их производных, рассматриваемых на сферических секторах (РЖМат, 1958, 1202). Л. Д. Кудрявцев

11462. Задача о коэрцитивности для интегро-дифференциальных форм. Агмон (The coerciveness problem for integro-differential forms. Agmon Shmuel), J. Analyse math., 1958, **6**, № 2, 183—223 (англ.)

Пусть $\mathfrak{D}$ — область пространства E^n, $u(x)$ — комплексная функция точки, $\|u\|^2_{m,\mathfrak{D}}$ — квадрат нормы, содержащий интегралы от квадратов всех производных порядка $<m$ в $\mathfrak{D}$. Пусть

$$A[u, u]=\int_{\mathfrak{D}}\sum_{|\alpha|,|\beta|<m} a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u\,\overline{D^\beta u}dx;$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n};\ D_k=-i\partial/\partial x^k,$$

где $a_{\alpha\beta}$ — измеримые ограниченные функции. Пусть U — некоторый класс функций с конечной m-нормой. Форма A называется коэрцитивной над U, если существуют постоянные $c>0$, $c_0\geqslant 0$ такие, что

$$\operatorname{Re}A[u, u]\geqslant c\|u\|^2_{m,\mathfrak{D}}-c_0\|u\|^2_{0,\mathfrak{D}}$$

для всех u из U. Интерес представляет случай, когда класс U выделяется системой однородных граничных условий, содержащих производные от u порядка $\leqslant m-1$. В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия коэрцитивности формы A в конечной области над классом U, определяемым общими граничными условиями указанного типа. Рассмотрение проводится сначала на полупрямой, затем в полупространстве, в полусфере и в конечной области, для каждой точки границы которой существует окрестность, C^m-гомеоморфная полусфере. В основе используемого аппарата лежит преобразование Фурье. А. А. Дезин

11463. О неявных функциях. Кудрявцев (On implicit functions. Kudryavcev L. D.), Amer. Math. Soc. Translat., 1959, **12**, 137—139 (англ.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1955, 2609).

11464 K. Действительные функции. Т. 2. Сикорский (Funkcje rzeczywiste. T. 2. Sikorski Roman. (Monogr. mat. PAN, 37). Warszawa, PWN, 1959, 262 s., il., 35 zł.) (польск.)

Первый том книги (гл. I—XI) вышел в 1958 г. (РЖМат, 1959, 5713 K). Реферируемый второй том содержит гл. XII—XV. В гл. XII «Функциональные пространства» рассматриваются линейные нормированные пространства, линейные функционалы и операторы, свертки функций, кольца функций (включая понятие о нормированных), комплексные линейные пространства, линейные топологические пространства, распределения Соболева—Шварца. В гл. XIII «Пространство Гильберта. Ортогональные ряды» рассматриваются определение и основные свойства общего гильбертова пространства H (действительного и комплексного), ортогональные последовательности в H, процесс ортогонализации Шмидта, ортогональные ряды. В гл. XIV «Ряды Фурье» рассматриваются общие свойства рядов Фурье, вопросы сходимости, ряды Фурье—Стилтьеса, теоремы о расходимости рядов Фурье, теорема Фейера, абсолютная сходимость тригонометрических рядов (теорема Лузина—Данжуа), функции, интегрируемые с квадратом, периодические распределения. В гл. XV «Интегралы Фурье» рассматриваются преобразования Фурье и Фурье—Стилтьеса, вопросы сходимости интегралов Фурье, аналог теоремы Фейера.

Книга снабжена большим количеством упражнений, во многом дополняющих и без того содержательный основной текст. Автор исходит из понимания теории действительных функций в широком смысле и включил в свою книгу много вопросов (как общих, так и более специальных), обычно излагаемых в курсах функционального анализа. С. И. Зуховицкий

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

11465. О проективной теории множеств. Кондо (Sur la théorie projective des ensembles. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 21, 2940—2942 (франц.)

Высказаны идеи построения проективной теории множеств, конструктивно покрывающей канторовскую теорию множеств. Вводится понятие гиперобласти. Пусть $\mathfrak{S}$ есть непустое множество, $\rho(x)$ — функция, определенная на $\mathfrak{S}$ и принимающая в качестве значений

ординальные числа. Множество элементов $a\in\mathfrak{S}$, для которых $\rho(a)=\alpha$, обозначается через $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$, объединение $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{R}^{(\beta)}$ — через $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$. Принимаются следующие постулаты:

A. 1. Существует такое ординальное число η, что $\mathfrak{S}=\bigcup_{\alpha<\eta}\mathfrak{R}^{(\alpha)}$.

A. 2. $\mathfrak{R}^{(0)}$ есть область целых чисел.

A. 3. $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ является коммутативным кольцом относительно "+" и "·" и существует единичный элемент $e^{(\alpha)}$.

Определяется внутреннее произведение (a, b) для элементов $a\in\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ и $b\in\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ следующими постулатами:

B. 1. (a, b) есть целое число.

B. 2. $(a, b\pm c)=(a, b)\pm(a, c)$.

B. 3. $(a, bc)=(a, b)\cdot(a, c)$.

B. 4. $(a, e^{(\alpha)})=1$, если $a\in\mathfrak{S}^{(\alpha)}$.

B. 5. Если $b\in\mathfrak{R}^{(\alpha)}$, $c\in\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ и $(a, b)=(a, c)$ для всех $a\in\mathfrak{S}^{(\alpha)}$, то $b=c$.

Если эти постулаты выполнены, то множество $\mathfrak{S}$ называется фундаментальной системой типа η, множество $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ — гипербластью. Пусть $\mathfrak{F}$ есть семейство подмножеств фундаментальной системы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}^{(\alpha)}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}^{(\alpha)}$. Для $b\in\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ и $A\in\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ множество всех таких $c\in\mathfrak{R}^{(\alpha)}$, что $(a, b)=(a, c)$ для каждого $a\in A$, называется окрестностью элемента b относительно $\mathfrak{F}$. Понятия прямой суммы и проекции множества определяются так же, как в более ранней статье автора (РЖМат, 1958, 1943). Множества, получаемые из открытых и замкнутых множеств путем проекции и взятия дополнения, называются гиперпроективными множествами. Б. С. Содномов

11466. Об указуемости множеств высших типов. Кондо (Sur la nommabilité d'ensembles de type supérieur. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 22, 3099—3101 (франц.)

В предыдущей статье (реф. 11465) автор ввел понятия фундаментальной системы и гиперобласти. Пусть $\mathfrak{S}=\bigcup_{\alpha<\eta}\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ есть фундаментальная область, $\mathfrak{S}_0$ — ее подсистема. Вводится понятие гиперполинома следующим образом. Пусть $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^{(\alpha_1)}\oplus\mathfrak{R}^{(\alpha_2)}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{R}^{(\alpha_n)}$ и $x^{(\alpha_k)}\in\mathfrak{R}^{(\alpha_k)}$. 1. Каждое целое число есть гиперполином. 2. Если $\alpha_l\neq 0$, то $x^{(\alpha_l)}$ есть гиперполином. 3. Если $\alpha_l<\alpha_j$, то $(x^{(\alpha_l)}, x^{(\alpha_j)})$ есть гиперполином. 4. Для каждого элемента $a^{(\alpha_l)}\in\mathfrak{R}^{(\alpha_l)}\cap\mathfrak{S}_0$ внутренние произведения $(a^{\alpha_l}, x^{\alpha_j})$ при $\alpha_l<\alpha_j$ и $(x^{(\alpha_j)}, a^{(\alpha_l)})$ при $\alpha_j<\alpha_l$ суть гиперполиномы. 5. Если F и G — гиперполиномы, то $F+G$ и $F\cdot G$ — гиперполиномы. Если $F(x^{(\alpha_1)}, x^{(\alpha_2)}, \ldots, x^{(\alpha_n)})$ есть гиперполином, то множество всех таких $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, $a_k\in\mathfrak{R}^{(\alpha_k)}$, что $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$, называется гиперэлементарным множеством. Отправляясь от гиперэлементарных множеств определяются иерархии гиперпроективных и указуемых множеств аналогично тому, как автор определял в релятивном анализе $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}$) проективные и указуемые множества, отправляясь от элементарных множеств (РЖМат, 1958, 1943). Б. С. Содномов

11467. Некоторые непрозрачные подмножества квадрата. Багемил (Some opaque subsets of a square. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 2, 99—103 (англ.)

Подмножество S замкнутого единичного квадрата Q называется непрозрачным, если любая прямая, пересекающая Q, содержит хотя бы одну точку множества S. Обозначим через Δ_S множество расстояний между точками множества S. Если множество B содержится в отрезке $[0, \sqrt{2}]$, не содержит точек $0, 1, \sqrt{2}$ и имеет мощность, меньшую чем $2^{\aleph_0}$, то существует непрозрачное подмножество S такое, что $\Delta_S\subset([0, \sqrt{2}]\setminus B)$. Если верна континуум-гипотеза, то: 1) для любого подмножества B отрезка $[0, \sqrt{2}]$, не содержащего точек $0, 1, \sqrt{2}$, и меры нуль (первой категории) существует непрозрачное подмножество S такое, что $\Delta_S\subset([0, \sqrt{2})/B)$; 2) существуют множество $C\subset[0, \sqrt{2}]$ первой категории (меры нуль) и непрозрачное подмножество S такие, что $\Delta_S=C$. Б. С. Содномов

11468. Некоторые предложения, эквивалентные гипотезе континуума. Багемил (Some propositions equivalent to the continuum hypothesis. Bagemihl Frederick), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 2, 84—88 (англ.)

Пусть E — действительная прямая, S, T, U — подмножества E, P — плоскость, A — плоское множество и Φ — семейство горизонтальных прямых. Семейство Φ называется семейством первой категории (меры нуль), если оно пересекается с осью Oy по множеству первой категории (меры нуль). $T[r]$ обозначает сдвиг множества T на расстояние r вдоль прямой E. Доказывается эквивалентность гипотезе континуума каждой из следующих конъюнкций: $(\mathfrak{B}_K)\&(\mathfrak{Q}_K)$, $(\mathfrak{B}_M)\&(\mathfrak{Q}_M)$, $(\mathfrak{B}^*_K)\&(\mathfrak{Q}^*_K)$, $(\mathfrak{B}^*_M)\&(\mathfrak{Q}^*_M)$, $(\mathfrak{R})\&(\mathfrak{Q}'_K)$, $(\mathfrak{M})\&(\mathfrak{Q}'_M)$, где предложения $(\mathfrak{B}_K)$, $(\mathfrak{B}_M)$, $(\mathfrak{Q}_K)$, $(\mathfrak{Q}_M)$, $(\mathfrak{B}^*_K)$, $(\mathfrak{Q}^*_K)$, $(\mathfrak{B}^*_M)$, $(\mathfrak{Q}^*_M)$, $(\mathfrak{Q}'_K)$, $(\mathfrak{Q}'_M)$, $(\mathfrak{R})$, $(\mathfrak{M})$ имеют следующие содержания:

$(\mathfrak{B}_K)$ Если мощность множества S меньше $2^{\aleph_0}$ и множество T первой категории, то существует резидуальное множество R такое, что $S\cap T[r]$ пусто для любого $r\in R$.

$(\mathfrak{B}_M)$ Если мощность множества S меньше $2^{\aleph_0}$ и множество T меры нуль, то существует множество R полной меры такое, что $S\cap T[r]$ пусто для любого $r\in R$.

Заменяя в предложениях $(\mathfrak{B}_K)$, $(\mathfrak{R}_M)$ главные предложения предложением: „существует такое число r, что $S\cap T[r]$ пусто", получим соответственно предложения $(\mathfrak{B}^*_K)$, $(\mathfrak{B}^*_M)$.

$(\mathfrak{R})$ Объединение меньше чем $2^{\aleph_0}$ множеств первой категории есть множество первой категории.

$(\mathfrak{M})$ Объединение меньше чем $2^{\aleph_0}$ множеств меры нуль есть множество меры нуль.

$(\mathfrak{Q}_K)$ Существуют множество A и семейство Φ такие, что: а) Φ — первой категории, б) найдется множество U второй категории такое, что сдвиг семейства Φ на u $u\in U$, вдоль оси Oy содержит горизонтальную прямую, пересекающую A не более чем в $\aleph_0$ точках, в) найдется несчетное множество вертикальных прямых, пересекающих $P\setminus A$ не более чем в $\aleph_0$ точках.

Заменяя в предложении $(\mathfrak{Q}_K)$ слова „первой категории" словами „меры нуль", слова „второй категории" — словами „положительной внешней меры", получим предложение $(\mathfrak{Q}_M)$. Заменяя в $(\mathfrak{Q}_K)$ условие б) условием каждый сдвиг семейства Φ вдоль оси Oy содержи-

горизонтальную прямую, пересекающую множество A не более чем по счетному множеству, получим предложение $(\mathfrak{Q}_K^*)$. Производя аналогичную замену в $(\mathfrak{Q}_M)$, получим предложение $(\mathfrak{Q}_M^*)$. Заменяя в $(\mathfrak{Q}_K)$ и $(\mathfrak{Q}_M)$ условие а) условием: мощность множества Φ меньше чем $2^{\aleph_0}$, получим соответственно предложения $(\mathfrak{Q}_K')$ и $(\mathfrak{Q}_M')$. Б. С. Содномов

11469. Теорема Цорна и существование максимальных фильтров и идеалов в дистрибутивных структурах. **Климовский** (El teorema de Zorn y la existencia de filtros e ideales maximales en los reticulados distributivos. Klimovsky Gregorio), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1958, **18**, № 4, 160—164 (исп.)

Устанавливается эквивалентность теории Цорна (и, следовательно, аксиомы выбора), с одной стороны, и двух формулируемых ниже предложений, с другой.

Теорема 1. В произвольной дистрибутивной структуре, обладающей первым элементом, каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре (максимальном фильтре).

Теорема 2. В произвольной дистрибутивной структуре, обладающей последним элементом, каждый идеал содержится в некотором максимальном идеале. (Определения см., например, Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры, М., Физматгиз, 1958, гл. I, § 5; Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, гл. II, § 10 и гл. III, § 3).

Эквивалентность теорем 1 и 2 усматривается из взаимной двойственности трактуемых в них понятий. Теорема 1 (даже без требования дистрибутивности структуры) легко доказывается при помощи теоремы Цорна. Автор показывает, что теорема 1 влечет теорему 1 предыдущей его работы (РЖМат, 1959, 8745), эквивалентную теореме Цорна. Установление этой импликации и ведет к поставленной цели. Ю. А. Гастев

11470. О свойствах внутренних отображений множеств. **Эрдёш, Фодор, Хайнал** (On the structure of inner set mappings. Erdős P., Fodor G., Hajnal A.), Acta scient. math., 1959, **20**, № 1, 81—90 (англ.)

Ниже $\mathfrak{r}^+$ означает кардинальное число, непосредственно следующее за $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}^*$ — мощность регулярного числа, конфинального $\omega(\mathfrak{r})$, $\overline{\overline{M}}$ — мощность множества M. Пусть S — множество мощности $\mathfrak{m}$, I_1 и I_2 — две системы подмножеств S, $G(X)$ — некоторое отображение I_1 в I_2; тогда $(X_0^*)^{-1} = \{X/G(X) = X_0\}$, $X_0^{-1} = \bigcup (X_0^*)^{-1}$, $[S]^{\mathfrak{n}}$ система всех подмножеств S мощности $\mathfrak{n}$. Пусть далее $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{r}$ и $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{r}$ означают, что при $I_1 = [S]^{\mathfrak{q}}$ и $I_2 = [S]^{\mathfrak{p}}$ для каждого $G(X)$, определенного для множества S мощности $\mathfrak{m}$, существует такое $X_0 \in I_2$, что $\overline{\overline{X_0^{-1}}} = \mathfrak{r}$, соответственно, $\overline{\overline{(X_0^*)^{-1}}} = \mathfrak{r}$.

Устанавливаются следующие факты: а) если $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q} \geqslant \aleph_0$, то не имеет места ни $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{q}^+$, ни $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to 2$; б) если $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q} \geqslant \aleph_0$, то не имеет места ни $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{q}^+$, ни $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to 2$; в) если $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$ и $\mathfrak{q} \geqslant \aleph_0$, то $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$; г) если $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < (\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}})^*$ и $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q} > \aleph_0$, то $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$; д) если $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}^*$, либо $\mathfrak{q} > \mathfrak{m}^*$, то $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$ и $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$; е) если $0 < k < l < \infty$, то $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \to \aleph_\alpha$, но не имеет места $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \to \aleph_{\alpha+1}$. В заключение приводится ряд нерешенных вопросов. И. И. Паровиченко

11471. Об арифметике порядковых типов. **Морел** (On the arithmetic of order types. Morel Anne C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 1, 48—71 (англ.)

Работа в основном посвящена выяснению условий, при которых для порядковых типов α, β, и γ в равенстве $\alpha\beta = \alpha\gamma$ допустимо сокращение на α (т. е. $(\alpha\beta = \alpha\gamma) \to (\beta = \gamma)$). Оказывается, например, что на α можно левосторонне сократить в случае, когда α — тип рассеянного множества (scattered) (так называется упорядоченное множество, которое не содержит подмножества, являющегося плотным). Эта теорема является обобщением теоремы Линденбаума, согласно которой левостороннее сокращение допустимо в случае, если α — порядковое число или тип, обратный порядковому числу. Попутно улучшается теорема Хаусдорфа о единственности представления порядкового типа при помощи лишь рассеянных и плотных типов. В конце работы выясняются некоторые условия существования решений уравнения $\xi^n = \alpha$ при натуральном n и вопрос о числе таких решений. Оказывается, что можно найти счетное число типов α, для которых уравнение $\xi^n = \alpha$ имеет в точности $\mathfrak{m}$ решений, где $\mathfrak{m}$ либо $\leqslant \aleph_0$, либо $= 2^{\aleph_0}$. И. И. Паровиченко

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

11472. Две теоремы о сходимости ряда Фурье. **Идзуми** (Two theorems concerning convergence of Fourier series. Izumi Shin-Ichi), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 744—754 (англ.)

Пусть $f(t) \in L(0, 2\pi)$. Положим $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s$. Критерий сходимости Лебега гласит: Если при $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \varphi_x(t)\,dt \to 0 \tag{1}$$

и

$$\int_h^\pi \frac{|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+h)|}{t}\,dt \to 0, \tag{2}$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к s при $t = x$. Показывается, что в критерии Лебега условие (1) можно заменить на условие

$$\frac{1}{h}\int_0^h \{\varphi_x(t) - \varphi_x(t+h)\}\,dt \to 0. \tag{3}$$

При этом „сходимость к s" заменяется на „сходимость", так как условия (2) и (3) не зависят от s, и $\varphi_x(t)$ в них можно заменить на $f(x+t) + f(x-t)$. Указанный результат вытекает из теоремы: Если $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(t)\,dt = 0$, то из условий (2) и (3) следует (1).

Другой результат, приведенный в статье, связан со следующей теоремой Нобла. Обозначим через $\varphi(t)$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\varphi(t) = O(1/\log t^{-1})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ возрастает при $t \geqslant 0$. Пусть $\int_0^t |f(x+u) - f(x)|\,du = o(t\varphi(t))$ и существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{\lambda_n\}$ ($n_k \to \infty$, n_k — целые), для которых $\int_{1/n_k}^{1/\lambda_{n_k}} \frac{\varphi(u)}{u}\,du = O(1)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \min_{n_k - \lambda_{n_k} < n < m < n_k + \lambda_{n_k}} [s_m(x; f) - s_n(x; f)] \geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда $s_{n_k}(x; f) \to f(x)$ при $k \to \infty$ (через $s_m(x; f)$ обозначены частные суммы ряда Фурье функции $f(t)$ при $t = x$).

Автор показывает, что если для некоторой последовательности λ_n ($\lambda_n = o(n)$) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1/\lambda_n} u^{-1}\varphi(u)\,du = \infty$ (где $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)$ непрерывна и возрастает), то существуют функция $f(t)$ и последовательность $\{n_k\}$ такие, что $f(t) = o(\varphi(t))$, предел выражения под знаком lim в (4) с заменой min на max равен нулю при $x=0$ и $s_{n_k}(0; f) \to \infty$.

А. А. Шнейдер

11473. Некоторые теоремы о лакунарных рядах Фурье с обобщением на компактные группы. Хьюитт, Зуккерман (Some theorems on lacunary Fourier series, with extensions to compact groups. Hewitt Edwin, Zuckerman H. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, № 1, 1—19 (англ.)

Пусть C — пространство непрерывных периодических функций периода 2π с равномерной нормой; $\mathfrak{M}$ — пространство комплексных ограниченных мер с вариацией в качестве нормы. Для целого n, $x \in L^1(0, 2\pi)$ и $\mu \in \mathfrak{M}$ определим Фурье-преобразования: $\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} x(t)\,dt$, $\hat{\mu}(n) = \int_{[0,2\pi]} e^{-int} d\mu(t)$. Пусть N — бесконечное множество целых чисел, $c_0(N)$ — пространство всех функций $\psi(n)$, $n \in N$, для которых неравенство $|\psi(n)| \geqslant \alpha$ для любого $\alpha > 0$ выполняется только для конечного подмножества множества N. В этом пространстве вводится равномерная норма; $b(N)$ — пространство функций $f(n)$, $n \in N$ с нормой $\|f\| = \sup_{n\in N} |f(n)|$. Доказывается несколько теорем, среди которых главные следующие:

I. Пусть N — множество целых чисел. Следующие свойства эквивалентны: 1) существует положительное число A такое, что для каждой конечной последовательности $(a_1, \ldots, a_s)$ комплексных чисел и каждого конечного подмножества $(n_1, \ldots, n_s)$ множества N имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} |a_k| < A \max_{0<t<2\pi} \left| \sum_{k=1}^{s} a_k e^{in_k t} \right|;$$

2) если $x \in L^\infty(0, 2\pi)$ и $\hat{x}(m) = 0$ для $m \notin N$, то $\sum_{n\in N} |\hat{x}(n)| < \infty$; 3) для каждой функции $\varphi \in c_0(N)$ существует функция $x \in L^1(0, 2\pi)$ такая, что $\hat{x}(-n) = \varphi(n)$ для всех $n \in N$; 4) для каждой $f \in b(N)$ существует мера $\mu \in \mathfrak{M}$ такая, что $\hat{\mu}(-n) = f(n)$ для всех $n \in N$.

II. Пусть N — множество целых чисел. Следующие условия эквивалентны: 1) существует положительная постоянная B такая, что для каждой конечной последовательности $(a_1, \ldots, a_s)$ комплексных чисел и каждого конечного подмножества $(n_1, \ldots, n_s)$ множества N выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{s} |a_k|^2\right)^{1/2} < B \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{s} a_k e^{in_k t} \right| dt;$$

2) если $x \in L^1(0, 2\pi)$ и $\hat{x}(m) = 0$ для $m \notin N$, то $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 < \infty$; 3) для каждой функции $\varphi \in l_2(N)$ существует функция $x \in C(0, 2\pi)$ такая, что $\hat{x}(-n) = \varphi(n)$ для всех $n \in N$; 4) для каждой функции $\varphi \in l_2(N)$ существует функция $x \in L^\infty(0, 2\pi)$ такая, что $\hat{x}(-n) = \varphi(n)$ для всех $n \in N$.

Приводятся некоторые достаточные условия для этих теорем, и также их применения к лакунарным тригонометрическим рядам. В конце работы приведенные теоремы обобщаются на случай компактной (не обязательно коммутативной) группы.

Б. М. Левитан

11474. Об определении скачка функции при помощи треугольных матриц суммирования. Сривастава (On the determination of the jump of a function by triangular matrices. Shrivastava K. C.), Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc. Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 4 (англ.)

11475. Множители абсолютной суммируемости. Синха (Absolute summability factors. Sinha S. R.), Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc., Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 45—46 (англ.)

11476. Абсолютная суммируемость рядов Фурье функций, принадлежащих классам Lip(α, p) и L^p. Кумари (Absolute summability of the Fourier series of a function belonging to the class Lip (α, p) and L^p. Kumari Sulaxana), Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc., Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 49—51 (англ.)

11477. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций. Дзядык В. К., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 6, 933—950

Через K_C и K_L будем обозначать классы периодических функций $f(t)$, представимых в виде свертки

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x)\,\varphi(t-x)\,dx, \qquad (1)$$

где $K(t)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leqslant 1$ ($f(t) \in K_C$) или $\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dt \leqslant 1$ ($f(t) \in K_L$). Положим $E_n[K_C] = \sup_{f\in K_C} E_n(f)_C$, $E_n[K_L] = \sup_{f\in K_L} E_n(f)_L$, где $E_n(f)_C$ и $E_n(f)_L$ — наилучшие приближения в метрике C и L функции $f(t)$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$. В работе находится точное значение величины $E_n[K_C] = E_n[K_L]$ для случая, когда $K(t)$ — абсолютно монотонная на $(-\infty, 2\pi]$ и суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция или периодический интеграл от такой функции. Используя данное С. Н. Бернштейном (Собр. соч., т. I. М., 1952, 370—425) интегральное представление абсолютно монотонной на отрицательной полуоси функции $K(t)$, автор исследует поведение узлов интерполирования производной порядка r от полинома $T(t)$, совпадающего с $K(t)$ не менее чем в $2N$ точках полуинтервала длины 2π. Доказывается, что всякий тригонометрический полином $T_n(t)$ порядка не выше n в полуинтервале $(a, a+2\pi]$ ($a < -2\pi$) интерполирует функцию $K(t)$ не больше чем в $2n+1$ точках. При любом целом $s \geqslant 1$ вводится понятие s-го периодического интеграла $K_s^*(t)$ от суммируемой функции $K^*(t)$. Доказывается, что если непрерывную и суммируемую в $(-2\pi, 0]$ функцию $K^*(t)$ любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ может интерполировать в $(-2\pi, 0]$ не более чем в $2n-1$ точке, то любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ ($n \geqslant 1$) может интерполировать функцию $K_s^*(t)$ не больше чем в $2n$ точках из $(-2\pi, 0]$. Доказывается, что если $K(t)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция, причем $K'(t)$ абсолютно монотонна в $(-\infty, 2\pi]$, и если $T_{n-1}^*(t)$ — тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ такой, что

$$T_{n-1}^*\left(\frac{k\pi}{n}\right) = K\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

то

$$E_n[K_L] = \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}^*(t)|\,dt = -\int_0^{2\pi} K(t) \operatorname{sign} \sin nt\,dt.$$

Далее, если $K_s^*(t)$ (s — целое $\geqslant 1$) — s-й периодический интеграл от суммируемой непрерывной в $(0, 2\pi]$ функции

$K^*(t)$, которую каждый тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ интерполирует в $(0, 2\pi]$ не более чем в $2n-1$ точке, то

$$E_n[K^*_{sL}] = \left| \int_0^{2\pi} K^*_s(t) \operatorname{sign} \sin n(t-\alpha)\, dt \right|,$$

где α — единственная точка из $(0, \pi/n)$, определяемая из данного автором уравнения. Эти результаты дают возможность применить к приближению классов функций, представимых в виде (1), некоторые общие предложения, доказанные С. М. Никольским (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, 10, 07—256), с использованием которых автор дает построение наилучшего линейного метода для классов K^*_{sC} и K^*_{sL}. Применяя доказанные теоремы к ядрам вида $K_s(t) = \Psi_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cos\left(kt - \frac{s\pi}{2}\right)$, автор находит точное значение величины $E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}]$ при любых дробных $s > 0$, т. е. дает полное решение задачи, поставленной Фаваром (Favard J., Bull. sci. math., 1937, 61, 209—224). При натуральных s эта задача была решена Фаваром (Bull. sci. math., 1937, 61, 209—224, 43—256) и Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном (Докл. АН СССР, 1937, 15, 107—112), при $0<s<1$ — автором (РЖМат, 1953, 662), для ядер вида $\Psi^{\alpha}_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$ при $0<s<1$ и $s \leqslant \alpha \leqslant 2-s$ — С. Б. Стечкиным (РЖМат, 1959, 2515) и при достаточно больших s ($s \geqslant 6$) и произвольных α — Сунь Юн-Шеном (РЖМат, 1960, 5124).

Примечание референта. Независимо от автора и другим методом Сунь Юн-шеном (Бэйцзин шифань дасюэбао. Цзыжань кэсюэ, 1959, вып. 3, 21—35) получено решение задачи о нахождении величины $E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}]$ при любом $s > 1$ и величины $E_n\left[\Psi^{\alpha}_{sC}\right] = E_n\left[\Psi^{\alpha}_{sL}\right]$ при $s > 2$ и произвольном α. Работа Сунь Юн-шена опубликована после сдачи автором его работы в печать.

А. В. Ефимов

11478. Замечание к оценке верхней грани наилучшего приближения. Лю Тун-цзюе, Шаньси шифань сюэюань сюэбао, Shanxi shifan xueyuan xuebao, 1959, № 2, 128—131 (кит.)

Показывается, что для любой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ имеет место оценка $E_n < 8\omega(1/n)$, $n \geqslant 5$. Этот результат несколько улучшает результат Ли Вэнь-цина $E_n < 8\omega(1/n)$ при $n \geqslant 12$ (РЖМат, 1958, 8724). Ши Чжун-цы

11479. Развитие теории Чебышева—Маркова предельных величин интегралов в одном новом направлении. Крейн, Рехтман (Development in a new direction of the Čebyšev-Markov theory of limiting values of integrals. Krein M. G., Rehtman P. G.), Amer. Math. Soc. Translat., 1959, 12, 123—135 (англ.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1956, 1256).

11480 К. Ряды Фурье. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1959, 156 стр., илл., 2 р. 45 к.

В гл. I даны определения тригонометрического ряда и ряда Фурье, а также примеры ортонормированных систем и основные теоремы о рядах Фурье по таким системам. Здесь же приводятся некоторые сведения из теории функций (теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, свойства функций класса L_p). В гл. II рассматриваются вопросы о замкнутости и полноте ортогональных систем в пространстве L_2. Доказываются полнота тригонометрической системы в L, теорема Фишера — Рисса и равенство Парсеваля для этой системы, а также теорема Вейерштрасса о приближении. В гл. III изучаются свойства коэффициентов Фурье (теорема Римана—Лебега и скорость стремления к нулю), интегрирование рядов Фурье и явление Гиббса, а также некоторые свойства рядов по синусам или косинусам с монотонно убывающими коэффициентами. В гл. IV устанавливаются основные признаки сходимости ряда Фурье (признаки Дини, Жордана, Лебега, Дини—Липшица) и дана оценка порядка роста последовательности его частных сумм или частных сумм сопряженного тригонометрического ряда. Кроме того, приводится пример непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье и отмечается роль функций Лебега в проблеме сходимости ортогональных рядов. Гл. V посвящена рассмотрению линейных регулярных методов суммирования (главным образом методу Чезаро первого порядка и методу Абеля). В гл. VI приводится доказательство теорем А. Н. Колмогорова о существовании расходящегося почти всюду ряда Фурье—Лебега и о сходимости почти всюду лакунарной подпоследовательности частных сумм $s_{n_k}(f; x)$ ряда Фурье любой функции $f(x) \in L_2$. Устанавливается также сильная суммируемость почти всюду ряда Фурье для функций $f(x) \in L_2$ и рассмотрен метод суммирования Бернштейна—Рогозинского. Кроме того, даны доказательства существования сопряженной функции $f(x)$ для любой интегрируемой функции $f(x)$ и теоремы о том, что если ряд Фурье сходится на множестве E положительной меры, то сопряженный тригонометрический ряд сходится почти всюду на E. В гл. VII рассматриваются тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье и метод суммирования Римана. Доказаны теорема Кантора—Лебега и теорема единственности для того случая, когда тригонометрический ряд сходится всюду, кроме счетного множества точек. Много дополнительных сведений содержится в примечаниях, помещенных в конце книги.

А. Ф. Тиман

См. также: 11159, 11781 К, 11788, 11794, 11809.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

11481. Одно замечание о функции $W=Az+B$. Ильяш, Левин (A note on the function $W=Az+B$. Elyash E. S., Levine Norman), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 9, 803 (англ.)

Доказывается, что если для аналитической функции $w = f(z)$ из равенства $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$ всегда следует $|f(z_1) - f(z_2)| + |f(z_2) - f(z_3)| = |f(z_1) - f(z_3)|$, то она — линейна.

Ю. Ю. Трохимчук

11482. Контурный интеграл от производной. Терноут (The contour integral of a derivative. Ternouth E. J.), Math. Gaz., 1959, 43, № 344, 127 (англ.)

Пусть функция $f(z)$ имеет непрерывную производную в области D, C — гладкая кривая, лежащая в D, соединяющая точки a и b с уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем точкам a и b отвечают значения параметра t_0 и t_1. Тогда использование равенства $\int_C f'(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_1} (u_x \dot{x} - v_x \dot{y})\, dt + i \int_{t_0}^{t_1} (u_x \dot{y} + v_x \dot{x})\, dt$ и уравнений Даламбера — Эйлера позволяет немедленно установить

равенство $\int_C f'(z)\,dz = f(b) - f(a)$, которое, как отмечает автор, полезно иметь при изложении вводного курса теории функций даже прежде чем будет доказана теорема Коши. Г. Ц. Тумаркин

11483. О некоторых задачах Эрдёша, Херцога, Пираняна. Поммеренке (On some problems by Erdös, Herzog and Piranian. Pommerenke Chr.), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 3, 221—225 (англ.)

Пусть $f(z)$ — алгебраический многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Лемниската $|f(z)| = 1$ обозначается через C, а ее внутренность $|f(z)| < 1$ — через E. В работе Эрдёша, Херцога и Пираньяна (РЖМат, 1960, 1580) был поставлен ряд вопросов относительно геометрических свойств множеств C и E. В реферируемой работе исследуются некоторые из этих вопросов. В частности, доказывается, что в случае, когда E связно, то длина C не меньше, чем 2π; она равна 2π для $f(z) = z^n$. Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули многочлена $f(z)$, а E — связное множество, то C лежит внутри круга $|z - \zeta| < 2$, где $\zeta = (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)/n$. В. С. Виденский

11484. О функциональном уравнении Римана. Бохнер С., Чандрасекхаран К. (Bochner S., Chandrasekharan K.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, **3**, № 2, 39—61

См. РЖМат, 1958, 272.

11485. О функциональном уравнении Римана. Чандрасекхаран К. Мандельбройт (в подл. Мандельбройт С.) (Chandrasekharan K., Mandelbrojt S.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, **3**, № 2, 63—74

См. РЖМат, 1959, 10786.

11486. Роль арифметических свойств показателей в ряде Дирихле. Мандельбройт С. (Mandelbrojt S.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, **2**, № 3, 47—62

См. РЖМат, 1956, 2134.

11487. Ряды для различных корней экспоненциальных полиномов. Сатерленд (Series for the distant zeros of exponential polynomials. Sutherland A. B.), Proc. London Math. Soc., 1959, **9**, № 33, 150—160 (англ.)

Исследуется расположение корней квазиполинома $Q(z) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} z^\nu e^{\mu z}$. Для этого строится направленный выпуклостью вверх многоугольник Ньютона N для точек (μ, ν), которым отвечает $a_{\mu\nu} \neq 0$. Пусть L_j $(j = 1, 2, \ldots, Q)$ — отрезки, составляющие N и $\theta_j(z) = a_{\mu_j\nu_j}^{-1} \sum a_{\mu\nu} z^{\nu-\nu_j-1} e^{(\mu-\mu_j-1)z}$, где сумма составлена по тем (μ, ν), которые лежат на L_j. Составляется произведение $F(z) = a_{m\nu_Q} z^{\nu_Q} \theta_1(z)\,\theta_2(z) \ldots \theta_Q(z)$. С помощью теоремы Руше устанавливается, что корни квазиполинома $Q(z)$ асимптотически приближаются к корням функции $F(z)$. Так как $\theta_j(z) = \prod_{k=1}^{\tilde{j}} (z^{d_j} e^{z - a_{jk}})^{h_k}$, то легко определяется положение корней функции $F(z)$. С помощью обращения рядов, автор получает разложение для корней $Q(z)$. Б. Я. Левин

11488. Об одном основном критерии нормальности. Монтель (Sur un critère principal de normalité. Montel Paul), Итон л'анализа математит, J. Analyse Math., 1953—1954, **3**, 209—224 (франц.; рез. евр.)

Доказывается, что условие, необходимое и достаточное для нормальности семейства F функций $f(z)$, мероморфных в области D, состоит в том, что во всякой области $D' \subset D$ расстояние между корнями любых двух из четырех уравнений: $f(z) = a$, $f(z) = b$, $f(z) = c$, $f(z) = d$ (a, b, c, d — попарно неравные числа) превосходит одно и то же для всех $f(z) \in F$ положительное число.

Этот критерий содержится в следующем: если сферическое расстояние между двумя значениями $f(z)$ превосходит $\varepsilon > 0$, то сферическое расстояние между любыми двумя точками области $D' \subset D$, в которых соответственно принимаются эти значения, превосходит некоторое $\delta(\varepsilon, D') > 0$. А. И. Маркушевич

11489. Один общий класс методов суммирования типа Эйлера — Бореля и их применение к аналитическому продолжению. Байшанский (Општа класа поступака збирљивости Euler—Borel—овог типа и њихова примена на аналитичко продужење. Бајшански Богдан), Зб. радова. Српска АН, 1959, кн. 63, 1—36 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Следуя автору, будем говорить, что функция $f(z)$ обладает E-свойством в точке 1, если 1) $f(z)$ регулярна в точке $z = 1$; 2) $f(1) = 1$; 3) $|f(e^{it})| < 1$ для достаточно малых t; 4) $f(z) - z^\alpha = Ai^\rho (z-1)^\rho + o(1)(z-1)^\rho$ при $z \to 1$, где $\alpha = f'(1)$, $\mathrm{Re}\, A \neq 0$. Функция $f(z)$ обладает E-свойством в точке ζ, если функция $h(z) = f(z\zeta)/f(\zeta)$ обладает E-свойством в точке $z = 1$. Доказаны две теоремы.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ 1) регулярна в круге $|z| < R$, $R > 1$; 2) $\max_{|z|=1} |f(z)| = 1$; 3) $f(z)$ обладает E-свойством в каждой точке $e^{i\tau}$, в которой $|f(e^{i\tau})| = 1$, то $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$, где $f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$.

Теорема 2. Если функция $f(z)$ 1) регулярна в круге $|z| < R$, $R > 1$; 2) $|f(z)| = 1$ для $|z| = 1$; 3) $f(z) \neq e^{\theta i} z^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \to \infty$ $(n \to \infty)$, где $f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$.

Указаны применения этих теорем к аналитическому продолжению. Н. А. Давыдов

11490. Об областях коэффициентов рядов Лорана с положительной вещественной частью. Нисимия (On coefficient-regions of Laurent series with positive real part. Nishimiya Han), Kodai Math. Semin. Repts, 1959, **11**, № 1, 25—39 (англ.)

Рассматривается класс $\mathfrak{R}_q$ функций $\Phi(z) = 1 + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' c_\nu z^\nu$ однозначных, регулярных, с положительной вещественной частью в кольце $(0 <) q < |z| < 1$ и удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, \Phi(z) = 1$ на $|z| = q$, а также более широкий класс $\hat{\mathfrak{R}}_q$ функций того же вида, получаемый отбрасыванием последнего условия. Для двух любых целых положительных m и n в $(n+m)$-мерном комплексном пространстве рассматривается точка $P = P_{-m}^{n}[\Phi]$ с координатами $\{c_\nu;\ -m \leqslant \nu \leqslant n,\ \nu \neq 0\}$. В работе определяется область изменения коэффициентов в указанных классах функций, т. е. множество $K = K_{-m}^{n}$ точек $P_{-m}^{n}[\Phi]$, получаемое при условии, что функция $\Phi(z)$ пробегает весь класс $\mathfrak{R}_q$, соответственно $\hat{\mathfrak{R}}_q$. Используются обозначения и результаты работы Комацу, в которой исследованы эти два класса (реф. 11517). Основными из полученных автором результатов являются следующие. Рассмотрим точку $C(\varphi)$ с

координатами $\left\{\frac{2}{1-q^{2\nu}}e^{-i\nu\varphi}, -m\leqslant\nu\leqslant n, \nu\neq 0\right\}$, где φ — вещественный параметр, и обозначим $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^n_{-m}=\{C(\varphi); -\pi<\varphi\leqslant\pi\}$. Пусть $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^n_{-m}$ есть выпуклая оболочка множества $\mathfrak{C}$.

Теорема 1. Для класса $\mathfrak{R}_q$ имеем $K=\mathfrak{R}$. Каждая точка $P=\{c_\nu\}\in\mathfrak{R}$ может быть представлена в виде $c_\nu=(2/(1-q^{2\nu}))\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e^{-i\nu\varphi_j}$ $(-m\leqslant\nu\leqslant n, \nu\neq 0)$; $\lambda_j>0$ $(j=1,\ldots,p;\ 0\leqslant p\leqslant n+m)$, $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\leqslant 1$, $-\pi<\varphi_1<\ldots<\varphi_p\leqslant\pi$. Представление коэффициентов в этой форме единственно. Граница $\Omega=\Omega^n_{-m}$ множества $\mathfrak{R}$ характеризуется равенством $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j=1$ и каждая точка Ω достигается только функцией вида $\Phi(z)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\Phi^*(ze^{-i\varphi_j})$, где $\{\lambda_j\}$, $\{\varphi_j\}$ и p единственным образом соответствуют каждой заданной точке Ω.

Следствие. Если $\Phi(z)\in\mathfrak{R}_q$, то $|c_n|\leqslant 2/|1-q^{2n}|$, $n\neq 0$. Для любого заданного вещественного α равенство $c_n=2e^{-i\alpha}/(1-q^{2n})$ имеет место только для функции вида

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{|n|}\rho_j\Phi^*(ze^{-i(\alpha+2j\pi)/n}),$$

$$\rho_j\geqslant 0\ (j=1,2,\ldots,|n|),\quad \sum_{j=1}^{|n|}\rho_j=1.$$

Аналогичные теорема и следствие устанавливаются для класса $\hat{\mathfrak{R}}_q$; приведем следствие. Если $\Phi(z)\in\hat{\mathfrak{R}}_q$, то $|c_n|\leqslant 2/|1-q^n|$, $n\neq 0$. Для любого заданного вещественного α равенство $c_n=\frac{2|^{-i\alpha}}{1-q^n}$ имеет место только для функции $\Phi(z)$ вида

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{|n|}(\rho_j\Phi^*(ze^{-i(\alpha+2j\pi)/n})+$$

$$+\tau_j\Psi^*(ze^{-i(\alpha+(2j-1)\pi)/n}))-1;$$

$\rho_j\geqslant 0$, $\tau_j\geqslant 0$ $(j=1,\ldots,|n|)$, $\sum_{j=1}^{|n|}\rho_j=\sum_{j=1}^{|n|}\tau_j=1$.

Примечание референта. Приведенную здесь оценку коэффициентов в классе $\hat{\mathfrak{R}}_q$ ранее получил Нехари (Nehari Z., J. London Math. Soc., 1950, 25, part 1, № 97). Ю. Е. Аленицын

11491. О сходимости интерполяционного ряда рациональных дробей. Оруджев Г. А., АзэрбССР Элмлэр Акад. хэбэрлэри. Физ.-техн. вэ кимя элмлэри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и хим. н., 1958, № 4, 3—22 (рез. азерб.)

Изучается сходимость ряда рациональных дробей вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}\frac{1-z/\alpha_k}{1-z/\beta_k}, \qquad (1)$$

где α_n и β_n $(n=1,2,3,\ldots)$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию, что $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty$. Сходимость ряда (1) в случае $\alpha_k=a+ku$, $\beta_k=b+kv$ $(k=1,2,\ldots)$, где u и v — различные комплексные числа, была изучена Лагранжем (Lagrange R., Acta math., 1935, 64). Полагая в (1) $z=(t+1)/(t-1)$, $a_n=-(1+a_n)/(1-a_n)$, $\beta_n=(1+a_n)/(1-a_n)$, автор получает ряд рациональных дробей, изученный В. Л. и М. К. Гончаровыми (Уч. зап. МГУ, 1944, 73), где $\{a_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность действительных чисел, стремящаяся к единице, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ расходится. Далее, полагая в (1) $z=a/(1-a)$, $\alpha_k=a/(a_k-a)$, $\beta_k=a\bar{a}/(1-a\bar{a}_k)$, автор получает ряд рациональных дробей, изученный Уолшем (Walsh J. L., Amer. Math. Soc., 1932, 34), где последовательность комплексных чисел a_n $(n=1,2,3,\ldots)$ удовлетворяет условиям: $|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$, $\lim a_n=a$, $|a|=1$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ расходится. Некоторые частные виды ряда (1) рассматривались также Г. Бадаляном (Сообщ. Ин-та матем. и механ. АН АрмССР, 1950 вып. 5) и В. Мироновым (РЖМат, 1956, 3763). (В реферируемой работе отсутствуют ссылки на эти статьи. *Ред.*)

Приведем основные теоремы реферируемой работы, являющиеся обобщениями соответствующих теорем Лагранжа, Гончаровых и Уолша.

Теорема 1. Пусть ряд (1) сходится в какой-нибудь точке z_0, отличной от α_k, и $\lim\alpha_k=\lim\beta_k=\infty$:

а) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|(1/\alpha_k)-(1/\beta_k)|$ сходится, то ряд (1) сходится равномерно в любой конечной области, не содержащей точки β_k $(k=1,2,3,\ldots)$; б) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|(1/\alpha_k)-(1/\beta_k)|$ расходится, то ряд (1) сходится в области (D), не содержащей точки β_k $(k=1,2,\ldots)$, определяемой условиями

$$\left|\arg\left[(z-z_0)\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]\right|<\frac{\pi}{2}\ (k=n_0,n_0+1,\ldots). \qquad (2)$$

Кроме того, ряд (1) сходится равномерно в области $\overline{D}(\eta, R)$, не содержащей точки z_0 и β_k $(k=1,2,3,\ldots)$, определяемой условиями: $\left|\arg\left[(z-z_0)\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]\right|\leqslant\eta_1<\frac{\pi}{2}$ $(k=n_0,n_0+1,\ldots)$ и $|z|\leqslant R$, где $0<\eta_1<\frac{\pi}{2}$, $R>0$ — любое сколько угодно большое число.

Теорема 2. Если числа α_k и β_k $(k=1,2,3,\ldots)$ удовлетворяют условиям, что $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\beta_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right|=\infty$, $\left|\arg\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right)e^{i\alpha}\right|\leqslant\eta_{11}<\frac{\pi}{2}$, где α — любое число из отрезка $(0, 2\pi)$, то из сходимости ряда (1) в точке z_0, отличной от точки $\alpha_k(k=1,2,\ldots)$, следует его абсолютная сходимость в области, определяемой неравенством $\left|\arg\left[(z-z_0-Le^{i\alpha}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]\right|\leqslant\eta_1<\frac{\pi}{2}$ $(k=n_0,n_0+1,\ldots)$, где $0\leqslant\eta_1<\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\eta_{11}<\pi/2$, и число L определяется равенством:

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left[-\ln\left|\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right|\right]}{\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right)e^{i\alpha}}.$$

Подобные утверждения доказываются и об абсолютной сходимости ряда (1). Наконец, в работе изучаются

свойства функций, представимых в виде ряда Ньютона с вещественными узлами $x_1, x_2, \ldots$

Теорема 3. Если функция $f(z)$ представляется в виде ряда Ньютона, с узлами $x_1, x_2, \ldots$, где $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/x_k = \infty$ и имеющим абсциссу сходимости σ_c, то имеет место неравенство

$$\ln|f(re^{i\alpha})| - \ln r - \operatorname{Re}\int_0^{t_1}\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{t} + \ln\frac{z-t}{t}\right)dn(t) \leqslant c,$$

где $\varepsilon > 0$, $t_1 = (r/2\cos\theta)(1 + O(1/r))$ и $C = C(\sigma, \varepsilon)$ не зависит от r, причем $n(r)$ есть число точек $x_1, x_2, \ldots$, расположенных на отрезке $[0, r]$,

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c, & \text{если } \sigma_c \text{ — конечное число,} \\ -\mu, & \text{если } \sigma_c = -\infty \ (\mu > 0 — \text{любое конечное число}). \end{cases}$$

Примечание референта. Утверждение а) теоремы 1 о равномерной сходимости ряда (1) доказано ранее Лагранжем, а условие (2) второй части теоремы 1 должно быть заменено следующим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{k>n} \left|\arg\left[(z-z_0)\left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\beta_k}\right)\right]\right| < \frac{\pi}{2}.$$

(1) неверно. И. И. Ибрагимов

Примечание редакции. Содержащееся в теореме 1 (а) заключение об абсолютной сходимости ряда

11492. К теории интерполяционных рядов. Мешковский (Zur Theorie der Interpolationsreihen. Meschkowski Herbert), J. reine und angew. Math., 1959, 202, № 1-2, 9—15 (нем.)

Статья является продолжением ранее опубликованных работ автора (РЖМат, 1955, 1182; 1956, 377; 1959, 7927) и содержит некоторые аналоги и усиления содержащихся там результатов. Пусть в конечносвязной области B, ограниченной аналитическими кривыми, задана последовательность узлов интерполяции $\{z_k\}_1^{\infty}$, имеющая внутри B хотя бы одну предельную точку. С помощью керн-функции Бергмана $K(z, \bar{t})$ области B и последовательности $\{z_k\}$ определяется система функций $\{\tau_n(z)\}$, аналитических и ортонормированных по площади области B, следующим образом: $\tau_n(z) = R_n(z)/\|R_n\|$, где $R_n(z) = \alpha_1^{(n)}K(z, \bar{z_1}) + \alpha_2^{(n)}K(z, \bar{z_2}) + \ldots + \alpha_n^{(n)}K(z, \bar{z_n})$, а коэффициенты определяются из условий $R_n(z_1) = R_n(z_2) = \ldots = R_n(z_{n-1}) = 0$, $R_n(z_n) = 1$. Доказывается, что всякая функция $f(z)$, аналитическая и однозначная вместе со своим интегралом в замкнутой области $\bar{B}$, разлагается в ряд по функциям $\{\tau_n(z)\}$, сходящийся равномерно внутри B, т. е. $f(z) = \sum_1^{\infty} a_n\tau_n(z)$. Этот ряд можно считать интерполяционным рядом, так как его коэффициенты, кроме известной формулы $a_n = \iint_B f(z)\overline{\tau_n(z)}\,dxdy$, выражаются также линейно через значения функции в узлах интерполяции следующим образом $a_n = \gamma_{n1}f(z_1) + \gamma_{n2}f(z_2) + \ldots + \gamma_{nn}f(z_n)$, где числа $\{\gamma_{nk}\}$ не зависят от функции $f(z)$, зависят только от области B и от системы узлов и легко вычисляются последовательно. Полученный ряд сравнивается с интерполяционным рядом Ньютона. П. К. Суетин

11493. Интерполяция и ортонормальные системы. Уолш, Дэйвис (Interpolation and orthonormal systems. Walsh J. L., Davis Philip), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 1—28 (англ. рез. евр.)

В произвольной конечносвязной области B строятся разложения аналитических функций в ряды, обладающие одновременно свойствами рядов Фурье и интерполяционных рядов. Пусть $L^2(B)$ — класс функций, аналитических в B, и таких, что $\|f\|^2 = \iint_B |f(z)|^2 dxdy < +\infty$. Рассматриваются линейные непрерывные функционалы $L_1, \ldots, L_n, \ldots$ над $L^2(B)$, причем система $L_1, \ldots, L_n, \ldots$ предполагается линейно независимой. В обобщение применявшейся ранее Бергманом (Bergman S., Math. Surveys, 1950, 5, New-York) конструкции дважды ортогональных рядов авторы решают следующую задачу (Q_n): найти $\min\|\varphi\|$ по всем функциям $\varphi \in L^2(B)$, удовлетворяющим условиям: $L_0(\varphi) = \ldots = L_{n-1}(\varphi) = 0$, $L_n(\varphi) = 1$. Устанавливается следующий результат.

Теорема 4. Для любого целого n проблема (Q_n) имеет единственное решение $\varphi_n(z)$. Последовательность минимизирующих функций $\{\varphi_n(z)\}$ ортогональна над B и если множество функционалов L_n полно над пространством $L^2(B)$ (т. е. из того, что $L_n(f) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ следует $f(z) \equiv 0$), то и система $\{\varphi_n(z)\}$ — полная. Далее полагаем $\varphi_n^*(z) = \varphi_n(z)/\|\varphi_n\|$. Система $\{\varphi_n^*(z)\}$ ортонормальна. Из последовательности $\{L_n\}$ строится последовательность $L_n^* : L_n^* = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_{in}L_i$ биортогональная с $\varphi_n^*(z) : L_n^*(\varphi_m^*) = \delta_{nm}$. Предположим, что функционалы $\{L_n\}$ определены не только для класса $L^2(B)$, но и для более широкого класса $S \supset L^2(B)$ аналитических в B функций. Критерий принадлежности классу $L^2(B)$ дается следующей теоремой типа теоремы Рисса — Фишера:

Теорема 5. Если $\{L_n\}$ — полно, то функция f из S входит в $L^2(B)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} |L_n^*(f)|^2 < +\infty$. Рассматривая далее в качестве функционалов $L_n(f)$ значения $f(\alpha_n)$, где точки α_n предполагаются сходящимися к точке $\alpha \in B$, авторы подробно исследуют сходимость разложений

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} L_n^*(f)\,\varphi_n^*(z) \qquad (1)$$

$\{L_n^*\}$ и $\{\varphi_n^*\}$ построены описанным выше процессом для функционалов $L_n(f) = f(\alpha_n)$. Обнаруживается, что ряды (1) весьма близки по своим свойствам сходимости к ряду Тейлора.

Теорема 1. Пусть B — ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа аналитических контуров. Если функция $f(z)$ определена во всех точках $z = \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$ и аналитична в области $C_r(B)$, $0 < r \leqslant 1$, то разложение (1) сходится к $f(z)$ в $C_r(B)$ равномерно внутри $C_r(B)$. Здесь $C_r(B)$ обозначает область внутри линии уровня функции Грина $G(z, \alpha, B)$ области B с полюсом в точке α : $z \in C_r(B)$, если $G(z, \alpha, B) > -\log r$.

Следствие. Если $f(z)$ аналитична в C_r, $0 < r < 1$, но не является аналитической ни в какой из областей $C_{r'}$, $r < r' < 1$, тогда коэффициенты $L_n^*(f)$ в разложении (1) таковы, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|L_n^*(f)|} = 1/r$. Если $f(z)$ регулярна всюду в B, то $\overline{\lim} \sqrt[n]{|L_n^*(f)|} < 1$. Обратно, если ряд $\sum C_n\varphi_n^*(z)$ таков, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = 1/r$, то он сходится равномерно в каждой $C_{r'}$, $r' < r$, но перестает равномерно сходиться в любой $C_{r''}$, $1 > r'' > r$; более того, сумма ряда теряет аналитичность в любой $C_{r''}$, $r'' > r$. Эти факты являются

обобщениями теоремы Коши — Адамара о степенных рядах. Даются некоторые дальнейшие приложения теории к вопросам аппроксимации и интерполяции.

С. Я. Хавинсон

11494. О полиномах, ортогональных на дуге окружности. Ахиезер Н. И., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 2, 247—250

Автор рассматривает полиномы $\{\varphi_n(z)\}$, ортонормальные на дуге l единичной окружности (причем $z = e^{i\theta} \in l$, если $\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$, $\alpha > 0$) относительно веса $w(\theta) \geqslant 0$; обозначая через D плоскость z, разрезанную вдоль дуги l, и вводя функцию

$$t(\theta) = \frac{w(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}}},$$

считаемую непрерывной и положительной для $\alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha$, автор строит аналитическую функцию $g(z)$ ($g(\infty) > 0$), регулярную и отличную от нуля для $z \in D$, определяемую по граничным значениям своего модуля $|g(e^{i\theta})|^2 = \frac{1}{t(\theta)}$. Автор показывает, что при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\varphi_n(z) \sim \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\gamma^2 z} + z - 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2(z-1)\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left\{\frac{z+1+\sqrt{(z+1)^2 - 4\gamma^2 z}}{2\gamma}\right\}^n g(z),$$

равномерно в каждой замкнутой области, целиком лежащей внутри D (причем $\gamma = \cos\frac{\alpha}{2}$ и выбрана ветвь радикала, положительная при $z = 1$). Если же функция $t(\theta)$ удовлетворяет на отрезке $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ условию Дини — Липшица с показателем $\delta > 1$, то справедлива асимптотическая формула на дуге l

$$\varphi_n(e^{i\theta}) \sim \frac{\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\, e^{i\lambda} - \sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\, e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \times$$

$$\times e^{in\left(\frac{1}{2}\theta + \lambda\right)} g_+(e^{i\theta}) +$$

$$+ \frac{\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\, e^{-i\lambda} - \sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\, e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \times$$

$$\times e^{in\left(\frac{1}{2}\theta - \lambda\right)} g_-(e^{i\theta}),$$

равномерно на всей дуге, причем

$$\cos\lambda = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad 0 < \lambda < \pi,$$

а g_+ и g_- — граничные значения функции $g(z)$ на дуге l при подходе к ней извне и изнутри единичной окружности.

Я. Л. Геронимус

11495. К теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. О наименее уклоняющихся от нуля полиномах с любым числом заданных коэффициентов. Мейман Н. Н., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 2, 257—260; № 3, 503—506

Пусть

$$Q_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k = U_n(x,y) + iV_n(x,y)$$

— произвольный вещественный полином. Для любой положительной константы A рассматривается область $G(Q_n; A)$, являющаяся дополнением к множеству $\mu(Q_n; A)$ точек z, в которых $V_n(x,y) = 0$, а $|Q_n(z)| \leqslant A$ и функция $\omega(z; Q_n; A)$, совпадающая в $G(Q_n; A)$ с ветвью $\sqrt{A^2 - Q_n^2(z)}$, значения которой при $z \to \infty$ стремятся к $iQ_n(z)$.

Обозначим число комплексных нулей производной $Q_n'(z)$, лежащих в верхней полуплоскости через λ, число компонент множества μ, содержащих вещественный отрезок через p (компоненты первого рода), число компонент множества μ, не содержащих вещественных отрезков — через $2l$ (компоненты второго рода) и общее число дуг, которые входят в компоненты первого рода и ортогональны вещественной оси — через q. При этом всегда $p + q + 2l = n$.

Для полиномов $Q_n(z)$ общего положения (т. е. таких, что в пространстве коэффициентов соответствующие точки не лежат на некотором конечном числе алгебраических поверхностей) в пересечении $G_+(Q_n; A)$ области $G(Q_n; A)$ с верхней полуплоскостью суще твует λ кривых, каждая из которых соединяет две разные компоненты второго рода, либо компоненту первого рода с компонентой второго рода и $l - \lambda$ кривых, каждая из которых соединяет вещественную ось с компонентой второго рода.

Функция $\varphi(z) = i\ln\omega(z)$, нормированная условием $\mathrm{Re}\,\varphi(-\infty) = -n\pi$, отображает односвязную область, полученную из G_+ при помощи разрезов, проведенных вдоль этих кривых, в бесконечную полуполосу $T(Q_n; A)$, основанием которой служит отрезок $[-n, \pi, 0]$ и которая имеет соответствующее число разрезов, зависящих от определенной системы непрерывных и целочисленных параметров. Двум полиномам $R_n(z)$ и $Q_n(z)$ и паре положительных чисел A_1 и A_2 соответствует полуполоса T с днями и теми же параметрами тогда и только тогда, когда

$$R_n(z) = a^{-n} Q_n(az + b), \quad A_1 = a^{-n} A_2,$$

где $a > 0$.

Во второй заметке дано приложение этих результатов к задаче о полиноме

$$P_n(z; 1, a_1, \ldots, a_{r-1}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{r-1} z^{n-r+1} + \sum_{k=0}^{n-r} c_k z^k$$

с заданным числом r фиксированных старших коэффициентов, наименее уклоняющемся от нуля на $[-1, 1]$. При $r = 1$ эта задача была решена П. Л. Чебышевым в 1859 г. (Собр. соч., 1947, Т. 2), при $r = 2$ — Е. И. Золотаревым в 1868 г. (Собр. соч., 1932, Т. .) и при $r = 3$ — Н. И. Ахиезером в 1923 г. (Изв. Казанского физ.-матем. о-ва, 1928, вып. 2, сер. 3).

Если при заданных значениях $a_1, \ldots, a_{r-1}$ указанным полиномом является $P_n(z; 1, a_1, \ldots, a_r)$ и $E = \max_{z \in [-1,1]} |P_n(z; 1, a_1, \ldots, a_{r-1})|$, то полуполоса $T(P_n; E)$ содержит $r - 1$, $r - 2$ или $r - 3$ свободных непрерывных параметра, в зависимости от того, являются ли точками максимального укл нения оба конца отрезка $[-1, 1]$, один из этих концов или ни один из них.

Рассматривая отдельно четыре возможных случая расположения концов наибольшего отрезка $[\alpha,\beta]$, входящего в множество $\mu(P_n;E)$ и содержащего $[-1,1]$, автор в каждом из них дает выражение для $P_n(z)$ и E через функцию $\varphi(z)$, представляющую собой в данном случае некоторый гиперэллиптический интеграл. Так, в случае, когда $\alpha=-1$, $\beta=1$,

$$P_n(z)=E\cos\varphi(z).$$

Рассмотрены упомянутые выше классические примеры. В примечании к первой заметке дана поправка к предыдущей статье автора (РЖМат, 1960, 7503).

А. Ф. Тиман

11496. Об одном классе дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Миролюбов А. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 111—121

Изучаются аналитические решения линейного дифференциального уравнения

$$M(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx+b_n)\,y^{(n)}(x)=F(x) \qquad (1)$$

с аналитической правой частью в предположении, что характеристические функции $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ и $B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n$ удовлетворяют условиям: 1) допускают представление $A(t)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-(t^2/\lambda_n^2))$, $B(t)=b_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-(t^2/\mu_n^2))$; $\lim_{n\to\infty}(n/\lambda_n)=\tau_1<\infty$, $\lim_{n\to\infty}(n/\mu_n)=\tau_2<\infty$, $\tau_1>\tau_2$; 2) существует последовательность дуг $\{c_n\}$ окружностей $|t|=R_n$, $R_n\to\infty$, $|\arg t|\leqslant\gamma_1$, на которых модуль отношения $B(t)/A(t)$ ограничен сверху некоторой константой. Прежде всего отмечается, что при указанных предположениях дифференциальный оператор $M(y)$ переводит функцию $y(x)$, аналитическую в круге $|x-x_0|<R$, $R>\pi\tau_1$, в функцию, аналитичекую в $|x-x_0|<R-\pi\tau_1$. Поэтому область G аналитичности решения уравнения (1) должна быть шире области D аналитичности правой части $F(x)$. Именно, доказывается, что уравнение (1) имеет решение, аналитическое в области G. Область G строится по области D следующим образом: на границе C области D (для простоты можно предполагать, что прямые, параллельные мнимой оси, пересекают C в двух точках) находят точку A с наименьшей и точку B с наибольшей абсциссой; они разбивают C на нижнюю дугу C_1 и верхнюю C_2. Чтобы получить область G, нужно в плоскости комплексного переменного сделать разрезы по мнимой оси из точки $i\pi\tau_1$ вверх в бесконечность и из точки $-i\pi\tau_1$ вниз в бесконечность и выбросить две полосы, получаемые таким образом, что сперва дугу C_1 нужно поднять на вектор $i\pi\tau_1$, C_2 опустить на $-i\pi\tau_1$ и затем, исходя из этих положений, движением, параллельным мнимой оси, дуги C_1 — кверху, дуги C_2 — книзу, замести области. Решение уравнения находится так. Вначале ищется решение уравнения

$$M(y)=1/(z-x), \qquad (2)$$

z — параметр, в виде интеграла Лапласа

$$y(x,z)=\int_0^{\infty e^{i\psi}}\gamma(t,z)\,e^{xt}\,dt. \qquad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает $A(t)\gamma(t,z)\,e^{xt}\Big|_0^{\infty e^{i\psi}}-\int_0^{\infty e^{i\psi}}\{A(t)\gamma_t'(t,z)+[A'(t)-B(t)]\gamma(t,z)\}e^{xt}=1/(z-x)$. Функция $\gamma(t,z)$ определяется из уравнения $A\gamma_t'+[A'+B]\gamma=-e^{-zt}$ и доказывается, что при этом проинтегрированная часть обращается в нуль и интеграл (3), если $\psi\neq0$, π, удовлетворяет уравнению (2) в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(x-z)e^{i\psi}<0$. Интегралы (3) для значений ψ, $0<\psi<\pi$, продолжают друг друга и определяют аналитическую функцию $y_1(x,z)$ в плоскости с разрезом $[z-i\pi\tau_1,-i\infty)$, удовлетворяющую уравнению (2) в плоскости с разрезом $[z,-i\infty)$; для значений ψ, $\pi<\psi<2\pi$, определяется решение $y_2(x,z)$ аналитическое в плоскости с разрезом $[z+i\pi\tau_1,+i\infty)$ удовлетворяющее уравнению (2) в плоскости с разрезом $[z,+i\infty)$. Далее доказывается: 1) что $T_1(x)=(1/2\pi i)\int_{L_1}y_1(x,z)\,F_1(z)\,dz$, при надлежащем выборе контура L_1, определяет решение уравнения $M(y)=F_1(x)$, если $F_1(x)$ на бесконечности порядка $O(x^{-1})$ и аналитическая функция в некоторой полуплоскости $\mathrm{Im}\,x>d_1$; 2) что $T_2(x)=(1/2\pi i)\int_{L_2}y_2(x,z)\,F_2(z)\,dz$ есть решение уравнения $M(y)=F_2(x)$, если $F_2(x)=O(x^{-2})$ и аналитическая функция для $\mathrm{Im}\,x<d_2$. Решение уравнения (1) есть $y(x)=T_1(x)+T_2(x)$, если положить $F_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F^*(z)}{(z-x)^2}\,dz$, $F_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{F^*(z)}{(z-x)^2}\,dz$, где $F^*(x)$ — неопределенный интеграл от $F(x)$, и по ним определить $T_1(x)$ и $T_2(x)$. Знание одного решения уравнения (1) позволяет представление любого другого свести к представлению решения однородного уравнения $M(y)=0$. Доказывается, что любое решение его может быть представлено в виде суммы двух аналитических в некоторых областях функций, растущих в направлениях, не параллельных мнимой оси, не быстрее целой функции первого порядка конечного типа, и представимых через особым образом определяемые элементарные решения в виде несходящихся рядов, не обязательно сходящихся, но имеющих сходящиеся подпоследовательности частных сумм. Изложенный метод принадлежит А. Ф. Леонтьеву и был применен им к решению дифференциально-разностного уравнения (Тр. Горьковск. пед. ин-та, 1 51, вып. 14); для тех же целей он был использован и развит автором (РЖМат, 1955, 709).

М. Г. Хапланов

11497. Об окружностях и улитках. Курода (Kuroda Inao), Ямагата дайгаку киё, сидзэн кагаку, Bull. Yamagata Univ. (Natur. Sci.), 1958, 4, № 3, 309—32 (японск.; рез. англ.)

Рассматриваются конформные отображения круга на области, ограниченные улитками. Работа содержит ряд высказываний по следующим вопросам: построение функций, совершающих указанные отображения; некоторые геометрические свойства улиток; теорема Кёбе; неравенство $\pi r^2\leqslant F\leqslant\pi r^2(1+4r^2+r^4)/(1-r^2)^4$ для площади F образа круга $|z|<r$ в классе регулярных однолистных и нормированных в круге $|z|<1$ функций; оценки границ выпуклости и звездообразности; семейство кривых, содержащее окружности, улитки, циссоиду, строфоиды, лемнискаты и др.; суммирование некоторых рядов и прочее.

Из резюме авто

11498. Некоторые достаточные условия однолистности для регулярных функций. Сато (Sato Shigeyoshi). Кэнкю хококу. Сидзэн кагаку, Liber. Arts J. Natur. Sci., 1956, 7, 1—4 (японск.)

Устанавливаются достаточные условия однолистности для двух классов аналитических функций. Для класса функций

$$w(z)=z+a_2z^2+\ldots,$$

регулярных в круге $|z|<1$, получены следующие результаты.

Теорема 1. Если $|w''(z)| < 1/2$ в круге $|z| < 1$, то функция $w(z)$ выпукла в $|z| < 1$.

Теорема 2. Если $|w''(z)| < 2/3$ в круге $|z| < 1$, то функция $w(z)$ выпукла в одном направлении в $|z| < 1$.

Теорема 3. Если $\int_0^{2\pi} |w''(e^{i\theta})|\, d\theta < 1$, то функция $w(z)$ звездообразна в $|z| < 1$.

Формулируются и доказываются также некоторые достаточные условия однолистности для функций, являющихся решением уравнения

$$w''(z) + p(z)\,w(z) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1. \qquad (2)$$

Примечание референта. При доказательстве результатов, относящихся к решению уравнения (2), существенно используется некоторое неравенство, вытекающее, по словам автора, из одной работы Нехари. Это последнее утверждение осталось референту непонятным. Имеются и другие неточности и опечатки.

Г. В. Кузьмина

11499. Максимум коэффициентов A_2 и A_3 однолистных ограниченных функций. Яновский (Le maximum des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées. Janowski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 145—160 (франц.)

В классе F_M функций $F(z) = z + A_2z^2 + A_3z^3 + \ldots$, $|F(z)| < M$, $M > 1$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, получаются новым методом известные точные оценки сверху для $|A_2|$ и $|A_3|$. Этот метод основан на использовании установленного Хажинским дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция, реализующая в классе F_T функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_1 \geqslant T$, $0 < T < 1$, $|f(z)| < 1$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, наибольшее значение функционала $H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, \ldots, X_{Nf}, Y_{2f}, Y_{3f}, \ldots, Y_{Nf})$, где $X_{nf} + iY_{nf} = a_{nf}/a_{1f}$ и $H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N)$ — действительная функция $2N-2$ действительных переменных, определенная в достаточно широкой области и имеющая непрерывные частные производные 1-го порядка, не обращающиеся все в нуль в точке области (РЖМат, 1954, 5536).

Г. В. Корицкий

11500. Максимум коэффициентов B_2 и B_3 K-симметричных однолистных ограниченных функций. Яновский (Le maximum des coefficients B_2 et B_3 des fonctionsunivalentes K-symétriques bornées. Janowski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 161—169 (франц.)

В классе Φ_M функций $\Phi(z) = z + B_2z^{K+1} + B_3z^{2K+1} + \ldots$, $|\Phi(z)| < M$, $M > 1$, $1 < K$ — целое число, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, устанавливаются точные оценки

$$|B_2| \leqslant 2K^{-1}(1 - M^{-K}),$$

$$|B_3| \leqslant \begin{cases} K^{-1}(1 - M^{-2K}), & M \leqslant e^{2/(K+1)}, \\ K^{-1}(2\lambda^2 + 1 + M^{-2K} - 4\lambda M^{-K}), & M \geqslant e^{2/(K+1)}, \end{cases}$$

где λ — наибольший корень уравнения $\lambda \log \lambda + \lambda \times (K-1)/(K+1) + M^{-K} = 0$. Метод доказательства такой же, как в работе автора (реф. 11499)с использованием связи между K-симметричными функциями и функциями, для которых $K = 1$.

Примечание референта. И. Е. Базилевич (РЖМат, 1959, 3700) при помощи совершенно другого метода получил более сильный результат: он установил точные области значений $|B_2|$ и $|B_3|$. Г. В. Корицкий

11501. Максимум мнимой части однолистных ограниченных функций. Яновский (Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées. Janowski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 182—200 (франц.)

В классе F_M функций $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$, $|F(z)| < M$, $M > 1$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, устанавливается точная оценка $I\{F(r)\} \leqslant \rho_M \sin\varphi_M$, $0 < r < 1$, где ρ_M $(0 < \rho/M < r)$ и φ_M $(\sin\varphi_M > 0)$ являются корнями системы уравнений

$$\frac{[1 + (\rho/M)^2]\sin\varphi - 2(\rho/M)}{2(\rho/M)\sin\varphi - [1 + (\rho/M)^2]} \log \frac{(1 - (\rho/M))(1 + r)}{(1 + (\rho/M))(1 - r)} +$$

$$+ \log \frac{M(1 - r^2)}{r((M/\rho) - (\rho/M))} = 0,$$

$$\varphi = \left[\log^2 \frac{(1 - (\rho/M))(1 + r)}{(1 + (\rho/M))(1 - r)} - \right.$$

$$\left. - \log^2 \frac{M(1 - r^2)}{\rho((M/\rho) - (\rho/M))}\right]^{1/2},$$

для которых $\rho\sin\varphi$ достигает наибольшего значения. Доказательство основано на использовании установленного Хажинским и автором дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция, реализующая наибольшее значение функционала $I\{f(r)/a_1\}$ в классе F_T функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_1 \geqslant T$, $0 < T < 1$, $|f(z)| < 1$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$. (Charzyński Z., Janowski W., Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska A, 1950, 41—56). Из найденной оценки получена для $I\{F(r)\}$ точная оценка сверху в классе F_∞, установленная ранее Грунским при помощи другого метода. Имеются опечатки.

В. Г. Корицкий

11502. О K-симметричных однолистных функциях. Яновский (Sur les fonctions univalentes K-symétriques. Janowski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 201—208 (франц.)

В классе Φ_M функций $\Phi(z) = z + B_2z^{K+1} + B_3z^{2K+1} + \ldots$, $1 < K$ — целое число, $|\Phi(z)| < M$, $M > 1$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, устанавливаются точные оценки:

$$I\{\Phi(r)\} \leqslant R_M \sin\Omega_M, \quad 0 < r < 1, \quad \Phi(z) \in \Phi_M, \qquad (1)$$

где R_M $(0 < (R/M) < r)$, Ω_M $(\sin\Omega_M > 0)$ являются корнями системы уравнений

$$\frac{[1 + (R/M)^{2K}]\sin\Omega - 2(R/M)^K}{2(R/M)^K\sin\Omega - [1 + (R/M)^{2K}]} \times$$

$$\times \log \frac{[1 - (R/M)^K](1 + r^K)}{[1 + (R/M)^K](1 - r^K)} +$$

$$+ \log \frac{M^K(1 - r^{2K})}{r^K[(M/R)^K - (R/M)^K]} = 0,$$

$$\Omega_M = \frac{1}{K}\left\{\log^2 \frac{[1 - (R/M)^K](1 + r^K)}{[1 + (R/M)^K](1 - r^K)} - \right.$$

$$\left. - \log^2 \frac{M^K(1 - r^{2K})}{r^K[(M/R)^K - (R/M)^K]}\right\}^{\frac{1}{2}} + 2\pi\frac{l}{K},$$

$0 < l < K - 1$, l — целое число; числа l, R_M, Ω_M выбираются так, чтобы $R\sin\Omega$ достигало наибольшего значения;

$$I\{\Phi(r)\} \leqslant R_\infty \sin\Omega_\infty, \quad 0 < r < 1, \quad \Phi(z) \in \Phi_\infty, \qquad (2)$$

где R_∞ и Ω_∞ являются корнями системы уравнений

$$\log R_\infty = K^{-1}\left[\log\left(r^K/(1-r^{2K})\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\Omega_\infty \log\left((1+r^K)/(1-r^K)\right)\right],$$
$$\Omega_\infty = K^{-1}\cos\Omega_\infty \log\left((1+r^K)/(1-r^K)\right) + 2\pi\,(l/K).$$

Метод доказательства такой же, как в работе автора (реф. 11501), с использованием связи между K-симметричными функциями и функциями, для которых $K=1$. Даются без доказательства точные оценки сверху в классе Φ_M величин $|\Phi(z)|$, $\arg(\Phi(z)/z)$, $R\{\Phi(r)\}$, которые, как отмечает автор, легко получаются из известных уже оценок этих величин в классе однолистных ограниченных функций. Имеются опечатки.

Г. В. Корицкий

11503. Численное определение радиусов однолистности аналитических функций. Кузьмина Г. В. Тр. матем. ин-та АН СССР, 1959, 53, 192—235

Изложены методы численного определения радиуса однолистности аналитической функции, предусматривающие возможность использования вычислительных машин. Результаты работы основаны на исследовании образа окружности $|z|=r_0=\text{const}$ при отображении $w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Для этой цели вводится функция $K(r_0, t_0, s_0)=(f(r_0e^{it_0})-f(r_0e^{is_0}))/(r_0e^{it_0}-r_0e^{is_0})$, которая затем исследуется при различных значениях r_0. Если для всех $0\leqslant s, t\leqslant 2\pi$ $K(r, s, t)>0$, то образ окружности $|z|=r$ не имеет кратных точек и радиус однолистности $f(z)$ не меньше r.

Следующая теорема показывает, что можно не проводить исследования $K(r, s, t)$ для всех s и t.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r_0$. Тогда в окрестностях $t_p-l/2\leqslant t\leqslant t_p+l/2$, $s_q-l/2\leqslant s\leqslant s_q+l/2$ тех узлов (t_p, s_q), для которых $|K(r_0, s_p, t_q)|>1/2lr_0\max|f''(z)|$, нет точек, соответствующих кратным точкам образа окружности $|z|=r_0$ при отображении $w=f(z)$. Здесь $\max|f''(z)|$ вычисляется для некоторой окрестности узла (t_p, s_q), которая точно определена в работе. Для точного определения величины радиуса однолистности служит следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $f(z)=u(r, t)+iv(r, t)$, $z=re^{it}$ регулярна в круге $|z|\leqslant R$, однолистная в круге $|z|<R<R_a$ и $f'(z)\neq 0$ в круге $|z|\leqslant R$. Тогда радиус однолистности R функции $f(z)$ равен наименьшей из первых компонент всех решений системы

$$\begin{cases} u(r, t)-u(r, s)=0, \\ v(r, t)-v(r, s)=0, \\ \dfrac{\partial u(r, s)}{\partial s}\dfrac{\partial v(r, t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(r, t)}{\partial t}\dfrac{\partial v(r, s)}{\partial s}=0 \end{cases}$$

в области $0<r<R_a, \alpha\leqslant s<t<2\pi+\alpha$, где α — любое вещественное число.

Кроме других теорем, аналогичных приведенным выше, доказываются некоторые достаточные условия однолистности. О характере этих условий дает представление следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям: 1) $f(z)$ регулярна в круге $|z|<\widetilde{r}$. 2) Образ $C_{\widetilde{r}}$ окружности $|z|=\widetilde{r}$ при отображении $w=f(z)$ имеет точку самосоприкосновения $\widetilde{w}=f(\widetilde{r}e^{i\widetilde{s}})=f(\widetilde{r}e^{i\widetilde{t}})$, $0<\widetilde{s}<\widetilde{t}<2\pi$. 3) $\varkappa(\widetilde{r}, \widetilde{s})>0$, $\varkappa(\widetilde{r}, \widetilde{t})>0$, где $\varkappa$ — кривизна кривой $C_{\widetilde{r}}$. 4) Существует такая точка $w_0=u_0+iv_0=[f(z)+\lambda_0 izf'(z)]_{z=\widetilde{r}e^{i\widetilde{s}}}$ ($\lambda_0\neq 0$ и вещественно $f(z)\neq w_0$ для $|z|=\widetilde{r}$), что: а) $\chi(t)=\partial/\partial t\arg[f(z)-w_0]$ ($z=\widetilde{r}e^{it}$) не меняет знака в каждом из промежутков $(\widetilde{t}-2\pi, \widetilde{s}]$ и $(\widetilde{s}, t]$ (обращение в нуль допускается); б) Уравнение $\operatorname{Re}[(A-iB)(f(z)-w_0)]=0$, $z=\widetilde{r}e^{it}$, где за A и B могут быть приняты любые вещественные числа, неравные нулю одновременно, имеет в каждом из промежутков $(\widetilde{t}-2\pi, \widetilde{s}]$ и $(\widetilde{s}, \widetilde{t})$ меньше четырех корней. Тогда $f(z)$ однолистна в круге $|z|<\widetilde{r}$ и образ $C_{\widetilde{r}}$ границы этого круга при отображении $w=f(z)$ кроме точки $\widetilde{w}$, не имеет других кратных точек.

В заключительной части работы в качестве примера определяются радиусы однолистности функций $f(z)=((z-1)/(z+1))^3$ и $f(z)=(z+4i)e^z$.

В. С. Рогожин

11504. О радиусе однолистности функции $\exp z^2\int_0^z \exp(-t^2)dt$. Крейсиг, Тодд (On the radius of univalence of the function $\exp z^2\int_0^z \exp(-t^2)\,dt$. Kreyszig Erwin, Todd John), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 1, 123—127 (англ.)

Определяется радиус однолистности функции $E(z)=\exp z^2\int_0^z \exp(-t^2)\,dt$. Миллер и Гордон (Miller W. L., Gordon A. R., J. Phys. Chem., 1931, 35, 2785—2884) ранее доказали, что радиус однолистности ρ функции $E(z)$ не превышает корня уравнения $2yv(0, y)=1$ ($v=\operatorname{Im}E(z)$). В реферируемой работе доказано, что ρ в точности совпадает с указанной величиной. Доказательство основано на следующих свойствах $E(z)$: 1) для $0<x<\rho$ функция $E(z)$ вещественна и возрастает вместе с x; 2) для $|z|<\rho$ и $0<\arg z<\pi/2$ $|E(z)|$ убывает с ростом $\arg z$, причем $v\neq 0$. 3) для $0<y<\rho$ $E(iy)=iv$, причем v возрастает вместе с y. Эти три свойства обеспечивают однолистность $E(z)$ для сектора $|z|<\rho$, $0<\arg z<\pi/2$; однолистность исследуемой функции во всем круге вытекает из равенств $E(\bar{z})=\overline{E(z)}$ и $E(-z)=-E(z)$. Интересно отметить, что свойства 1)—3) были предварительно выяснены с помощью подсчета на вычислительной машине и лишь затем доказаны.

В. С. Рогожин

11505. Максимальные области однолистности некоторых классов аналитических функций. Чакалов Л., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 4, 408—412 (рез. англ.)

Если дан некоторый класс (C) аналитических функций от z, то областью однолистности относительно класса (C) автор называет такую область G (если она существует) z-плоскости, в которой каждая функция класса (C) голоморфна и однолистна. Область однолистности G относительно класса (C) называется максимальной, если при присоединении к G произвольно малой окрестности любой ее граничной точки получается область, уже не являющаяся областью однолистности относительно класса (C). Автор устанавливает всевозможные максимальные области однолистности относительно классов аналитических функций, определяемых следующими структурными формулами:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}(A_k/(z-a_k)),\ A_k>0,\ |a_k-z_0|<R,\ n\geqslant 1,$$
$$(k=1, 2, \ldots, n); \qquad (1)$$
$$h(z)=\int_{-1}^{1} d\alpha(t)/(z-t), \qquad (2)$$

$\alpha(t)$ — ограниченная неубывающая на сегменте $[-1; 1]$ функция, обладающая по крайней мере одной точкой роста;

$$g(z)=\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha(t)/(z-e^{it}), \qquad (3)$$

где $\alpha(t)$ — ограниченная неубывающая на $[-\pi; \pi]$ функция, обладающая по крайней мере одной точкой роста. Доказывается, что единственными максимальными областями однолистности относительно класса (1) — (3) являются следующие области: 1) $|z-z_0|>R\sqrt{2}$; 2) $|z|>1$; 3) $|z|>\sqrt{2}$. Изучаются также некоторые подклассы класса (1). В. А. Зморович

11506. О некоторых многолистных функциях. Сакагути (On certain multivalent functions, Sakaguchi Koichi), Нара гакугэй дайгаку киё, J. Nara Gakugei Univ., 1959, 8, № 2, 19—23 (англ.)

Рассматривается класс $N(p,0;q)$ функций $f(z)=z^q+\sum_{n=q+1}^{\infty} c_n z^n$, каждая из которых удовлетворяет одному из следующих двух условий: или $f(z)$ регулярна в $|z|\leqslant 1$, не обращается в нуль при $z\neq 0$ и существует луч, выходящий из начала, который имеет p точек пересечения с образом окружности $|z|=1$ при отображении $f(z)$ или $f(z)$ регулярна в $|z|<1$ и для каждого $\rho<1$, и достаточно близкого к единице функция $f(\rho z)$ удовлетворяет предшествующему условию. Функции класса $N(p, 0; q)$ называются нормированными и порядка p в направлении одного луча. В частности, при $p=q$ функция $f(z)$ называется звездообразной порядка p в направлении одного луча. Некоторые свойства класса $N(p, 0; q)$ следуют из соответствующих результатов Огава и автора (РЖМат, 1957, 3051). В настоящей заметке даются точные оценки сверху для коэффициентов функций $f_k(z)=z^q+\sum_{n=1}^{\infty} c_{q+nk}\, z^{q+nk}$, $(q, k)=1$, принадлежащих классу $N(p, 0; q)$ и точные оценки снизу и сверху для $|f_k(z)|$, $|f_k'(z)|$, $|z(f_k'(z)/f_k(z))|$, $\operatorname{Re}\{z(f_k'(z)/f_k(z))\}$. Находится точный радиус q-листности и q-листной звездообразности для класса указанных функций $f_k(z)$. Аналогичные результаты получены для класса $N(p/k, q)$ функций $f(z)=z^q+\ldots$, каждая из которых удовлетворяет одному из следующих двух условий: или $f(z)$ регулярна в $|z|=1$, не обращается в нуль при $z\neq 0$ и существуют k симметричных лучей $\arg w=\beta+(2n\pi/k)$ (β вещественно), $n=0, 1, \ldots, k-1$, имеющих в совокупности p точек пересечения с образом окружности $|z|=1$ при отображении $f(z)$ или $f(z)$ регулярна в $|z|<1$ и для каждого $\rho<1$ и достаточно близкого к единице, функция $f(\rho z)$ удовлетворяет предшествующему условию. Ю. Е. Аленицын

11507. Замечание о гармонических функциях, определенных в полуплоскости. Серрин (A note on harmonic functions defined in a half plane. Serrin James), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 523—526 (англ.)

Устанавливается теорема: Пусть $u(z)$ гармонична в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и удовлетворяет там условиям: $\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m(r)/r>-\infty$, где $m(r)=\min_{|z|=r} u(z)$, $\overline{\lim_{z\to\infty}}\, u(z)\geqslant 0$ при $z\to x$, $-\infty<x<+\infty$. Тогда существуют пределы $\alpha=\lim_{r\to\infty} m(r)/r$ и $\beta=\lim_{z\to\infty} u(x, y)/y$, когда $z\to\infty$ ($z=x+iy$), оставаясь в области S: $y\geqslant k|x|$, $k>0$. Эти пределы связаны соотношением $\alpha=\min(0, \beta)$. Кроме того, имеем $\lim_{z\to\infty} \partial u/\partial x=0$, $\lim_{z\to\infty} \partial u/\partial y=\beta$ при $z\to\infty$, $z\in S$, и будет справедливо неравенство $u\geqslant \beta y$, где знак $=$ возможен тогда и только тогда, когда $u\equiv\beta y$.

Из этой теоремы как следствия получаются теорема Фрагмена—Линделёфа—Хейнса для гармонических функций, установленная Хейнсом даже для более общего случая супергармонических функций (Heins M., Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser A. I. 1948, № 46, и известная теорема Жюлиа—Вольфа (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941 стр. 62). Автор указывает, что сформулированный выше результат легко можно было получить, опираясь на указанные теоремы Фрагмена—Линделёфа—Хейнса и Жюлиа—Вольфа. Но он предпочитает изложить прямое доказательство, не привлекающее этих теорем, что, с одной стороны, дает новое простое доказательство только что упомянутых теорем, а с другой стороны, показывает связь между собой этих результатов. Доказательство автора опирается на предварительно устанавливаемое следующее интегральное представление гармонических в верхней полуплоскости и непрерывных в $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям (A):

$$u=\beta y+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\cdot u(t, 0)}{y^2+(t-x)^2}\,dt.$$

Г. Ц. Тумаркин

11508. Интеграл Коши и его применение. У Сюемоу, Ханьшулунь яньцзю баогао, 1958, № 1, 49—53 (кит.)

Пусть C — спрямляемая жорданова кривая, $z=z(s)$ — уравнение C, когда за параметр взята длина дуги s. Через L^p, $p\geqslant 1$, обозначается пространство комплекснозначных на C функций $\varphi(z)$, для которых $\|\varphi(z)\|=\left\{\int_C |\varphi[z(s)]|^p ds\right\}^{1/p}<\infty$, а через $\omega_p(\delta, \varphi)$ — интегральный модуль непрерывности: $\omega_p(\delta, \varphi)=\max_{|h|<\delta}\|\varphi[z(s+h)]-\varphi[z(s)]\|$. Пусть, далее $\Lambda_s(p)$ обозначает класс тех функций $\varphi(z)$, определенных на C, для которых $\int_0^{\alpha}\frac{\omega_p(\delta, \varphi)}{\delta}\,d\delta<\infty$. Простыми рассуждениями, использующими обобщенное неравенство Минковского, доказывается

Теорема 1. Если $\varphi(z)\in\Lambda_s(p)$, то почти всюду на C существуют угловые граничные значения у интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt. \qquad (1)$$

В дальнейшем автор ограничивается рассмотрением областей, ограниченных спрямляемыми кривыми, для которых отношение любой хорды к стягиваемой ею дуге превосходит некоторое число $m>0$: $\left|\frac{z(s+h)-z(s)}{h}\right|>m$. Класс таких кривых обозначается через (m). Немедленно показывается (теорема 2), что если $C\in(m)$, а $\varphi(t)\in\Lambda_p$, то угловые граничные значения $f^+(z)$ и $f^-(z)$ интеграла типа Коши (1) будут принадлежать пространству L^p. В теореме 3 автор дает следующую оценку для интегрального модуля непрерывности $\omega_p(\delta, f^{\pm})$ угловых граничных значений интеграла типа Коши (1) в тех же предположениях о C, что и в теореме 2:

$$\omega_p(\delta, f^{\pm})<A\int_0^{\delta}\frac{\omega_p(x, \varphi)}{x}\,dx+B\delta\int_{\delta}\frac{\omega_p(x, \varphi)}{x^2}\,dx,$$

где A и B — константы. Вводя далее классы $H_s^{\alpha}(p)$, $0<\alpha<1$, $H_s^{1-0}(p)$, $\Lambda_s^*(p)$ функций $\varphi(z)$, удовлетворяю-

щих соответственно условиям $\omega_p(\delta, \varphi) \leqslant K\delta^\alpha$, $\omega_p(\delta, \varphi) \leqslant K\delta\,|\log\delta|$, $\int_0^a \frac{\omega_p(x, \varphi)}{x}\,|\log x|\,dx < \infty$, где K — константа, автор сразу получает в качестве следствия (2) следующие утверждения: 1) Если $C \in (m)$, а $\varphi(z) \in H_s^a(p)$, $0 < a < 1$, $p \geqslant 1$, то $f^{\pm}(z) \in H_s^a(p)$. Если же $\varphi(z) \in H_s^{1-0}(p)$, $p \geqslant 1$, то $f^{\pm}(z) \in H_s^{1-0}(p)$. Наконец, при $\varphi(z) \in \Lambda_s^*(p)$ имеем $f^{\pm}(z) \in \Lambda_s(p)$.

Примечание референта. Приводимая автором библиография (3 назв.) не полна. Отсутствуют ссылки на целый ряд работ, посвященных изучению свойств интегралов типа Коши и применению к решению граничных задач (обзор этих работ см. РЖМат, 1960, 266, 281, 6419). Г. Ц. Тумаркин

11509. О некоторых классах комплексных функций, определенных на разомкнутых дугах. Погожельский (Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et. phys., 1959, 7, № 2, 57—62 (франц.)

Пусть L обозначает конечную совокупность взаимно непересекающихся простых гладких разомкнутых дуг: $L = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k$. Обозначим через H_α^μ класс функций $\varphi(t)$, непрерывных в каждой внутренней точке L и удовлетворяющих условиям:

$$|\varphi(t)| < \text{const}\,/\left[\prod_{k=1}^{p} |t - a_k|\,|t_1 - b_k|\right]^{-\alpha}, \quad |\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \text{const}\,|t - t_1|^\mu / \left[\prod_{k=1}^{p} |t - a_k|\,|t_1 - b_k|\right]^{-\alpha-\mu},$$

где α и μ — фиксированные вещественные числа удовлетворяющие условиям: $0 < \mu < 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\alpha + \mu < 1$. В работе изучены интегралы типа Коши в случае, когда плотность интеграла принадлежит классу H_α^μ, а также некоторым подклассам этого класса. Показано, например, что если плотность сингулярного интеграла типа Коши (когда интеграл понимается в смысле главного значения) принадлежит классу H_α^μ, то сам интеграл принадлежит тому же классу H_α^μ, если $\alpha > 0$, и классу H_ε^μ, где ε — произвольное положительное число, если $\alpha = 0$. Полученные результаты применяются для изучения следующей граничной задачи теории функций комплексного переменного: $\varphi^+(t) = G(t)\,\varphi^-(t) + g(t)$, $t \in L$, (по поводу этой задачи см. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М. — Л., 1946, § 79, стр. 81), а также для обращения сингулярного интеграла типа Коши в случае разомкнутых дуг интегрирования. Б. В. Хведелидзе

11510. Разрывные граничные задачи в теории аналитических функций. Погожельский (Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 6, 311—317 (франц.; рез. русск.)

Результаты, полученные в предыдущей работе (реф. 11509), относительно интегралов типа Коши с плотностью, принадлежащей классам H_α^μ, автор обобщает на тот случай, когда дуги, входящие в состав L, могут иметь конечное число общих концов и точек пересечения. Далее автор полученные результаты применяет для изучения как линейных, так и нелинейных граничных задач теории аналитических функций.

Б. В. Хведелидзе

11511. О проблеме Римана — Гильберта в многосвязной области. Дун Гуан-чан (On the Riemann—Hilbert problem in multiply-connected domain. Tong Kwang-chang), Sci. Rec., 1958, 2, № 5, 149—153 (англ.)

Пусть $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ — граница конечной многосвязной области D, удовлетворяющая условию Ляпунова, причем $L_1, \ldots, L_m$ содержится внутри L_0. В статье рассматривается следующая проблема Римана — Гильберта: найти однозначную функцию $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$, аналитическую в D и непрерывную на $D + L$, которая удовлетворяет следующему граничному условию: $\mathrm{Re}\,\{[\alpha(t) - i\beta(t)]\,F(t)\}_{t \in L} = 0$. Здесь $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — действительные функции точки $t \in L$. Предполагается, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — непрерывны на L в смысле Гёльдера и не равны нулю одновременно.

Число $n = \frac{1}{2\pi} \arg\,[\alpha(t) + i\beta(t)]_L$ называется индексом проблемы. Пусть $p(n)$ — максимальное число линейно независимых решений проблемы. В работе доказывается, что $p(n) \leqslant n + 1$ $(0 \leqslant n)$ без каких бы то ни было ограничений на область D. Н. И. Кованцов

11512. Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях. Родин Ю. Л. Докл. АН СССР, 1959, 129, № 6, 1234—1237

Пусть Γ — контур на замкнутой римановой поверхности R рода p, состоящий из конечного числа замкнутых кривых без самопересечения, ограничивающий связную область T^+ и T^- — ее дополнение. Изучается краевая задача Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \qquad (1)$$

где, как обычно, G, g — функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, и G не обращается в нуль, $\Phi^{\pm}(z)$ — искомые, аналитические в T^+, функции. Решение ищется при помощи аналога интеграла типа Коши $\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int A^{\pm}(z, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau$, где $A^{\pm}(z, \tau)$ — элементарные функции первого рода. Используя формулы Сохоцкого $\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int A(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, автор сводит краевую задачу (1) к особому интегральному уравнению с ядром Коши. Отсюда получаются основные результаты: 1) Однородная и неоднородная задачи (1) при $\varkappa = \mathrm{Ind}\,G(t) \geqslant p$, безусловно, разрешимы, а при $0 \leqslant \varkappa < p - 1$ разрешимы лишь при соблюдении некоторых дополнительных условий (неразрешимость однородной задачи при $\varkappa < 0$ была доказана автором ранее).

Пусть T — конечная риманова поверхность рода h с границей, состоящей из $m + 1$ замкнутых жордановых кривых. Изучается однородная краевая задача Гильберта: найти аналитическую в T функцию $F(z) = u + iv$, удовлетворяющую краевому условию

$$\mathrm{Re}[(a - ib)\,F(t)] = 0. \qquad (2)$$

Строится дубль $\widetilde{T}$ поверхности T и $F(z)$ продолжается в $\widetilde{T}$ по симметрии. На поверхности рода $2h$ возникает краевая задача Римана $\Phi^+(t) = -\frac{a + ib}{a - ib}\Phi^-(t)$ с индексом $2\varkappa = 2\,\mathrm{Ind}\,(a + ib)$. Применяя предшествующие результаты, автор устанавливает условия разрешимости задачи (2). Ф. Д. Гахов

11513. Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа. Михайлов Л. Г., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 1, 13—15

11514. Заметка о смешанной задаче теории потенциала. Пария (Notes on a mixed problem in potential theory. Paria Gunadhar), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 2, 95—97 (англ.)

Рассматривается следующая краевая задача теории потенциала. Найти гармоническую в области D, лежащей в верхней полуплоскости вне единичной полуокружности C_1, функцию, заданную на верхней полуокружности, нормальная производная которой на участке L вещественной оси $|x|>1$ принимает заданное значение. Эта задача легко сводится к краевой задаче аналитических функций. Определить аналитическую в D функцию $\Phi(z)=\varphi+i\psi$, вещественная часть которой на C_1 принимает заданное значение $f(t)$, а мнимая часть обращается в нуль.

Путем продолжения по симметрии во всю плоскость автор приходит к краевой задаче Римана с краевым условием: $\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)+2f(t)$, заданным на единичной окружности. Отсюда получается решение исходной задачи.

Примечание референта. Метод автора есть хорошо известный в теории краевых задач аналитических функций метод сведения краевой задачи Гильберта к краевой задаче Римана (см., например, Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 1946, § 40).

Ф. Д. Гахов

11515. Об аналитических функциях с положительной вещественной частью в круге. Комацу (On analytic functions with positive real part in a circle. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 2, 64—83 (англ.)

Пусть: $\mathfrak{R}=\{\Phi(z)\}$ — класс функций, регулярных и с положительной вещественной частью в круге $|z|<1$, нормированных условием $\Phi(0)=1$; L — линейный оператор, определенный для любой функции $\Phi\in\mathfrak{R}$, для которого $L[\Phi(z)]$ есть функция, мероморфная в $|z|<r\,(r<1)$ и регулярная на $|z|=r$. Предполагается, что этот оператор является однородным нулевой степени, т. е. для любой постоянной c имеем $\{L_\zeta[\Phi(z)]\}_{\zeta=cz}=L_z[\Phi(cz)]$. Основными являются следующие результаты.

Теорема 3. Если оператор L коммутативен с интегрированием по $\rho(\varphi)$ в интегральном представлении $\Phi(z)=\int_{-\pi}^{\pi}[(e^{i\varphi}+z)/(e^{i\varphi}-z)]\,d\rho(\varphi)$ класса $\mathfrak{R}$ и $F(X)$ есть ограниченная возрастающая выпуклая функция, определенная на множестве $|L|$, то для любой функции $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$ имеем точную оценку: $\int_{-\pi}^{\pi}F(|L[\Phi(re^{i\theta})]|)\,d\theta\leqslant$ $\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}F(|L[(1+re^{i\theta})/(1-re^{i\theta})]|)\,d\theta$. Найдено множество всех экстремальных функций этой оценки, но его описание громоздко. В частности, при $L=z\dfrac{d}{dz}$ и $F(X)=X$ получаем известную оценку Рогозинского (Rogosinski W., Math. Z., 1932, **35**, 93 — 121) для длины $L(r;\Phi)$ образа окружности $|z|=r(<1)$ при отображении функцией $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$. Выбирая соответствующие L и F, автор получает следующие результаты. Пусть n — целое положительное, ν — целое неотрицательное и $p\geqslant 1$ — вещественное число. Тогда для любой функции $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$ и $r\in(0,1)$ имеем:

$$\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\nu k\pi i/n}\,\Phi^{(\nu)}(re^{i(\theta-2k\pi/n)})\right|^p d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}\,\frac{1+r^ne^{i\theta}}{1-r^ne^{i\theta}}\right|^p d\theta.$$

Если n, кроме того, четное, то

$$\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-2\nu k\pi i/n}\,\Phi^{(\nu)}(re^{i(\theta-2k\pi/n)})\right|^p d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}\,\frac{2r^{n/2}\,e^{i\theta}}{1-r^ne^{2i\theta}}\right|^p d\theta.$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_0^r\Phi(te^{i\theta})\,dt\right|^p d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|2\lg\frac{1}{1-re^{i\theta}}-re^{i\theta}\right|^p d\theta,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lg|L[\Phi(re^{i\theta})]|\,d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\lg\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|L\left[\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right]\right|d\theta\right).$$

Найдено множество всех экстремальных функций этих оценок (для последнего неравенства при некоторых дополнительных предположениях относительно L). Работа содержит также ряд дополнительных результатов.

Ю. Е. Аленицын

11516. Об аналитических функциях с положительной вещественной частью в кольце. Комацу (On analytic functions with positive real part in an annulus. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 2, 84—100 (англ.)

Результаты предшествующей работы автора для функций с положительной вещественной частью в круге (реф. 11515) обобщаются на аналогичный класс функций, аналитических в кольце. Через $\mathfrak{R}=\{\Phi(z)\}$ обозначается класс функций однозначных, регулярных и с положительной вещественной частью в кольце $(0<)\,q<|z|<1$, нормированных условиями: $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=1$ на $|z|=q$, $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Im}\,\Phi(qe^{i\theta})\,d\theta=0$. Используются обычные обозначения теории эллиптических функций; за основные периоды последних взяты $2\omega_1=2\pi$ и $2\omega_3=-i\lg q$. Основными являются следующие результаты.

Теорема 3. Пусть L — линейный, однородный степени нуль оператор, определенный для $\Phi\in\mathfrak{R}$ и в применении к $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$ дающий функцию $L[\Phi(z)]$, однозначную и мероморфную в $q<|z|<r\,(<1)$ и регулярную на $|z|=q$. Пусть L коммутативен с интегрированием по $\rho(\varphi)$ в интегральном представлении

$$\Phi(z)=\frac{2}{i}\int_{-\pi}^{\pi}(\zeta(i\lg z+\varphi)-\frac{\eta_1}{\pi}(i\lg z+\varphi))\,d\rho(\varphi)$$

класса $\mathfrak{R}$ и $F(X)$ — ограниченная возрастающая выпуклая функция, определенная на множестве $|L|$. Тогда для любой функции $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$ имеем точную оценку:

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(|L[\Phi(re^{i\theta})]|)\,d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}F(|L[\Phi^*(re^{i\theta})]|)\,d\theta,$$

где

$$\Phi^*(z)=\frac{2}{i}\left(\zeta(i\lg z)-\frac{\eta_1}{\pi}i\lg z\right)=1+2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty\,\prime}\frac{z^\nu}{1-q^{2\nu}}.$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно оператора L и функции $F(X)$ найдено множество всех экстремальных функций этой оценки. В частности, при $L=z\dfrac{d}{dz}$ и $F(X)=X$ получаем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $L(r;\Phi)$ есть длина образа окружности $|z|=r$ при отображении функцией $\Phi(z)\in\mathfrak{R}$. Тогда $L(r;\Phi)\leqslant L(r;\Phi^*)=2\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{P}(i\lg(re^{i\theta}))-\frac{\eta_1}{\pi}\right|d\theta$ $(q<r<1)$. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\Phi(z)$ есть функция вида $\Phi^*(\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$.

Пусть n — целое положительное и $F(X)$ есть возрастающая выпуклая функция для $x \geqslant 0$. Тогда для любой функции $\Phi(z) \in \Re$ имеем точные оценки:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(r\,e^{i(\theta-2k\pi/n)})\right|\right)d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} F(|\,\Phi^*(r^n e^{i\theta}, q^n)\,|)d\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{r}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k\pi i/n}\,\Phi'\,(r\,e^{i(\theta-2k\pi/n)})\right|\right)d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} F(nr^n\,|\,\Phi^{*\prime}\,(r^n e^{i\theta}, q^n)\,|\,)\,d\theta,\quad q < r < 1,$$

где параметр q^n, присоединенный к Φ^* и $\Phi^{*\prime}$, указывает, что функции ς и $\wp$, входящие в выражения для Φ^* и $\Phi^{*\prime}$, имеют основными периодами 2π и $-2i\lg q^n$. Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lg|\,L[\Phi(re^{i\theta})]\,|\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \lg\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,L[\Phi^*(re^{i\theta})]\,|\,d\theta\right).$$

При дополнительных предположениях найдено множество всех экстремальных функций этих оценок. Работа содержит также ряд дополнительных результатов, в частности точную оценку площади образа кольца $(q \leqslant)\ r_0 < |\,z\,| < r\ (< 1)$ при отображении $\Phi(z) \in \Re$.

Ю. Е. Аленицын

11517. О множестве значений аналитических функций с положительной вещественной частью. Комацу (On the range of analytic functions with positive real part. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 4, 145—160 (англ.)

Рассматриваются три следующих класса функций класс $\Re_0 = \{\Phi(z)\}$ функций регулярных и с положительной вещественной частью в круге $|\,z\,| < 1$, нормированных условием $\Phi(0) = 1$; класс $\Re_q = \{\Phi(z)\}$ функций однозначных, регулярных и с положительной вещественной частью в кольце $(0 <)\ q < |\,z\,| < 1$; нормированных условиями: $\operatorname{Re}\Phi(z) = 1$ на $|\,z\,| = q$, $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Im}\Phi(qe^{i\theta})\,d\theta = 0$; класс $\hat{\Re}_q = \{\Phi(z)\}$ функций однозначных, регулярных и с положительной вещественной частью в кольце $(0 <)\ q < |\,z\,| < 1$ и нормированных условием $(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(re^{i\theta})\,d\theta = 1$, $q < r < 1$. Пусть $F = \{\Phi(z)\}$ есть какой-либо класс функций, определенных в некоторой области D. Через $\Omega_z(F)$ обозначается множество значений $\Phi(z)$ при фиксированном $z \in D$ и Φ, пробегающей весь класс F. Основными являются следующие результаты.

Теорема 3. Множество значений $\Omega_z(\Re_q)$ с $|z| = r$ $(q < r < 1)$, рассматриваемое в плоскости w, есть замкнутое выпуклое множество, ограниченное образом окружности $|\,z\,| = r$ при отображении $w = \Phi^*(z)$ (реф. 11516). Пусть ω есть любая граничная точка множества $\Omega_r(\Re_q)$ и z_0 — любая заданная точка с $|\,z_0\,| = r > q$. Тогда уравнение $\Phi(z_0) = \omega$ в классе $\Re_q$ удовлетворяется только функцией $\Phi(z) = \Phi^*(ze^{-i\alpha})$, где вещественное значение α единственным (с точностью до слагаемого, кратного 2π) образом определяется условием $\Phi(z_0) = \omega$. Назовем геометрической суммой двух точечных множеств A и B множество, состоящее из всех точек вида $a + b$ с $a \in A$ и $b \in B$. Множество значений $\Omega_z(\hat{\Re}_q)$ с $|\,z\,| = r$ $(q < r < 1)$ есть замкнутое множество, представляющее собой геометрическую сумму $\Omega_z(\Re_q)$ и $\Omega_{q/z}(\Re_q)$, сдвинутую на единицу влево. Пусть ω есть любая граничная точка $\Omega_r(\hat{\Re}_q)$ и z_0 — любая заданная точка на $|z| = r$. Тогда уравнение $\Phi(z_0) = \omega$ удовлетворяется в классе $\Re_q$ только функцией $\Phi(z) = \Phi^*(ze^{-i\alpha}) + \Phi^*(q/ze^{-i\beta}) - 1$, где вещественные значения α и β определяются единственным (с точностью до слагаемого, кратного 2π) образом условием $\Phi(z_0) = \omega$. Аналогичные результаты получены для множеств значений $\Omega_z(L[\Re_q])$ и $\Omega_z(L[\hat{\Re}_q])$, где L есть линейный оператор со свойствами, аналогичными свойствам оператора L, рассмотренного в предшествующей работе автора (реф. 11516). Соответствующие теоремы получены для класса $\Re_0$.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестно, что интегральное представление класса $\hat{\Re}_q$, которое он выводит как новый результат, ранее было дано В. А. Зморовичем (РЖМат, 1953, 691).

Ю. Е. Аленицын

11518. О некоторых свойствах функций, аналитических в круге. Чю Хуа-цзи (в подл. Чю Фа-ти), Шусюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 4, 382—388 (кит.; рез. русск.)

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ — функции, аналитические в $|\,z\,| < 1$. Положим $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$. Показывается, что: 1) если $f(z) \in H_p$, $\operatorname{Re} g(z) \in h_q$, где $p > 1$, $q > 1$ $(1/p) + (1/q) = 1$, то $|\,F(z)\,| < C$ при $|\,z\,| < 1$; 2) если $f(z) \in H_p$, $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$, то $F(z) \in H_p$; здесь $p \geqslant 1$.

Далее утверждается, что при выполнении условий 1) или 2) имеем

$$\lim_{\rho\to 1} F(\rho, e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1, \varphi)\,f(1, e^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi + a_0(b_0 - \alpha_0), \tag{1}$$

где $\operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi)\,r^k$. Используя (1), автор далее приводит ряд оценок, например интегральный модуль непрерывности функции $F(e^{i\theta})$ в случае 2) оценивается через интегральный модуль непрерывности функции $f(e^{i\theta})$, и т. д.

Примечание референта. 1. Утверждение 1) было доказано Дайович (РЖМат, 1957, 7852), о чем, по-видимому, не было известно автору. 2. Предельный переход под знаком интеграла, которым пользуется автор для доказательства формулы (1), при рассматриваемых в случае 2) предположениях не обоснован. Рассуждения, которые приводит при этом автор, содержат ошибку (использование неравенств $|\,u(r, \varphi)\,| \leqslant |\,u(1, \varphi)\,|$, $|\,f(r, e^{i(\theta-\varphi)}\,| \leqslant |\,f(1, e^{i(\theta-\varphi)})\,|$, которые, вообще говоря, не имеют места). Автор не замечает даже, что интеграл в правой части (1) может оказываться, вообще говоря, расходящимся при сделанных в случае 2) предположениях (ведь $u(1, \varphi)$ может быть тогда любой суммируемой на $(0, 2\pi)$ функцией, а $|\,f(1, e^{i\theta})$ может быть любой функцией, суммируемой в p-й степени). Поэтому все последующие оценки, в которых автор использует равенство (3), не могут считаться обоснованными.

Г. Ц. Тумаркин

11519. О некоторых свойствах голоморфных функций. Ван Чжэнь-юй, Ханьшулунь яньцзю баогао, 1958, № 1, 71—73 (кит.)

Приводятся без доказательства результаты, подробному изложению которых посвящена другая работа автора (РЖМат, 1959, 6829).

Примечание референта. В цитированном реферате в теореме 1 допущена опечатка в неравенстве для $f^{(n)}(z)$: вместо $\leqslant$ набрано $\geqslant$.

Г. Ц. Тумаркин

11520. Медленно возрастающие функции. Фридман Г. А., Уч. зап. Гомельск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 183—187

Исследуются положительные функции $L(x)$, удовлетворяющие условию

$$xL'(x)/L(x) \downarrow 0. \qquad (1)$$

Если $y=f(x)$ и $x=g(y)$, а также $u=F(x)$; $x=G(u)$ — возрастающие, взаимно обратные положительные функции ($x>0$) и $f(x)=F(x)L[F(x)]$, то $g(y)=G(y/l(y))$, где $l(y)$ также удовлетворяет условию (1). Если, кроме того, $(xL'(x)/L(x))\ln l(x)\to 0$, то $L(x)/l(x)\to 1$.

Б. Я. Левин

11521. Замечания о полуперестановочности целых функций. Хельстрём (Bemerkungen über Halbvertauschbarkeit ganzer Funktionen. Hällström Gunnar af), Math. scand., 1959, **7**, № 1, 61—70 (нем.)

Две целые функции $g(z)$ и $h(z)$ называются полуперестановочными, если $g(h(z))\equiv L(h(g(z)))$, где L — дробно-линейная функция. Если $L\equiv z$, $g(z)$ и $h(z)$ называются перестановочными. Перестановочные целые функции изучались Бакером (РЖМат, 1959, 1414; см. также Iyer G. V., РЖМат, 1960, 286). В реферируемой статье доказывается 21 теорема о свойствах полуперестановочных целых функций. Следующие теоремы типичны:

Теорема 6. Если $g(z)$ — целая трансцендентная функция конечного порядка полуперестановочна с некоторой другой целой функцией так, что $L(\infty)\neq\infty$, то порядок $g(z)$ — натуральное число.

Теорема 9. Целая функция с конечным пикаровским исключительным значением не полуперестановочна ни с какой трансцендентной функцией нулевого или нецелого порядка.

Теорема 12. Многочлен $h(z)$ положительной степени тогда и только тогда полуперестановочен с некоторой целой трансцендентной функцией $g(z)$, когда $h(z)=az+k$, где a — какой-нибудь корень из единицы.

Теорема 18. Для того чтобы функция $g(z)=Ce^{xp(de^{rz})}+B$ была полуперестановочна с $h(z)=az+k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $a=1$ и $kr=\pi in$ при некотором целом n.

А. А. Гольдберг

11522. Исключительные элементы аналитических функций. Монтель (Éléments exceptionnels des fonctions analytiques. Montel Paul), Ann. scient. École norm. supér., 1959, **76**, № 3, 271—281 (франц.)

Основные результаты статьи анонсированы ранее (РЖМат, 1960, 7429), еще раньше часть результатов была опубликована с доказательствами (РЖМат, 1960, 287). А. А. Гольдберг

11523. Исключительные значения непрерывных и однозначных функций. Основания теоремы Пикара. Ла Валле-Пуссен (Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondaments du théorème de Picard. La Vallée Poussin C. de), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1959, **73**, № 3, 295—301 (франц.)

Пусть $w=f(z)$ — однозначная, определенная во всей конечной z-плоскости функция, причем $\mathrm{Re}\,f(z)$ и $\mathrm{Im}\,f(z)$ непрерывны вместе со своими частными производными всюду, кроме, возможно, изолированных точек, в достаточно малых окрестностях которых непрерывна функция $1/f(z)$. Функция $w=f(z)$ называется нормальной, если множество ее значений G открытое. Основной результат статьи, для доказательства которого использованы только элементарные топологические рассуждения, заключается в утверждении, что дополнение к G относительно расширенной комплексной плоскости состоит не более чем из двух связных компонентов. Если $f(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция, то с помощью теоремы Лиувилля отсюда сразу получается теорема Пикара об исключительных значениях.

Примечание референта. Доказанная автором теорема неверна, как показывает пример функции $w=f(re^{i\varphi})=\psi[r(1+r)^{-1}e^{i\varphi}]$, где $\psi(re^{i\varphi})$ — мероморфная функция, отображающая $|z|<1$ на универсальную поверхность наложения n-связной области ($3\leqslant n\leqslant\infty$). Заметим, что чисто топологическими методами невозможно доказать какое-либо свойство функции, справедливость которого зависит от того, задана ли функция в $|z|<\infty$ или в $|z|<1$, так как эти области топологически эквивалентны. При минимальном использовании нетопологических свойств $w=f(z)$ теорема Пикара и ее обобщения доказаны Л. Альфорсом (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. XIII). А. А. Гольдберг

11524. Поправка (Berichtigung), Arch. Math., 1959, **10**, № 6, 480 (нем.)

См. РЖМат, 1959, 9947.

11525. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. Гольдберг А. А., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 4, 438—443

Из второй основной теоремы теории распределения значений следует, что множество дефектных значений мероморфной в $|z|<\infty$ функции не более чем счетно. Неванлинна (Nevanlinna R., Le théorème de Picard—Borel..., Paris, 1929, стр. 93) обратил внимание на отсутствие примера функции с бесконечным множеством дефектных значений. Такой пример впервые был построен автором (РЖМат, 1955, 3725). В реферируемой заметке автор с помощью некоторого уточнения своих прежних рассуждений показывает, что, каково бы ни было число $\rho>0$ и каково бы ни было счетное множество M точек расширенной плоскости, существует мероморфная функция порядка ρ, для которой M является множеством дефектных значений. Так как функции порядка 0 могут иметь не более одного дефектного значения (Valiron G., C. r. Acad. sci., 1950, **230**, 40—42), то вопрос о структуре множества дефектных значений для функций конечного порядка получает таким образом полное решение. И. В. Островский

11526. О росте мероморфных функций с несколькими дефектными значениями. Эдрей, Фукс (On the growth of meromorphic functions with several deficient values. Edrei Albert, Fuchs Wolfgang H. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, № 2, 292—328 (англ.)

Пусть $w=f(z)$ — функция, мероморфная в $z\neq\infty$, λ и μ — соответственно ее порядок и нижний порядок, $k(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}(N(r,0)+N(r,\infty))/T(r,f)$. Неванлинна доказал, что для функций конечного нецелого порядка λ $\inf k(f)=k(\lambda)>0$ (Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929, стр. 51) и дал оценку $k(\lambda)$ снизу. В теореме 1 авторы уточняют эту оценку и доказывают, что

$$k(\lambda)\geqslant\frac{|\sin\pi\lambda|}{2{,}2\lambda+|\sin\pi\lambda|}\geqslant\frac{1}{3{,}3}k(\lambda).$$

Отношение этой оценки к неванлинновской при $\lambda\to\infty$ стремится к ∞, как $\ln\lambda$. Авторы сообщают, что при $\lambda\leqslant 1$ ими найдено точное значение $k(\lambda)$ (будет опубликовано в Duke Math. J.). Следующая теорема показывает, что при сильных ограничениях на аргументы и минимальных ограничениях на модули нулей целой функции можно утверждать, что нуль является дефектным значением.

Теорема 2. Если нули целой функции отрицательны и имеют конечный показатель сходимости $\rho>1$, то $\delta(0,g(z))>A(1+\ln\rho)^{-1}$, где A — некоторая абсолютная постоянная.

Теорема 3 а. Если $f(z)$ — мероморфная функция, $\sigma > 1$, $r > 2$, то $T(r, f) \leqslant 4(\sigma-1)^{-1} T(\sigma r) + \max\{N(\sigma r, 0), N(\sigma r, \infty)\} + O(\ln r)$. Для целой функции $g(z)$ $\ln M(r, g) \leqslant 4(\sigma-1)^{-1} T(\sigma r, g) + N(\sigma r, 0) + O(\ln r)$.

Из следствий этой теоремы отметим следующее: мероморфные функции нулевого нижнего порядка имеют не более одного дефектного значения (это является сильным обобщением результатов Константинеску, РЖМат, 1958, 6641. — *Реф.*).

Далее получен ряд теорем, качественный смысл которых сводится к утверждению, что малая величина $k(f)$ влечет за собой большую регулярность роста $f(z)$. Отметим следующие результаты. Если для некоторого неотрицательного целого числа q и некоторого β, $0 < \beta \leqslant 1/2$, $k(f) < \beta [5e(1 + \ln q)]^{-1}$, то: 1) из $\lambda > q + 1 - \beta$ следует $\mu \geqslant q + 1 - \beta$; 2) из $\mu < q + \beta$ следует $\lambda \leqslant q + \beta$; 3) из $q - 1/2 \leqslant \mu < q + 1/2$ следует $q \geqslant 1$, $|\lambda - q| < 0,1\beta$ и $q - \beta \leqslant \mu \leqslant \lambda \leqslant q + 0,1\beta$. Если $k(f) < [10e(\mu + 3/2)]^{-1}$, то дефекты $f(z)$ инвариантны относительно сдвига начала координат. В качестве простого следствия получается.

Теорема 7. Целая функция конечного порядка с суммой дефектов, равной 2, необходимо имеет положительный целый порядок и регулярный рост.

Авторы не отмечают, что теорема 7 содержится в статье Пфлюгера (Pfluger A., Comment. math. helv., 1946, 19, 91 — 104). А. А. Гольдберг

11527. Мероморфные функции конечного порядка. **Шах** (Meromorphic functions of finite order. Shah S. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 810—821 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная в $z \neq \infty$ функция конечного порядка ρ, обозначим G её род, а S — род частного двух канонических произведений, построенных по нулям и полюсам $f(z)$. Пусть $k \geqslant 1$ — некоторая постоянная, $A(n) = 2$ при $n = 0$ и $A(n) = 2e(2 + \ln n) \times (n^2 + 1)^2/n$ при $n = 1, 2, \ldots$, $B(n, x) = A(n)/(x-n) \times (1 + n - x)$, $h(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})(1 + \sqrt{1 + x^2})^x x^{-x}$, $x > 0$. Основные результаты статьи:

Теорема 1. Если $\rho = G = S$ и $\varphi(r)$ — некоторая положительная неубывающая функция такая, что $\int_1^\infty \varphi^{-1}(r)\, d \ln r < \infty$, то справедливо

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(kr, f)}{\{n(r, 0) + n(r, \infty)\}\varphi(r)} = 0$$

и такое же соотношение, в котором n заменено на N.

Теорема 2. Пусть порядок $f(z)$ — не целый и $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — две разные мероморфные в $z \neq \infty$ функции (возможно, рациональные функции или постоянные) такие, что $T(r, g_i(z)) = O(T(r, f))$. Тогда

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(kr, f)}{n(r, 0, f - g_1) + n(r, 0, f - g_2)} \leqslant k^{1+S} B(S, \rho).$$

Если заменить n на N, то правую сторону неравенства нужно домножить на $S + 1$.

Теорема 3. Если $f(z)$ — целая функция положительного конечного порядка ρ, то $\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(kr)}{n(r, 0, f-g)} \leqslant \frac{2k^\rho h(\rho)}{\rho}$, для всех целых функций $g(z)$ таких, что $T(r, g(z)) = o(T(r, f))$, с одним возможным исключением. Если n заменить на N, то правую сторону неравенства нужно умножить на ρ. Если $\rho = 0$, то $\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(kr)}{N(r, 0, f-g)} = 1$ для всех целых функций $g(z)$ таких, что $M(r, g) = O(M(r, f))$.

В теореме 4 аналогичный результат получен для мероморфных функций. При этом в случае положительного порядка результат отличается только тем, что допускаются две исключительные функции; в случае же $\rho = 0$ утверждается, что

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(kr, f)}{N(r, 0, f - g_1) + N(r, 0, f - g_2)} \leqslant 1$$

для любых двух различных мероморфных функций таких, что $T(r, g_i) = O(T(r, f))$, $i = 1, 2$.

А. А. Гольдберг

11528. Изменение знака вещественной части мероморфной функции на окружности единичного круга. **Ито** (The variation of the sign of the real part of a meromorphic function on the unit circle. Ito Jun-Iti), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 1, 60—78 (англ.)

Доказываются две теоремы о функциях, мероморфных в круге $|z| < 1$ и имеющих нули и полюсы на окружности $|z| = 1$, обобщающие результаты, ранее полученные автором и другими исследователями. Доказанные теоремы применяются затем для обобщения некоторых результатов Гудмана и Робертсона. Вводятся следующие определения.

I. Вещественная часть мероморфной в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ называется „меняющей свой знак $2p$ раз на $|z| = 1$", а сама функция $f(z)$ — „принадлежащей классу $M(p)$", если существуют такие $2p$ значений θ, $-\pi \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{2p} < \pi$, что для ε, принимающего одно из значений $+1$ или -1, справедливы неравенства

$$\varepsilon \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } \tau_{2k} > \theta > \tau_{2k-1} & (k = 1, 2, \ldots, p) \\ \leqslant 0 \text{ при } \tau_{2k+1} > \theta > \tau_{2k} & (k = 1, 2, \ldots, p-1), \\ \tau_1 > \theta \geqslant -\pi, \quad \pi > \theta > \tau_{2p}, \end{cases}$$

если исключить из рассмотрения полюсы $f(z)$ на $|z| = 1$. В частности, если существует для каждого $e^{i\tau_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$ такое $\lambda > 0$, что при $0 < \delta < \lambda$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} f(e^{i(\tau_k + \delta)}) \operatorname{Re} f(e^{i(\tau_k - \delta)}) < 0,$$

то $\operatorname{Re} f(z)$ называется „точно меняющей $2p$ раз свой знак на $|z| = 1$", а $f(z) \in M_{(p)}$.

II. Точка $e^{i\zeta_k}$ $(-\pi \leqslant \zeta_k \leqslant \pi)$ называется отрицательной, если она есть одна из точек $e^{i\tau_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$, не являющихся полюсами $f(z)$, и $\varepsilon(-1)^k \operatorname{Im} f(e^{i\zeta_k}) \leqslant 0$. Точки $e^{i\tau_k}$, не являющиеся отрицательными точками функции $f(z)$, называются ее положительными точками.

III. Функция $f(z) \in R_1(p; m)$, если $f(z) \in M(p)$ и число положительных точек $f(z)$ равно m. Для функций класса $M(p)$ определяется обобщенный порядок нулей и полюсов на $|z| = 1$: (A) Если q есть произвольное нечетное число и если нуль или полюс $e^{i\zeta}$ функции $f(z)$ на $|z| = 1$ $(-\pi < \zeta < \pi)$, отличный от $e^{i\tau_k}$, имеет обычный порядок q и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to 1} (-1)^{[q/2]} \varepsilon (1 - r)^q \operatorname{Re}\{f(re^{i\zeta})\}^{\pm 1} \begin{cases} < 0 \text{ для } \tau_{2n} > \zeta > \tau_{2n-1}, \\ k = 1, 2, \ldots, p, \\ > 0 \text{ для } \tau_{2k+1} > \zeta > \tau_{2k}, \\ k = 1, 2, \ldots, p-1, \end{cases}$$

$$\tau_1 > \zeta > -\pi, \quad \pi > \zeta > \tau_2,$$

где знак + (−) относится к случаю полюса (нуля), то обобщенный порядок $e^{i\zeta}$ есть $q+1$. (Б) Если q есть любое четное число и $e^{i\zeta}$, принадлежащее множеству $\{e^{i\tau_k}\}$, является нулем или полюсом q-го порядка $f(z)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to 1}(-1)^{k+\frac{q}{2}}\varepsilon(1-r)^q \operatorname{Im}\{f(re^{i\zeta})\}^{\pm 1}<0,$$

где знаки ± 1 соответствуют тем же случаям, что и в (А), то обобщенный порядок $e^{i\zeta}$ равен $q-2$. (В) Наконец, для нуля или полюса $e^{i\zeta}$ на $|z|=1$ порядка q, не удовлетворяющего условиям (А) и (Б), то обобщенный порядок равен $2[q/2]$.

IV. Все нули и полюсы $f(z)$ на $|z|=1$, порядки которых заменены обобщенными порядками, называются замкнутыми нулями и полюсами $f(z)$ на $|z|=1$.

Автор доказывает 7 лемм и две теоремы.

Теорема I. Пусть q будет целое число, а $f(z)\in R_1(p;m)$ и в окрестности $z=0$ справедливо разложение $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+q}$. Тогда:

1) $m-p=q+s+s_1-t-t_1$;

2) $$\min_{-\pi<\theta<\pi}\left|\frac{(e^{i\theta}-z)\,|a_0|^2}{e^{i(\theta-\alpha)}\bar{a}_0+ze^{-i\beta}a_0}\right|\leqslant\left|\frac{f(z)}{z^qP(z)Q(z)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{-\pi<\theta<\pi}\left|\frac{e^{i(\theta+\alpha)}a_0+ze^{i\beta}\bar{a}_0}{e^{i\theta}-z}\right|;$$

3) $|a_n|\leqslant\max_{-\pi<\theta<\pi}|\Phi_n(\theta)|$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$.

Здесь

$$\alpha=\sum_{k=1}^{m+2t_1}\sigma_k-\sum_{k=1}^{2p-m}\delta_{k,\beta}=$$
$$=2\left(\sum_{k=1}^{s}\arg b_k-\sum_{k=1}^{t}\arg d_k\right),$$

$$P(z)=\prod_{k=1}^{2p-m+2s_1}(e^{i\delta_k}-z)\prod_{k=1}^{m+2t_1}(e^{i\sigma_k}-z)^{-1},$$

$$Q(z)=\prod_{k=1}^{s}(1-z/b_k)(1-\bar{b}_kz)\prod_{k=1}^{t}(1-z/d_k)^{-1}(1-\bar{d}_kz)^{-1};$$

b_k — нули, а d_k — полюсы $f(z)$ в $|z|<1$; $e^{i\sigma_k}(k=1,2,3,\ldots 2p-m+2s_1)$ и $e^{i\sigma_k}$ $(k=1,2,3,\ldots m+2t_1$ — соответственно нули и полюсы $f(z)$ на $|z|=1$, причем $2s_1$ — число замкнутых нулей, $2t_1$ — число замкнутых полюсов, m — число положительных и $2p-m$ — число отрицательных точек $f(z)$ на $|z|=1$. Наконец,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\theta)z^{n+q}=z^qP(z)Q(z)\frac{e^{i(\theta+\alpha)}a_0+ze^{i\beta}\bar{a}_0}{e^{i\theta}-z},$$

где $|z|<\min(|d_1|,|d_2|,\ldots,|d_t|)$. Оценки 2) и 3) точные.

Теорема II. Пусть q будет целое число, а функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+q}$ регулярна в $0<|z|<1$ и $f(z)\in R_1(p;m)$. Тогда: 1) $N=m-p-q-s_1+t_1\geqslant 0$; 2) $|f(z)|\leqslant\max|W(\theta)|$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$; 3) $|a_n|\leqslant\max_{-\pi<\theta<\pi}|\psi_n(\theta)|$ $(n=0,1,2,\ldots)$, где $W(\theta)=\{(A_0e^{i\theta}+\bar{A}_0z)(e^{i\theta}-z)^{-1}+\sum(A_{-k}z^{-k}-\bar{A}_{-k}z^k)\}e^{i\alpha/2}z^NP(z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\theta)z^{n+q}$; α,s_1,t_1, $P(z)$ — такие же, как в теореме I, а числа A_{-k} $(k=1,2,\ldots,N)$ определяются из разложения

$$e^{-i\alpha/2}z^{-N}P^{-1}(z)\equiv\sum_{n=-N}^{+\infty}A_nz^n.$$

Оценки 2) и 3) точные при любых заданных коэффициентах a_k $(k=1,2,3,\ldots,N)$. В. А. Зморович

11529. Строение факторов автоморфности. Ганинг (в подл. Ганинг Р. К.) (Gunning R. C.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 3, 25—46

См. РЖМат, 1957, 4763.

11530. Автоморфные функции и абелевы многообразия. Симура (Fonctions automorphes et variétés abéliennes. Shimura Goro), Sémin Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 167-1—167-9 (франц.)

Пусть V — проективное алгебраическое многообразие над полем k, $V[t]$ — многообразие, которое получается из V применением проективного преобразования t общего вида, z — точка Чжоу многообразия $V[t]$. Геометрическое место точек z относительно k называется проективным семейством многообразия V и является алгебраическим многообразием над k. Пусть S_n — пространство Зигеля. Для $z\in S_n$ обозначим через $D(z)$ решетку в n-мерном комплексном пространстве C^n, порожденную столбцами матрицы (zE). Тогда $C^n/D(z)$ аналитически изоморфно некоторому абелеву многообразию $A(z)$. Пусть $F(z)$ — проективное семейство для $A(z)$. Доказывается, что на S_n существуют такие мероморфные функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_\alpha$ и такое аналитическое подмножество Y коразмерности 1, что для $z\in S_n-Y$ все $F(z)$ имеют одинаковые размерности и степени, причем точка Чжоу для $F(z)$ имеет вид: $(1,\varphi_1(z),\ldots,\varphi_\alpha(z))$. Оказывается, что функции φ_i инвариантны относительно модулярной группы и порождают поле модулярных функций Зигеля. А. Л. Онищик

11531. Модулярные формы. Картан (Formes modulaires. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan. Ecole norm. supér. 1957—1958, 1. Paris, 1958, 4-1—4-12 (франц.)

Пусть ρ — голоморфное представление линейной группы $GL(n,C)$ в комплексном векторном пространстве F. Матрица $M\in Sp(n,R)$ имеет вид $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, где a,b,c,d, — матрицы порядка n. Голоморфная функция f со значениями в F на пространстве Зигеля S_n называется модулярной формой рода ρ, если $f(Mz)=\rho(cz+d)f(z)$ для всякого элемента M модулярной группы Γ. Доказывается, что если $n>1$, то модулярная форма $f(z)$ допускает абсолютно и равномерно сходящееся на каждом компакте разложение $f(z)=\sum_{s>0}a(s)e^{2\pi iS_p(sz)}$, где суммирование производится по всем неотрицательным симметрическим матрицам $s=(s_{ij})$ таким, что s_{ii} и $2s_{ij}$ $(i\neq j)$ — целые числа. С каждой формой f рода ρ связывается модулярная форма $\Phi f=f_1$ рода ρ_1 в пространстве S_{n-1}, где $\rho_1(a)=\rho\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$. Если f допускает вышеуказанное разложение, что функция f_1 определяется формулой $f_1(z')=\sum_{s_1>0}a\begin{pmatrix}s_1&0\\0&0\end{pmatrix}e^{2\pi iS_p(s_1z')}$ $(z'\in S_{n-1})$. Доказывается, что если $z=\begin{pmatrix}z_1&u\\u'&z_{nn}\end{pmatrix}$, $z_1\to z'$, $\operatorname{Im}z_{nn}\to\infty$, причем $\operatorname{Im}z\geqslant cE$ для некоторой константы $c>0$, то $f(z)\to f_1(z')$. Для того чтобы $\Phi f=0$, необходимо и достаточно, чтобы $a(s)=0$ для тех матриц s, которые не являются положительно определенными. А. Л. Онищик

11532. Голоморфные функции с суммируемым квадратом в полуплоскости Зигеля. Годман (Fonctions holomorphes de carré sommable dans le demiplan de

Siegel. Godement Roger), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 1. Paris, 1958, 6-1—6-22 (франц.)

Пусть ρ — неприводимое представление группы $GL_+(n, R)$ всех вещественных матриц с положительным определителем в конечномерном комплексном векторном пространстве F. Старший вес этого представления задается набором комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть α_n вещественно; тогда в F существует евклидова метрика, относительно которой все преобразования $\rho(x)$, где x — симметрическая матрица, являются самосопряженными. Пусть p — вещественное число, причем $1 \leqslant p < \infty$. Обозначим через $H^p(\rho)$ множество всех голоморфных функций f на пространстве Зигеля S_n со значениями в F, для которых существует

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{S_n} \| \rho(y^{1/2} f(z) \|^p dz \right\}^{1/p},$$

где $y = \operatorname{Im} z$ и $\| \ \|$ — евклидова норма в F. Доказывается, что $H^2(\rho) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_n > n$. Далее предполагается, что $H^2(\rho) \neq 0$, и вводится понятие кернфункции K_ρ пространства $H^2(\rho)$. Оказывается, что $K_\rho(z_1, z_2) = c(\rho) \rho\left(\frac{z_1 - \bar{z}_2}{2i}\right)^{-1}$, где $c(\rho)$ — постоянная, зависящая только от ρ. Отсюда получается, что для любой $f \in H^2(\rho)$ имеем

$$f(z_1) = c(\rho) \int_{S_n} \rho\left(\frac{z_1 - \bar{z}_2}{2i}\right)^{-1} \rho(y_2) f(z_2) dz_2,$$

где $y_2 = \operatorname{Im} z_2$. А. Л. Онищик

11533. О топологической классификации римановых накрытий. Стоилов (Sur la classification topologique des recouvrements riemanniens. Stoïlow S.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, **1**, № 2, 37—42 (франц.)

См. РЖМат, 1960, 2860.

11534. Регулярные области. Сакаи Хидэкадзу, Сугаку, 1957, **9**, № 1, 17—44 (японск.)

Обзорная статья по современным достижениям различных авторов, относящимся к областям регулярности (в теории функций многих комплексных переменных). Гл. 1. Выпуклость областей; Гл. 2. Теоремы о продолжении и аппроксимации; Гл. 3. Проблема Леви. Библ. 74 назв. Rimhak Ree

Перевод из Math. Revs., 1959, № 3, 1790

11535. Применение формулы Пуанкаре к разложению в ряды Тейлора и Фурье аналитических функций многих переменных. Аркаке (Aplicarea formulei lui Poincaré la dezvoltarea în serie Taylor şi Fourier a funcţiilor analitice de mai multe variabile complexe. Arcache Alexandru), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 9, 529—531 (рум.; рез. русск., франц.)

Исходя из формулы Коши-Пуанкаре для бицилиндра, приводится новое доказательство разложений в ряды Тейлора и Фурье аналитических функций двух комплексных переменных. И. И. Баврин

11536. Интегральные представления. Темляков А. А., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 5, 986—988

В заметке сопоставляются интегральные представления голоморфных функций двух комплексных переменных в двоякокруговых областях специального вида, найденные и ранее опубликованные автором, а также Л. А. Айзенбергом в ряде статей (РЖМат, 1957, 8587; 1958, 9033). Б. А. Фукс

11537. Поправки. Темляков А. А. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 3, 438

Поправки содержат уточнение условий, при которых имеет место интегральное представление функции двух переменных в двоякокруговой области специального типа, найденное А. А. Темляковым и опубликованное в Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 1, 40—42 (РЖМат, 1960, 6397). Б. А. Фукс

11538. К вопросу о предельных значениях интеграла типа Коши для функций многих комплексных переменных. Пономарев А. Т., Уч. зап. Кишиневск. ун-т, 1959, **39**, 281—284

Исследуется вопрос о предельных значениях интеграла типа Коши, взятого по остову регулярной бицилиндрической области пространства двух комплексных переменных (Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1948, стр. 23). Плотность в рассматриваемом интеграле типа Коши предполагается аналитической на остове. Устанавливаются обобщения формул Сохоцкого для предельных значений этих интегралов. В работе имеются опечатки.

Примечание референта. Отметим, что одновременно с реферируемой работой появилась статья В. А. Какичева (РЖМат, 1960, 7518), в которой изучаются те же вопросы при значительно более общих предположениях (плотность в интеграле типа Коши не предполагается аналитической в точках остова и т. д.). Л. А. Айзенберг

11539. О преобразовании Фурье целых функций нескольких комплексных переменных. Алиев Ф. С., АзэрбССР. Елмлэр Акад. хабэрлэри Физ.-рijазијjат вэ техн. елмлари сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1959, № 5, 13—20 (рез. азерб.)

Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $F(z)$ — ассоциированная с нею по Борелю функция. Используя теорему Пойа о связи между ростом $f(z)$ и распределением особенностей $F(z)$, И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов показали, что преобразование Фурье функции $f(z)$, рассматриваемой как функционал над пространством K, сосредоточено на замкнутой выпуклой оболочке множества особенностей функции $F(z)$ (РЖМат, 1955, 3291).

В реферируемой работе этот результат переносится на целые функции экспоненциального типа многих комплексных переменных $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Основываясь на результатах референта об аналоге теоремы Пойа для функций многих переменных (РЖМат, 1953, 7664), автор дает построение области, в которой сосредоточено преобразование Фурье функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. В отличие от случая одной переменной, при $n \geqslant 2$ эта область может быть невыпуклой.

В конце статьи дается построение целой функции двух переменных, преобразование Фурье которой сосредоточено на топологическом произведении двух заданных ограниченных плоских областей. В. К. Иванов

11540. Ядро Бергмана для комплексных сфер и интеграл Пуассона для их подобластей. Какураи (The Bergman kernel of the complex spheres and Poisson integral in its subdomain. Kakurai Shigeki), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1959, **A6**, 25 March, 256—263 (англ.)

Для классической области R_{IV} (комплексной сферы) повторяется известное вычисление ядра Бергмана (Хуа Ло-гэн, Гармонический анализ в классических областях, Изд-во ин. лит. 1959, стр. 89). Находятся предельные соотношения для этого ядра при приближении точки, в которой оно вычисляется, к границе области. Эти соотношения аналогичны формулам, найденным Бергманом для пространства C^2 (Bergman S., J. reine angew. Math., 1933, 169, 1 — 42). Б. А. Фукс

11541. Число точек пересечения двух аналитических поверхностей в пространстве двух комплексных переменных. Бергман (The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables. Bergman Stefan), Math. Z., 1960, 72, № 3, 294—306 (англ.)

Рассматривается область $\mathfrak{M} \subset C^2$, ограниченная двумя аналитическими гиперповерхностями $\{z_2 - h_k(z_1, \lambda_k) = 0\}$, $k = 1, 2$, $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 2\pi$. По аналогии с выражением $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g'(z)}{g(z) - a} dz$ для числа a — точек голоморфной функции $g(z)$ в области $D \subset C^1$, автор строит, исходя из интегральной формулы Бергмана—Вейля, выражение для числа точек пересечения аналитических поверхностей $g(z_1, z_2) = a_1$, $f(z_1, z_2) = a_2$, попадающих в область $\mathfrak{M}$.

Б. А. Фукс

11542. Об областях, выпуклых относительно класса полиномов. Макарова Л. Я., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 4, 173—178

Рассматривается класс $\sum_1$ областей голоморфности пространства комплексных переменных w, z, ограниченных частями гиперповерхностей $T_k = \{p_k(w, z) = c_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Здесь $p_k(w, z)$ — полином, $p_k = c_k(t)$ — жорданова кривая, разбивающая плоскость p_k на две части. Доказываются теоремы:

1) Пусть область $D \in \sum_1$ ограничена гиперповерхностями $p_k(w, z) = c_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, область $D_1 \in \sum_1$ — гиперповерхностями $p_k(w, z) = c_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, причем $D_1 \supset D$. Если область D_1 выпукла относительно полиномов, $\{p_0 = c_0(t)\}$ — бесконечная жорданова кривая, то и область D выпукла относительно полиномов.

2) Пусть область $D \in \sum_1$ ограничена гранями $\Gamma_k = \partial D \cap T_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ и каждая грань Γ_k пересекается с гранями $\Gamma_{i,k}, \ldots, \Gamma_{i_k k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Если а) все $\{p_k = c_k(t)\}$, $k = 1, \ldots, n$ — бесконечные жордановы кривые; б) существует область $\widetilde{D} \in \sum_1$, $\widetilde{D} \supset D$, выпуклая относительно класса полиномов ограниченная гиперповерхностями $\widetilde{T}_j = \{\widetilde{p}_j(w, z) = \widetilde{c}_j(t)\}$, $j = 1, \ldots, \widetilde{n}$; в) $\partial(p_k, p_{i_r k})/\partial(w, z) \neq 0$ при $(w, z) \in \widetilde{D}$, $k = 1, \ldots, n$; г) $\partial(p_k, \widetilde{p}_j)/\partial(w, z) \neq 0$ при $(w, z) \in \Gamma_j$; $k = 1, \ldots n$; $j = 1, \ldots, \widetilde{n}$, то область D выпукла относительно класс полиномов.

Б. А. Фук

11543. Заметка о голоморфных автоморфизмах односвязной нормальной области в пространстве многих комплексных переменных. Арai (Remarks on holomorphic automorphisms of a simply-connected normal domain in several complex variables. Arai Hiraku), Kōdai Math. Semin. Repts, 1959, 11, № 2, 88—94 (англ.)

Нормальной односвязной областью D в пространстве C^n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ называется область, гомеоморфная шару и ограниченная системой аналитических гиперповерхностей $\Phi_i = \{f_i(z_1, \ldots, z_n) = \gamma_i(t)\}$, $i = 1, \ldots, p \geqslant n$. Здесь функции f_i предполагаются голоморфными при $z \in \overline{D}$, функции $\gamma_i(t)$ — непрерывными при $A \leqslant t \leqslant B$. Кроме того, предполагается, что для каждой из указанных функций f_{i_1} можно из числа функций f_i найти такие функции $f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}$, что $\partial(f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})/\partial(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ при $z \in \overline{D}$. Рассматривается комплексный базис (R_i, φ_i), соответствующий голоморфному отображению области D с помощью каждой функции f_i (см. определение, например: РЖМат, 1960, 1600). Здесь R_i — некоторое нормальное комплексное пространство $\varphi_i : D \to R_i$ — голоморфное отображение области D в пространство R_i. Доказывается теорема: Каждому голоморфному автоморфизму области D соответствует голоморфный автоморфизм произведения пространств $R_1 \times \ldots \times R_p$. Справедливо и обратное утверждение.

Б. А. Фукс

11544. Теорема Фату, сходимость последовательностей, теоремы единственности аналитических функций многих комплексных переменных. Айзенберг Л. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 111—125

Дана ограниченная выпуклая область D пространства C^n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. В ней рассматривается класс голоморфных функций A, представимых в этой области как отношение ограниченных голоморфных функций. Доказываются следующие теоремы:

1. Функция $f \in A$ имеет почти во всех точках границы ∂D угловые граничные значения (в смысле меры $(2n-1)$-размерности, заданной на границе).

2. Пусть $\{f_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность функций, голоморфных и равномерно ограниченных в области D. Если на множестве $E \subset \partial D$ $\operatorname{mes} E > 0$, (имеется в виду мера $(2n-1)$-размерности на ∂D) последовательность угловых граничных значений $\{f_i(\xi)\}$ (где точка $\xi \in E$) функций f_i сходится по мере, то последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится внутри области D. Последовательность $\{f_i(\xi)\}$, где $\xi \in E$, сходится по мере к $f(\xi)$ — угловому значению функции $f = \lim\limits_{i \to \infty} f_i$ в точке ξ.

3. Пусть функция $f \in A$ в области D. Если угловые граничные значения функции f равны нулю на множестве $E \subset \partial D$, $\operatorname{mes} E > 0$, то функция $f \equiv 0$.

Б. А. Фукс

11545. Некоторые применения теории обобщенных функций ко многим комплексным переменным. Эренпрейс (Some applications of the theory of distributions to several complex variables. Ehrenpreis Leon), Semin. Analyt. Funct. Vol. 1. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 65—79 (англ.)

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном комплексном пространстве, граница которой имеет класс C^∞. Область Ω называется q-выпуклой, если для любого относительно компактного множества $U \subset \Omega$ существует такое относительно компактное множество $U' \subset \Omega$, что $\overline{U} \subset U'$ и что для любой граничной точки z' множества U' можно найти аналитические функции $f_1, \ldots f_{n-b}$ в Ω, удовлетворяющие условиям: $|f_j(z')| > 1$, $\min_j |f_j(z)| < 1$ $(z \in U)$.

Область Ω называется q-псевдовыпуклой, если каждая точка ее границы обладает такой окрестностью N, что область $N \cap \Omega$ является q-выпуклой. Сформулирован без доказательства следующий результат: область Ω является q-выпуклой тогда и только тогда, когда $Hi(\Omega, A) = 0$ для $j \geqslant n - q$, где A — пучок ростков аналитических функций. Отсюда вытекает, что область является q-выпуклой тогда и только тогда, когда она q-псевдовыпукла (доказательство приведено для случая $n = 2$, $q = 1$).

А. Л. Онищик

11546. О поведении на границе области гармонических положительных функций. Наим (Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques positives. Naïm Linda), C. r. Acad. sci., 1959, 243, № 18, 1266—1268 (франц.)

Без доказательства формулируется ряд результатов, относящихся к поведению на границе (в смысле Мартэна) отношения гармонической в области (или более обще в пространстве Грина) функции к фиксированной положительной гармонической функции. Эти результаты вошли в диссертацию автора с несколько измененной терминологией. Их формулировка затрудняется необходимостью введения большого числа вспомогательных понятий.

Н. С. Ландкоф

11547. Аксиоматическое обобщение субгармонических функций. Брело (Extension axiomatique des fonctions sousharmoniques. Brelot Marcel), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 16, 2334—2337 (франц.)

Наряду с аксиоматически определенными супергармоническими функциями ($\bar{p}$-функциями), введенными автором в предыдущей заметке (РЖМат, 1958, 4670) и являющимися полунепрерывными снизу, вводится более широкий класс функций S_B, определяемый некоторым базисом B регулярных областей. Он не связан с требованием какой-либо гладкости; функции, принадлежащие к этому классу, после регуляризации (регуляризацией $v(x)$ называется функция $\hat{v}(x)=\lim_{x'\to x} v(x')$) переходят в $\bar{p}$-функции. Нижняя грань семейства ограниченных снизу (локально) функций из S_B принадлежит S_B. Если функция из S_B (соответственно $\bar{p}$) $\not\equiv\infty$, то она называется S_B^*-(соответственно $\bar{p}^*$-) функцией. Потенциалом называется $\bar{p}^*$-функция $\geqslant 0$, у которой наибольшая p-миноранта есть нуль. С помощью гармонической меры $d\rho_x^\omega$ (x — любая точка $\omega\in B$) вводится понятие B-эквивалентности и B-сходимости. Если вообще существует потенциал >0, то всякая $\bar{p}^*$-функция >0 есть предел в обычном смысле и B—предел возрастающей последовательности потенциалов. Область δ называется областью полного (соответственно простого) определения, если всякая $\bar{p}$-функция (соответственно локально ограниченная $\bar{p}$-функция $\geqslant 0$) в $\Omega_0\supset\bar{\delta}\supset\delta$, являющаяся p-функцией в δ, определяется своими значениями вне δ (это определение является аналогом устойчивых областей). Если все области B являются областями полного определения, то всякая S_B^*-функция B-эквивалентна своей регуляризации (являющейся $\bar{p}^*$-функцией). Вводится аксиома IV, требующая существования регулярного базиса B_0, состоящего из областей простого определения (его можно считать счетным). Пусть E^+—пространство $\bar{p}^*$-функций $\geqslant 0$ (точнее соответствующих классов B-эквивалентных функций), $E^+_{x_0,\omega_0}\subset E^+$ характеризуется нормировкой $\int v d\rho^{\omega_0}_{x_0}=1$ (x_0 — фиксированная точка области $\omega_0\in B_0$). $E^+_{x_0,\omega_0}$ есть метризуемое и компактное выпуклое множество. В силу известной теоремы Крейна—Мильмана, использованной позднее Шоке (РЖМат, 1957, 4980), элементы $E^+_{x_0,\omega_0}$ допускают единственное интегральное представление при помощи крайних элементов. Последние будут двух типов: p — функции >0, равные 1 в x_0, и потенциалы. Это приводит к классическому представлению Рисса — Мартина. Доказательства теорем отсутствуют.

Н. С. Ландкоф

11548. Развитие аксиоматической теории супергармонических функций. Эрве (Développements sur une théorie axiomatique des fonctions surharmoniques. Hervé Rose-Marie), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 2, 179—181 (франц.)

Основные предположения такие же, как в заметке (реф. 11547). C обозначает класс конечных непрерывных функций в Ω с компактным носителем. $C^+\subset C$ состоит из всех функций $\geqslant 0$. $H\subset C$ есть класс разностей двух конечных непрерывных потенциалов в Ω. $H^+\subset H$ определяется дополнительным требованием неотрицательности потенциалов. Если $f\in C^+$ и ω — окрестность носителя f, то существует $u\in H^+$, $u=0$ вне ω такое, что $|u-f|<\varepsilon$ в Ω ($\varepsilon>0$). Каковы бы ни были множество E и точка x, существует мера Радона $\mu_x^E>0$ на Ω такая, что $\hat{R}_v^E(x)=\int v d\mu_x^E$ для всякой супергармонической в Ω функции $v\geqslant 0$. Множество точек Ω, где множество E разреженное, есть F_σ и имеет μ_x^E-меру нуль для всякой $x\in\Omega$. Точно так же μ_x^E-мере нуль имеет множество всех точек, где CE разреженное, если исключить саму точку x. Если E разреженное в точке $y\in\bar{E}\setminus E$, то в Ω существует супергармоническая функция $v>0$ такая, что $v(y)<\infty$ и $\lim_{x\in E,k\to y} v(x)=+\infty$. Имеет место представление Ф. Рисса супергармонической функции в области $\omega\subset\Omega$ с помощью потенциала. Что касается интегрального представления потенциала, то имеет место формула $p(x)=\int w(x)d\nu_p(w)$, где ν_p есть положительная мера Радона на множестве „крайних“ потенциалов (т. е. потенциалов $w(x)$, не допускающих нетривиального разбиения $w=w_1+w_2$ на сумму двух потенциалов >0). Всякий „крайний“ потенциал имеет носителем точку. Доказательства не приводятся.

Н. С. Ландкоф

11549. Сходимость супергармонических функций и обобщенных потенциалов. Брело (La convergence des fonctions surharmoniques et des potentiels généralisés. Brelot Marcel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 19, 2709—2712 (франц.)

Предполагаются выполненными три аксиомы одной из предыдущих заметок автора (РЖМат, 1958, 4670). Пусть в основном пространстве Ω дана $\bar{p}^*$-функция (реф. 11547) $v\geqslant 0$. Приведенной функцией R_v^E для v и множества $E\subset\Omega$ называется inf неотрицательных $\bar{p}$-функций, которые $\geqslant v$ на E. Ее регуляризация $\hat{R}_v^E$ (реф. 11547) есть $\bar{p}^*$-функция, которая называется выметанием v для E или экстремизацией v для CE. Пусть $v\geqslant 0$ — непрерывная $\bar{p}$-функция; тогда $R_v^E=\inf R_v^\omega$, где inf берется по всем открытым $\omega\supset E$; если E_1, E_2 компактны, то $R_v^{E_1\cup E_2}+R_v^{E_1\cap E_2}\leqslant R_v^{E_1}+R_v^{E_2}$. Таким образом, при фиксированном x_0 $R_v^E(x_0)$ есть сильно полуаддитивная емкость в смысле Шоке (РЖМат, 1957, 2711). Множество E называется полярным, если существует $\bar{p}^*$-функция $\geqslant 0$, равная $+\infty$ на E. При наличии положительной $\bar{p}^*$-функции в Ω это эквивалентно тому, что $\hat{R}_v^E=0$. Локальная полярность множества влечет его полярность. Вводится аксиома IV более сильная чем IV (реф. 11547), эквивалентная следующему принципу доминирования: если $\bar{p}$-функция $\geqslant 0$ мажорирует локально ограниченный потенциал на его носителе (дополнении к наибольшему открытому множеству, на котором v есть p-функция), то она его мажорирует всюду. При выполнении этой аксиомы и наличии в Ω счетного базиса справедлива теорема: inf семейства $\bar{p}$-функций $v\geqslant 0$ отличается от своей регуляризации (тоже $\bar{p}$-функции) только на полярном множестве. Доказательства отсутствуют.

Н. С. Ландкоф

11550. Введение понятия разреженности в аксиоматическую теорию потенциала. Эрве, Брело (Introduction de l'effilement dans une théorie axiomatique du potentiel. Hervé Rose-Marie, Brelot Marcel), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 22, 1956—1959 (франц.)

Основное пространство Ω предполагается удовлетворяющим аксиомам одной из предыдущих заметок Брело (РжМат, 1958, 4670) аксиоме IV (реф. 11549) и имеющим счетный базис. Предполагается также существование в Ω положительного потенциала. Множество $E\subset\Omega$

называется разреженным (effilé) в точке $x_0 \in E$, если $x_0 \in \overline{E}$ или если существует в Ω супергармоническая функция (p^* — функция в терминологии предыдущих заметок) $v > 0$ такая, что $\lim_{x \in E,\, x \to x_0} v(x) > v(x_0)$. E называется разреженным в $x_0 \in E$, если $E \setminus \{x_0\}$, разреженное в x_0 и $\{x_0\}$, есть полярное множество (реф. 11549). Множество точек E, в которых E разреженное, есть полярное множество. Если E замкнуто, то для того чтобы в $x_0 \in E^*$ (граница E) E не было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы в CE существовала супергармоническая функция $\sigma > 0$, стремящаяся к нулю в x_0. Если S есть носитель супергармонической локально ограниченной функции u (реф. 11549) и $x_0 \in S^*$, то $\overline{\lim}_{x \in CS,\, x \to x_0} u = \overline{\lim}_{x \in S^*,\, x \to x_0} u$. Если ω — открытое множество, f — непрерывная функция на ω^*, то существует построенное по Перрону — Брело решение обобщенной задачи Дирихле H_f^ω и оно стремится к f во всех точках ω^*, где $C\omega$ неразреженное. Множество точек ω^*, где ω разреженное, имеет нулевую гармоническую меру относительно ω. Если окрестностями точки x_0 считать все множества, содержащие x_0, дополнение к которым разрежено в x_0, то возникает топология, в которой супергармонические положительные функции непрерывны. В классическом случае результаты, полученные в заметке, известны (Brelot M., Bull. sci. math., 1941, 65). Намеченные доказательства следуют классическому случаю. Н. С. Ландкоф

11551. Классы функций на топологических триангулируемых многообразиях. Связанные с ними меры и функции Грина. Бобок, Раду (Une classe de fonctions définies sur des variétés topologiques triangulables. Mesures associées. Fonctions de Green associées. Boboc N., Radu N.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 2, 309—323 (франц.)

Пусть L — класс непрерывных вещественных функций, каждая из которых определена на некоторой области D n-мерного топологического триангулируемого многообразия V. $L(D) \subset L$ обозначает совокупность всех функций, определенных в D. Предположим, что выполнены следующие условия: 1) $L(D)$ есть вещественное линейное пространство, причем из $u \in L(D)$, $v \in L(\Delta)$, $u(x) = v(x)$ во всех точках $D \cap \Delta$ следует, что $w(x) \in L(D \cup \Delta)$, где $w(x) = u(x)$ при $x \in D$ и $w(x) = v(x)$ при $x \in \Delta$; 2) $u \in L$ ($u \neq \text{const}$) не может иметь неотрицательного максимума; 3) проблема Дирихле для любой жордановой области, лежащей в координатной окрестности, с любой непрерывной граничной функцией имеет решение в классе L; 4) если $u_n \in L(D)$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, $u_n < M$, то u_n сходится равномерно внутри D; 5) для каждого многообразия W^p размерности $p \leqslant n-2$, содержащегося в координатной окрестности, существует координатная окрестность $O(W^p)$, замыкание которой гомеоморфно замыканию сферы n-мерного евклидова пространства, и $e(x, W^p) \in L(O(W^p) - W^p)$ такая, что $\lim_{x \to t \in W^p} e(x, W^p) = +\infty$. Если, кроме того, $1 \in L$, то класс L называется классом U, в противном случае — классом U'. На всяком топологическом многообразии V существуют классы U и U', например решения линейных уравнений эллиптического типа. Для данного класса U (U') строится теория „гармонической“ меры и дается с помощью ее интегральное представление для решения задачи Дирихле. Далее понятие „гармонической“ меры распространяется на идеальную границу V и на произвольные компакты. Если идеальная граница V имеет нулевую меру, то не существует (кроме констант) на V ограниченной функции из U (U'). Наконец, с помощью альтернирующего процесса строится функция Грина, множество особенностей которой есть W^p, $p \leqslant n-2$. Она существует для любой компактной области, а для некомпактной области Δ — в случае $1 \in L(\Delta)$ и в случае, когда идеальная граница Δ имеет положительную меру. Н. С. Ландкоф

11552. Определение углового порядка локально простой кривой. Поволоцкий А. И., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 3, 524—526

Пусть Γ — плоская замкнутая кривая, являющаяся непрерывным и локально взаимно однозначным образом окружности, с заданным направлением обхода, имеющая лишь конечное число точек самопересечения и самокасания A_j, причем в окрестности каждой точки A_j Γ сводится к конечному числу простых дуг, проходящих через A_j. Точки A_j называются узлами Γ. Порядком $q(a)$ точки $a \in \Gamma$ относительно Γ называется деленное на 2π приращение $\arg(z-a)$ при обходе z по Γ. Порядком $q(D)$ области D относительно Γ ($D \cap \Gamma = 0$) называется общее значение $q(a)$ для точек $a \in D$.

Пусть Γ, сверх предыдущих требований, кусочно-гладка. Сумма $p(\Gamma)$ поворотов касательной на гладких дугах Γ и поворотов φ_j в вершинах ($-\pi \leqslant \varphi_j \leqslant \pi$) называется угловым порядком Γ; при этом φ_j определяются таким образом, чтобы в случае простой кривой Γ было $p(\Gamma) = \pm 1$, в зависимости от ориентации. Характеристики $q(a)$, $p(\Gamma)$ применялись М. Морсом (Топологические методы теории функций комплексного переменного, Изд-во ин. лит., 1951). В работе изучается связь между $q(a)$ и $p(\Gamma)$, существование которой, как отмечает автор, было указано М. А. Красносельским. Вводится понятие индекса $i(A)$ узла A кривой Γ. Две дуги Γ, проходящие через A, принадлежат одному пучку, если, при надлежащей ориентации, их соответствующие полукасательные в A совпадают; пучок может содержать также и одну дугу. Пусть всего имеется k пучков в узле A. Γ делит окрестность A на секторы S_r, из которых часть первого типа (с нулевым углом в A) и часть второго типа (с ненулевым углом в A). Сумма порядков $q(S_r)$ всех секторов первого соответственно второго типа обозначается q_1 соответственно q_2. Индексом узла A называется число $i(A) = \frac{1}{2}\left(q_1 + \frac{k-1}{k} q_2\right)$.

Основной результат: Если A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — узлы Γ, D_j ($j = 1, \ldots, m$) — компоненты дополнения Γ, то

$$p(\Gamma) = \sum_{j=1}^{m} q(D_j) - \sum_{j=1}^{n} i(A_j).$$

Отсюда выводится, что $i(A)$ — целое число, равное $1/2q^*$, где q^* — сумма порядков всех секторов S_r, за исключением произвольной пары диаметрально противоположных.

Примечание референта. Типографское исполнение работы крайне небрежно. В определении $q(a)$ (стр. 524) вместо множителя $\frac{1}{\pi}$ должно быть $\frac{1}{2\pi}$; на стр. 5 5, 9-я стр. снизу, должно быть π вместо μ; дважды искажена фамилия М. Морса. А. И. Фет

11553. Многомерный аналог одной теоремы Адамара. Аносов Д. В. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1959, № 1, 3—12

Рассматривается отображение T: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Ax + \varphi(x, y) \\ By + \psi(x, y) \end{pmatrix}$, где x, y есть векторы пространств $X(x_1, \ldots, x_n)$, и $Y(y_1, \ldots, y_m)$, причем: 1) спектр матрицы A расположен вне, а спектр B — внутри единичной окружности и $\det B \neq 0$; 2) $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$, 3) $|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)| < \varepsilon(|h| + |k|)$ при $|x|, |x+h|, |y|, |y+k| < r(\varepsilon)$, и то же — для $\psi(x, y)$. Для отображения T в статье доказывается полный аналог известной теоремы Адамара о существовании инвариантных многообразий $y = f_0(x)$ и $x = h_0(y)$, удовлетворяющих следующему условию Лип-

шица: $|f_0(x+h)-f_0(x)|<\delta|h|$, где $\delta\to 0$ при $|x|$, $|x+h|\to 0$, и то же — для h_0. При этом, в дополнение к результату Адамара для случая аналитических функций, показывается, что если φ, ψ — гладкие (не обязательно аналитические) функции, то и f_0, h_0 — гладкие функции. Ю. Ю. Трохимчук

11554. Экстремальная задача, относящаяся к теории квазианалитических функций. Ваде (An extremal problem related to the theory of quasi-analytic functions. Wahde Gösta), Math. scand., 1959, 7, № 1, 126—132 (англ.)

Пусть $H(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{2\nu}/m_\nu^2$, где числа m_ν вещественны и $m_0=1$, есть четная целая функция. Устанавливается, что нижняя грань интегралов $\int_0^\infty H(t)f^2(t)\,dt$ по всем вещественным функциям $f(t)$, для которых

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\,dt=1,\quad \int_0^\infty t^{2\nu}f(t)\,dt=0\ (\nu=1,2,3,\ldots),$$

совпадает с нижней гранью сумм

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(1/m_\nu^2)\int_0^\infty f^{(\nu)2}(x)\,dx$$

по всем вещественным функциям $f(t)$, для которых $f(0=1$ и $f^{(\nu)}(0)=0$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$, если одна из этих величин конечна. Указанные величины равны $\left(1/\pi\int_0^\infty(1/x^2)\log H(x)\,dx\right.$. А. Ф. Тиман

11555. Некоторые теоремы о множестве предельных значений. Уэстон (Some theorems on cluster sets. Weston J. D.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 435—441 (англ.)

Пусть T и Z — метрические пространства и $f(t)$ — функция, определенная на множестве $T_f\subset T$, $f(T_f)\subset Z$. Вводятся следующие обозначения (РЖМат, 1956, 1 79): $C(f,t)=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}_t}\overline{f(U)}$, где $\mathfrak{U}_t$ — совокупность всех окрестностей U точки t, и для любого множества $A\subseteq T$

$$C^A(f,t)=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}_t}\overline{\bigcup_{a\in A\cap U}C(f,a)}.$$

Легко проверяется, что $C^A(f,t)\subseteq C(f,t)$ и для $t\in A$ $C^A(f,t)=C(f,t)$. Если T — топологическое произведение двух пространств X и Y, то

$$C_Y(f,x,y)=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}_t}f(Y_x\cap U),$$

где Y_x — множество всех пар (x,y) с фиксированным x и $y\in Y$, а $t=(x,y)\in X\times Y$. Так же как и выше $C_Y(f,x,y)\subseteq C(f,x,y)$. Приводятся доказательства двух теорем:

1. Пусть S — непустое подмножество из T и для каждого $s\in S$ указано множество $A_s\subset S$ такое, что $s\in\overline{A_s}$. Если $f(t)$ — произвольная функция, $f(T_f)\subseteq Z$, где Z допускает покрытие компактными множествами, тогда в S существует резидуальное множество S_0, на котором $C^{A_s}(f,s)=C(f,s)$.

2. Предположим, что Z — локально компактное метризуемое пространство, обладающее свойством Линделёфа, а Y удовлетворяет первой аксиоме счетности. Пусть B — непустое множество в Y, а $f(x,b)$ — функция, определенная для $x\in X$, $b\in B$, непрерывная по x и $f(x,b)\in Z$. Тогда для каждого $y\in Y$ существует резидуальное множество $A(y)$ в X такое, что $C_Y(f,x,y)=C(f,y,x)$ для всех $x\in A(y)$.

Из 1) и 2) получаются как следствия некоторые известные результаты, в частности результаты Коллингвуда (РЖМат, 1956, 1279; 1960, 5164).

Д. Б. Потягайло

11556. Об одной краевой задаче аэродинамики решеток. Мейстер (Über ein Randwertproblem aus der Aerodynamik eines Gitters. Meister E.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 433—435 (нем.)

Задача об обтекании N-рядной решетки из прямолинейных отрезков потенциальным потоком несжимаемой жидкости ставится как задача нахождения регулярной вне решетки функции $w(z)$, обладающей свойствами: 1) $w(z)$ имеет период $2iTNe^{-i\lambda}$, 2) на k-м профиле $\operatorname{Im}w=q_k(x)$, 3) $w(z)$ исчезает далеко перед решеткой и ограничена позади нее, 4) в передней кромке обращается в бесконечность интегрируемого порядка, в задней кромке имеет особенность логарифмического типа. С помощью функции

$$z=-\frac{2T}{\pi}\cos\lambda\left\{\ln\frac{\cos\pi w+\sqrt{\cos^2\pi w-\cos^2\pi\beta}}{\cos\pi\beta}-\pi\operatorname{tg}\lambda w\right\}$$

внешность решетки отображается на внешность отрезков $m-\beta\leqslant w_1\leqslant m+\beta$, $w_2=0$ (m — целое) в плоскости $w=w_1+iw_2$, где $0\leqslant\beta<1/2$. Задача путем линеаризации приводится к определению функций Ω_1, Ω_2 с периодом N в плоскости w по условиям:

1. $$\lim_{w_2\to+0}\operatorname{Im}\Omega_1(w)=\lim_{w_2\to-0}\operatorname{Im}\Omega_2(w)=-r_{k_1}(w_1),$$
$$\lim_{w_2\to+0}\operatorname{Im}\Omega_2(w)=-\lim_{w_2\to-0}\operatorname{Im}\Omega_2(w)=-r_{k_2}(w_1)$$

для $k-\beta<w_1<k+\beta$; $w_2=0$, $k=0,\ldots,N-1$.

2. Ω_1, Ω_2 ограничены при $|w_2|\to\infty$, но $\Omega_1+\Omega_2$ стремится к нулю при $w_2\to\infty$.

3. Ω_1, Ω_2 должны при $w=m\pm\beta$ и $w=m\pm w_0$ иметь особенности интегрируемого порядка и $(\Omega_1+\Omega_2)\dfrac{dw}{dz}=0(|\ln(w-m-w_0)|)$ в задней кромке профиля.

Здесь $r_{k_1}(w_1)=\dfrac{1}{2}\left[r_k^+(w_1)+r_k^-(w_1)\right]$, $r_{k_2}(w_1)=\dfrac{1}{2}\left[r_k^+(w_1)-r_k^-(w_1)\right]$, $r_k^+(w_1)$, $r_k^-(w_1)$ — нормальные скорости на берегах разрезов, проведенных по отрезкам $m-\beta\leqslant w_1\leqslant m+\beta$, $w_2=0$, $w=m\pm w_0$ — задняя и передняя кромки.

Решение для Ω_2:

$$\Omega_2(w)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\omega=k-\beta}^{k+\beta}r_{k_2}(\omega)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{N}(w-\omega)\,d\omega.$$

Ω_1 ищется как решение задачи Гильберта $\Omega_1(w_1+i\cdot0=-\Omega_1(w_1-i\cdot0)-2ir_{k_1}(w_1)$ для $k-\beta<w_1<k+\beta$; $\Omega_1(w_1+i\cdot0)=\Omega_1(w_1-i\cdot0)$ для $k+\beta<w_1<k+1-\beta$. $N+1$ — произвольный параметр, входящий в решение однородной задачи, определяется из условий (2) и (3). Искомое поле скоростей получено в виде

$$\Omega(w)=-\frac{1}{N_i}[\sin\pi(w+\beta)\sin\pi(w-\beta)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{N-1}\times$$
$$\times\int_{\sigma=-\beta}^{\beta}[r_{k_1}(\sigma+k)(\sin^2\pi\beta-\sin^2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\frac{\sin(\pi/N)\{(N-1)w+\sigma+k-Nw_0\}}{\sin(\pi/N)(w-k-\sigma)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\pi w}{\sin\pi\beta\cos\lambda+\cos\pi w_0}\right)-r_{k_2}(\sigma+k)\sin\pi\beta\cos\lambda\times$$
$$\times\left(\frac{\sin(\pi/N)\{(N-1)(w-\sigma)+k\}}{\sin(\pi/N)(w-k-\sigma)}+\frac{\cos\pi(\sigma-w_0)\cdot\cos\pi w}{\sin\pi\beta\cos\lambda+\cos\pi w}\right)\Bigg]\times$$

$$\times \frac{d\sigma}{\sin\pi(\sigma-w_0)} +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\sigma=-\beta}^{\beta} r_{k_2}(\sigma+k)\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{N}(w-k-\sigma)\sin\pi(\sigma-w_0)+\right.$$

$$+\frac{\sin\pi\beta\cos\lambda\cos\pi(\sigma-w_0)}{\sin\pi\beta\cos\lambda+\cos\pi w_0}-$$

$$\left.-r_{k_1}(\sigma+k)\frac{(\sin^2\pi\beta-\sin^2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sin\pi\beta\cos\lambda+\cos\pi w_0}\right]\frac{d\sigma}{\sin\pi(\sigma-w_0)}.$$

Решение задачи обтекания решетки из тонких профилей путем сведения к задачам Гильберта ранее рассматривалось в работах Л. И. Чибриковой (РЖМат, 1957, 7828). Г. Г. Тумашев

11557. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации. Аксентьев Л. А., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 133—140

Выводятся достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации, состоящей в определении профиля основания плотины по заданной скорости фильтрации $v(s)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от начальной точки профиля, $0 \leqslant s \leqslant l$. Известно, что производная функции, отображающей нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$ на часть плоскости z, занятую жидкостью, имеет вид:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \exp\frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\cdot\frac{d\tau}{\tau-\zeta},\quad \xi(t)=\ln\frac{ds}{dt},$$

а $s(t)$ определяется из равенства $\int_0^s v(s)\,ds - \frac{kH}{2} = \frac{kH}{\pi}\arcsin t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ (k — коэффициент проницаемости однородного горизонтального слоя бесконечной глубины, H — напор).

Таким образом однолистность искомого профиля равносильна однолистности $z(\zeta)$. Исследование $z(\zeta)$ проводится на основе известного достаточного условия однолистности аналитической функции в выпуклой области ($\operatorname{Re}(dz/d\zeta) > 0$), которое автор приспособил к случаю, когда требуется доказать однолистность в замкнутой области. Получены два достаточных условия однолистности решения по форме совпадающих с условием, доложенным референтом на III Всесоюзном математическом съезде, но с улучшенными значениями постоянных в оценках. В. С. Рогожин

11558. Об определении локальных и суммарного давления при фильтрации под плотиной. Ляшко (Про визначеняя локальних і сумарного тисків при фільтрації під греблею. Ляшко І. І.) Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ., вип. 1, 75—82 (укр. рез. русск.)

Рассматривается методика определения вертикальной составляющей равнодействующих сил, приложенных к водонепроницаемому основанию плотины или к наперед заданной его части для многошпунтовых незаглубленных флютбетов в случае, когда известны значения потенциальной функции в нескольких точках подземного водонепроницаемого контура. Задача решена для конечной глубины однородного водопроницаемого грунта для случая прямолинейного водоупора, а также и для произвольного криволинейного водоупора, что является дальнейшим приближением к реальным условиям, встречающимся на практике. Доказана вариационная теорема, которая, дополняя результаты Г. Н. Положего (РЖМат, 1957, 8599), позволяет при помощи метода мажорантных областей построить верхнюю и нижнюю оценки для потенциальной функции φ в точках водонепроницаемого основания плотины в наиболее важном для практики случае, когда φ не определяется в явном виде. Рассмотрены два примера, которые показывают, что разработанная автором методика позволяет определять суммарное противодавление с достаточной для практики точностью. Полученные результаты непосредственно примыкают к предыдущей статье автора (Ляшко І. І., Прикладна механіка, 1956, 2, в. 4), в которой аналогичным путем исследуется вопрос о выходных скоростях фильтрации. Библ. 6 назв. П. Ф. Фильчаков

11559. Общее решение задачи соприкасания с жестким профилем для произвольного многоугольника и произвольного многоугольного отверстия. Положий Г. Н., Наук. зап. Київськ. ун-та, 1957, **16**, № 2, 35—51

11560. Построение решения первой вспомогательной задачи для области, разграниченной улитками Паскаля. Туаев А. А. Азерб. сэнае инст. эсэрлэри, Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1956, вып. 15, 168—174 (рез. азерб.)

11561. Плоская задача типа Герца о сжатии цилиндрических тел. Каландия А. И., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1958, **21**, № 1, 3—10 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1958, **21**, № 1, 3—10 (русск.)

Рассматривается задача, изученная впервые И. Я. Штаерманом, о соприкосновении двух упругих тел: полуплоскости с круговым вырезом и шайбы, вложенной в этот вырез, причем радиусы отверстия и шайбы, мало отличаются друг от друга. Пользуясь комплексным представлением функции напряжения, автор сводит задачу к интегро-дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха. Схема для численного решения уравнений такого типа была указана автором ранее (Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, вып. 3.). И. Г. Арамановнч

11562. Определение напряженного состояния анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом. Космодамианский А. С., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 6, 118—121

Как известно, плоская задача теории упругости для некоторой области S в случае анизотропной среды сводится к определению двух функций $\Phi_k(z_k)$ комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k = z + \lambda_k\bar{z}$ в областях S_k, полученных из S путем аффинного преобразования, удовлетворяющих граничным условиям типа

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(p_1\Phi_1 + p_2\Phi_2) &= f_1(s),\\ 2\operatorname{Re}(q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2) &= f_2(s) \end{aligned} \qquad (1)$$

(λ_k, p_k, q_k — вещественные или комплексные постоянные, выражающиеся через упругие константы, $f_k(s)$ — функции дуги контура s, заданные с некоторым произволом, $k = 1, 2$). Дано приближенное решение плоской задачи для бесконечной плоскости с вырезом, мало отличающимся от эллиптического с неизменяемым контуром при заданных на бесконечности первых производных $\Phi_k'(z_k)$. Решение получено методом малого параметра (Лехницкий С. Г., Анизотропные пластинки, изд. 2, Гостехиздат, 1957), видоизмененным и упрощенным автором путем использования аппарата интегралов типа Коши. Получены явные формулы, дающие возможность построить функции в любом n-м приближении по ранее найденным 1-му, 2-му, ..., $n-1$-му приближениям. В виде примера рассмотрено двухстороннее растяжение анизотропной пластинки с впаянным абсолютно жестким ядром (или, что то же, кольцом), близким по форме к равностороннему треугольнику с закругленными углами. Уравнение контура задается в виде

$x = a(\cos\vartheta + \varepsilon\cos 2\vartheta)$, $y = a(\sin\vartheta - \varepsilon\sin 2\vartheta)$, (2)

ε принимается за малый параметр. Получены выражения функций Φ_k в третьем приближении и формулы для напряжений, действующих на линии контакта. Приведены результаты вычислений напряжений для пластинки с заданными упругими постоянными (фанера) и графики распределения напряжений по линии контакта, которые сравниваются с графиками для изотропной пластинки. Сделаны практические выводы. С. Г. Лехницкий

11563. О решении статических задач теории упругости и других полигармонических задач методом бесконечных алгебраических систем. Волков Д. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1959, вып. 50, 6—10

На примере статической задачи теории упругости показано, что в случае, когда координаты контура как функции полярного угла ϑ при отображении области на круг, имеют непрерывные производные до четвертого порядка включительно, задача может быть сведена к решению квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения функции $\varphi[z(\zeta)]$ в ряде Тейлора. Здесь φ — функция, входящая в краевое условие: $\varkappa\varphi(\zeta) - z(\zeta)\left[\overline{\frac{\varphi'(\zeta)}{z'(\zeta)}}\right] - \overline{\psi(\zeta)} = f_1 + if_2$, где $\varkappa = \text{const}$, f_1 и f_2 — заданные непрерывные функции, а $z(\zeta)$ отображает круг $|\zeta| < 1$ на область, для которой решается задача. В. С. Рогожин

11564. Бесконечная упругая полоса с бесконечным числом коллинеарных трещин. Койтер (An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Koiter W. T.), Ingr-Arch., 1959, 28, 168—172 (англ.)

Решается задача для бесконечной полосы при наличии бесконечного числа одинаковых разрезов длины $2c$ вдоль вещественной оси, расположенных через равные интервалы длины $2b$ ($b > c$). Предполагается, что вдоль щелей напряжения обращаются в нуль, а на бесконечности заданы значения компонентов напряжения σ_1, σ_2 и τ. Кроме того, предполагается, что вращение исчезает на бесконечности. Используется известный результат для случая конечного числа щелей, принадлежащий Н. И. Мусхелишвили (Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954), и путем предельного перехода, когда число щелей растет до бесконечности, выводятся формулы

$$\Phi(z) = \varphi(z) + \Psi(z), \quad \Omega(z) = \varphi(z) - \Psi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\tau)\sin\frac{\pi z}{2b}\left\{\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right\}^{-1/2},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}i\tau,$$

причем поле напряжений выражается через эти аналитические функции по следующим известным формулам:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}.$$

Для приращения энергии деформации, вызванного наличием щелей, получена формула $\Delta A = -\Delta A_0 \frac{8b^2}{\pi^2 c^2}\ln\cos\frac{\pi c}{2b}$, где $\Delta A_0 = \frac{\pi c^2}{E}(\tau^2 + \sigma_2^2)$ — приращение энергии при наличии лишь одной щели длины $2c$. И. Н. Векуа

11565. К обтеканию колеблющихся решеток. Сиразетдинов Т. К., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38, 57—72

Исследуется обтекание колеблющейся решетки из тонких профилей с осью, перпендикулярной к хорде, движущейся с постоянной скоростью w_0 с учетом деформации профилей и влияния вихревого следа, образующегося за профилями решетки. Считается, что профили слабо изогнуты, а колебания малы. В этом предположении граничные условия сносятся на хорды профилей и получается задача о нахождении потока с комплексной скоростью $w(z,t) = u(x,y,t) - iv(x,y,t)$, являющейся однозначной периодической (с периодом ih, где h — шаг решетки) функцией, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $\lim_{x\to-\infty} w(z) = 0$. 2) $v(x; y + nh) = f(x,t)$, $-a < x < a$, n — целое, $f(x,t)$ — заданная функция. 3) $v(x,y,t)$ ограничена у задней кромки профилей и может обращаться в бесконечность в передней кромке. 4) Линии $y = nh$, $a < x < a + w_0 t$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ (вихревые следы) являются линиями разрыва для $u(x,y,t)$, а $v(x,y,t)$ меняется при переходе через эти линии непрерывно. 5) Сумма циркуляций вокруг профиля и вихревого следа не зависит от времени.

Функция $w(z,t)$ представляется в виде $w(z,t) = (1/2hi)\int\gamma(\xi,t)[\operatorname{cth}(\pi/h)(\xi - z) - 1]\,d\xi$, где $\gamma(\xi,t)$ при $-a < \xi < a$ — интенсивность вихревого слоя, которым заменяется профиль, а при $a < \xi < a + w_0(t)$ — интенсивность вихревого следа. Устанавливается, что $\gamma(x,t)$ для $a < x < a + w_0 t$ имеет вид $\gamma(x,t) = \gamma(t - x/w_0)$, причем $d\Gamma(t)/dt = -w_0\gamma(t - x/w_0)$, где $\Gamma(t)$ циркуляция скорости вокруг одного из профилей решетки. Используя формулы для предельных значений сингулярных интегралов, автор получает для нахождения интенсивности вихревого следа интегральное уравнение первого рода

$$\int_a \gamma(t - \xi/w_0)\sqrt{\operatorname{sh}(\pi/h)(\xi + a)/\operatorname{sh}(\pi/h)(\xi - a)}\,d\xi = F(t),$$

($F(t)$ — известная функция). Если интенсивность вихревого следа найдена, то интенсивность вихревого слоя, заменяющего профили, находится в квадратурах. В случае, когда рассматриваются установившиеся периодические колебания, автор избегает решения интегрального уравнения для γ, используя вместо этого указанное выше соотношение между $\Gamma(t)$ и $\gamma(t - x/w_0)$.

Примечания референта. В работе не исследуется разрешимость интегрального уравнения первого рода для $\gamma(t - x/w_0)$. Такое исследование можно было провести с помощью преобразования Лапласа, так как интегральный член в уравнении легко приводится к выражению для свертки. В. С. Рогожин

11566. Об одном методе решения некоторых задач кручения, изгиба и плоской теории упругости для неодносвязных областей. Шерман (Про один метод розв'язання деяких задач кручення, згину і плоскої теорії пружності для неоднозв'язних областей. Шерман Д. И.), Прикл. механіка, 1957, 3, № 4, 363—377 укр., рез. русск., англ.)

Излагается метод, предложенный автором для решения весьма широкого класса задач кручения, изгиба и плоской теории упругости для двусвязных областей. Вкратце суть этого метода, получившего за последнее время широкое распространение, заключается в том, что если известно эффективное решение соответствующей задачи для односвязной области, являющейся либо внутренностью внутреннего, либо внешностью внешнего контуров, ограничивающих двусвязную область, то комплексные потенциалы выражаются через решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, с интегралом, взятым по одному из указанных контуров. Автор отмечает, что наиболее целесообразным способом численного решения этого уравнения является сведение его к бесконечной (как правило, квазирегулярной) системе линейных уравнений. Особенно важно, что метод сохраняет свою эффективность даже в

тех случаях, когда внешняя и внутренняя границы области близко подходят друг к другу. В качестве примера рассмотрена задача о кручении полого призматического бруса с поперечным сечением в виде двусвязной области, ограниченной извне весьма близким к квадрату правильным криволинейным четырехугольником, а изнутри—симметрично расположенной окружностью. И. Г. Араманович

11567. О напряженном состоянии скручиваемого квадратного бруса с симметричной круговой полостью. Шерман (Про напружений стан скручуваного квадратного бруса з симетричною круговою порожниною. Шерман Д. И.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 3, 250—262 (укр.; рез. русск., англ.)

На основании результатов, полученных автором в ранее опубликованной статье (реф. 11566), решается задача кручения для квадратного бруса с симметричной круговой полостью. Сначала задача приводится к интегральному уравнению типа Фредгольма, а затем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье искомой функции, которая оказывается квазирегулярной. Численные подсчеты автор производит для весьма близких одна к другой границ области; этот случай является неблагоприятным с точки зрения сходимости встречающихся при исследовании процессов, однако метод автора дает решение, обладающее достаточно высокой степенью точности. В. С. Рогожин

11568. Об одном методе решения плоской задачи теории упругости для бесконечной многосвязной области. Хацаревич Н. Х., Уч. зап. Чкаловск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 221—227

11569. Местные напряжения при кручении призматического бруса квадратного сечения с круглым несоосным отверстием. Аменздае Ю. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 5, 143—148

Рассматривается кручение однородной призмы с внешним контуром поперечного сечения, близким к квадрату, ослабленной круговым несоосным отверстием. Задача заключается в построении регулярной в области поперечного сечения функции $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющей граничным условиям: $F(t) + \overline{F(t)} = t\bar{t}$ на внешнем контуре и $F(t) + \overline{F(t)} = t\bar{t} + C$ на внутреннем (C — вещественная постоянная, подлежащая определению). Следуя работе Д. И. Шермана и М. З. Народецкого (Инженерный сб., 1960, **6**), автор вводит на внешнем контуре чисто мнимую функцию $\omega(t)$, для определения которой составляется уравнение Фредгольма. Исходя из этого уравнения, автор находит коэффициенты разложения функции $\omega(t)$ в ряд методом последовательных приближений из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Решение иллюстрируется примером. К. В. Соляник-Красса

11570. Расчет давления на плоскую пластинку в дозвуковом потоке. Попп (Calculul presiunii asupra unei plăci în curent compresibil subsonic. Popp Simona), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 6, 537—540 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассмотрена плоская задача о струйном обтекании неограниченным потоком невязкого газа плоской пластинки, нормальной к скорости течения в бесконечности. Комплексный потенциал течения $f(z, \bar{z})$ представляется приближенно в виде $f(z, \bar{z}) = f_0(z) + M_0^2 f_1(z, \bar{z})$, где M_0 — число Маха на свободной поверхности. Коэффициент сопротивления пластинки оказывается равным $\frac{\pi}{\pi + 4}\left[1 + \frac{2}{4 + \pi} M_0^2\right]$, что совпадает с точностью до высших степеней M_0^2 с коэффициентом сопротивления плоской пластинки, найденным приближенным методом С. А. Чаплыгиным в его известной работе „О газовых струях". М. И. Гуревич

11571. Введение в дисперсионные соотношения. Коринальдези (An introduction to dispersion relations. Corinaldesi E.), Nuovo cimento, 1959, **14**, Suppl. № 2, 369—384 (англ.)

Излагаются физические и математические основы, необходимые для построения дисперсионных соотношений, в частности свойства интегралов типа Коши, некоторых обобщенных функций и др. Статья представляет собой изложение доклада, прочитанного автором в Летней школе физиков (Италия, 1958). В. С. Владимиров

11572. Об одной новой форме дисперсионных соотношений. Халфин Л. А., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 2, 299—302

Предлагаются новые дисперсионные соотношения, основанные на использовании теоремы М. В. Келдыша — Л. И. Седова (Докл. АН СССР, 1937, **16**, № 1). Например: Пусть $f(E)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости, которая при $|E| \to \infty$ достаточно быстро стремится к нулю и ограничена в точках $E = \pm E_1$, где E_1 — некоторое положительное число. Пусть на отрезках $(-\infty, -E_1)$, $(E_1, +\infty)$ задана вещественная часть, а на отрезке $(-E_1, E_1)$ задана мнимая часть функции $f(E)$. Тогда при $|E| > E_1$ имеет место следующее дисперсионное соотношение:

$$\operatorname{Im} f(E) = -\frac{R(E, E_1)}{\pi}\left\{P\int_{E_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(E')}{R(E', E_1)} \frac{dE'}{E' - E} + \right. \quad (1)$$

$$\left. + P\int_{-\infty}^{E_1} \frac{\operatorname{Re} f(E')}{R(E', E_1)} \frac{dE'}{E' - E} + \int_{-E_1}^{E_1} \frac{\operatorname{Im} f(E')}{R(E', E_1)} \frac{dE'}{E' - E}\right\},$$

где P — символ главного значения интеграла, $R(E, E_1)$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{E^2 - E_1^2}$. Кроме того, из предположения о конечности функции $f(E)$ в точках $E = \pm E_1$ вытекает дополнительное условие

$$\int_{-E_1}^{E_1} \frac{\operatorname{Im} f(E)}{R(E, E_1)} dE = \int_{-\infty}^{-E_1} \frac{\operatorname{Re} f(E)}{R(E, E_1)} dE - \int_{E_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(E)}{R(E, E_1)} dE. \quad (2)$$

Рассмотрены также и более сложные дисперсионные соотношения. Приводится обсуждение полученных дисперсионных соотношений (1) и дополнительных условий (2).

Примечание референта. 1. Амплитуда рассеяния $f(E)$ аналитична не только в верхней полуплоскости, но и в нижней полуплоскости, за исключением разрезов вдоль вещественной оси. Формула (1) учитывает лишь аналитичность $f(E)$ в верхней полуплоскости. 2. Граничные значения амплитуды $f(E)$ на разных берегах разрезов есть, вообще говоря, обобщенные функции, которые могут иметь, в частности, локальные особенности полярного типа в точках $\pm E_1$ и поэтому условие (2) не всегда имеет место. В. С. Владимиров

11573. Поправка. Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 1, 8

В статью А. Л. Шагиняна „О скорости полиномиальных приближений на континуумах" (РЖМат, 1956, 6519) следует внести следующие исправления: Всюду следует полагать $d_0 < d$. На стр. 190, 1-я строка, напечатано: Пусть E — ограниченная замкнутая совокупность со связным дополнением...; следует читать: Пусть E — ограниченная замкнутая совокупность с односвязным дополнением. На стр. 190, 4-я строка снизу, напечатано: $|z_1| > d$; следует читать: $|z_1| < d$. На стр. 191, 9-я строка снизу, напечатано: Пусть $2(d + d_0)$ есть диаметр круга, покрывающего Ω...; следует читать: Пусть $2(d + d_0)$ есть диаметр минимального круга, покрывающего Ω...

11574 К. Лекции по теории аналитических функций многих комплексных переменных, прочитанные в 1956—1957 гг. в Национальном институте высшей математики в Риме. Северн (Lezioni sulle funzioni analitiche di piú variabili complesse tenute nel 1956—57 all'Istituto nazionale di alta matematica in Roma. Severi Francesco. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1957. XIV, 255 p., 3000 L.—Litogr.) Bibliogr. ital., 1957(1959), 91, № 680bis, 934 (итал.)

11575 Д. Плоская задача теории упругости для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей. Еганян В. В., Автореф. дисс. канд. техн. н., Ереванск. политехн. ин-т, Ереван, 1959

См. также: 11615, 11781 К, 11794, 12023.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

11576. Добавление к моей статье «Обобщенные обыкновенные дифференциальные уравнения и непрерывная зависимость от параметра. Курцвейль (Addition to my paper «Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter». Kurzweil Jaroslav), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, 564—573 (англ., рез. русск.)

Дается улучшенное изложение третьего параграфа опубликованной ранее статьи автора (РЖМат, 1958, 8823). В новых доказательствах теорем этого параграфа употребляются более слабые предположения, касающиеся монотонности функции $\psi(\eta)$. Следовательно, в этих более общих предположениях верны и основные результаты цитируемой статьи, содержащиеся в четвертом параграфе. Далее, для обобщенных линейных уравнений выводится формула вариации постоянных (что представляет корректное изложение параграфа 5,1 указанной статьи). Резюме автора

11577. Дополнение к трудам Камке. Перчинкова-Вычкова (Дополнение на Камке-овата збирка на диференцијални равенки. Перчинкова-В'чкова Даница), Годишен зб. Филоз. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1957, **10**, 37—42 (македон.; рез. франц.)

11578. О тороидальной оболочке. Дао (On toroidal shells. Tao L. N.), J. Math. and Phys., 1959, **38**, № 2, 130—134 (англ.)

11579. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Бандич (Sur une classe d'équations différentielles non-linéaires du deuxième ordre. Bandić Ivan), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1959, **14**, № 2, 143—152 (франц., рез. сербо-хорв.)

Автор напоминает определение относительной производной, данное в 1936 г. Петровичем (Petrovič M., Monographies de l'Académie Serbe des Sciences, vol. CXI, Beograd, 1936). Это определение таково: Относительной производной порядка n от функции $u(x)$ называется $\Delta_n(u) = \frac{1}{u}\frac{d^n u}{dx^n}$. Частной относительной производной от функции $u(x_1, x_2)$ называется $\Delta_1(u)_{x_\nu} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_\nu}$. Полная относительная производная обозначается $\nabla_1(u)_{x_1}$, $\nabla_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)$. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$u(x, y, y', y'') = v(x, y, y', y''), \qquad (1)$$

где u — однородная функция порядка m относительно y, y', y'', а v — однородная функция порядка n относительно y, y', y''. Рассматриваются различные частные случаи уравнения (1), которые при помощи подстановок $\Delta_1(y) = 1/z$, $\nabla_1(F)_x = \frac{n-m}{z}$, где $F = y^{n-m}$, приводятся к уравнениям первого порядка. Эти частные случаи аналогичны, но не совпадают с теми дифференциальными уравнениями, которые рассматриваются в учебниках в разделе понижения порядка. А. Н. Черкасов

11580. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве. Яблонский А. И., Весці АН БССР. Сер. фіз-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1959, № 3, 30—35

Подробное изложение результатов, анонсированных автором раньше (РЖМат, 1960, 6430). Основное содержание (W_α означает совокупность рациональных решений второго уравнения Пенлеве $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$): W_α имеет не более одного элемента и пусто при нецелом α; $w \in W_{3n}$ имеет при $z = 0$ нуль второго порядка ($n \neq 0$, при $n = 0$, очевидно, $w(z) \equiv 0$); $w \in W_{3n\pm1}$ имеет при $z = 0$ полюс с вычетом ∓ 1 и нулевым параметром полярного разложения. Указаны рекуррентные формулы для вычисления $w \in W_n$ при любом n. Вычислены $w \in W_n$ для $|n| \leqslant 5$, например,

$$W_{\pm3} = \left\{\frac{3z^2}{z^3+4} \mp \frac{6z^5 + 60z^2}{z^6 + 20z^3 - 80}\right\}.$$

Доказано, что $w \in W_n$ имеет $n(n-1)/2$ полюсов с вычетами 1 и $n(n+1)/2$ полюсов с вычетами -1.

Ю. С. Богданов

11581. Поправка (Berichtigung), Math. Nachr., 1959, **20**, № 3—6, 381 (нем.)

К РЖМат, 1960, 5227 и 8882.

11582. Обобщенное асимптотическое представление решения системы однородных линейных дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров. Такахаси (Eine erweiterte asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von homogenen linearen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen. Takahashi Ken-ichi), Tohoku Math. J., 1959, **11**, № 1, 63—97 (нем.)

Понятие асимптотического разложения функции $f(\xi, \lambda, \mu)$ при $\lambda, \mu \to \infty$ в двойной ряд

$$f(\xi, \lambda, \mu) \approx \sum_{i,k\geqslant 0} f_{ik}(\xi)\,\lambda^{-i}\mu^{-k} \qquad (1)$$

обобщается следующим образом. Пусть n, n'; n_0, n_0' — две пары взаимно простых натуральных чисел, причем $N_0 = nn_0' - n'n_0 > 0$. Заменим условия $i, k \geqslant 0$ условиями $r = ni + n'k \geqslant 0$, $r_0 = n_0 i + n_0' k \geqslant 0$ и обозначим через x_r наибольшее из целых чисел x таких, что $\frac{n'x+r}{n}$ — целое число и $x \leqslant \frac{rn_0}{N_0}$. Пусть $y_r = -\frac{n'x_r + r}{n}$, тогда $i = -y_r - sn'$; $k = -x_r + sn$, где s — целое число, а $f_{ik}(\xi)\,\lambda^{-i}\mu^{-k} = K_r f_{-y_r-sn', -x_r+sn}(\xi)\,\nu^s$, причем $K_r = K_r(n, n'; n_0, n_0'; \lambda, \mu) = \lambda^{y_r}\mu^{x_r}$, $\nu = \lambda^{n'}\mu^{-n}$. Пусть $n_1 = pn_0 + m'$, $n_1' = pn_0' - m$, $m_0 = mn + m'n'$, где m,

m', p — целые числа, $nn_1' - n'n_1 = N = pN_0 - m_0$. Положим $K_{r,1} = K_r(n, n'; n_1, n_1'; \lambda, \mu)$. Доказывается, что при $mn_0 + m'n_0' \leqslant 0$ $\lambda^{m}\mu^{m'}$ $K_{N+m_0+r} = K_{N+r,1}\nu^k$, а при $mn_0 + m'n_0' > 0$ $\lambda^{m}\mu^{m'}$ $K_{N+m_0+r} = K_{N+r}\nu^k$, где k — целое неотрицательное число. Пусть переменные ξ, λ и μ пробегают область U, определяемую условиями: $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$, $k|\lambda|^{\sigma} \leqslant |\mu| \leqslant k|\lambda|^{\sigma'}$, $R < |\lambda|$, $|\mu| < \infty$, $|\arg \lambda, \mu| < \theta_0$, где $\sigma = \frac{n'}{n} < \sigma' < \sigma_0 = \frac{n_0'}{n_0}$, α, β, k, R, θ_0 — постоянные. Положим

$$\sum_{s=0}^{\infty} f_{-y_r - sn', -x_r + sn}(\xi)\,\nu^s = f_r(\xi, \nu),$$

$$\delta_1 = \frac{n_0'}{N_0}, \quad \delta_2 = \frac{n_0}{N_0}, \quad \delta = |\lambda|^{-\delta_1}|\mu|^{-\delta_2}.$$

Если для любого натурального числа N в области U имеет место неравенство

$$|f(\xi, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(\xi, \nu)| < C_N \delta^N \quad (C_N \text{ — постоянное}),$$

то говорят, что имеет место асимптотическое равенство

$$f(\xi, \lambda, \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(\xi, \nu). \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь систему q однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{d\xi} = \theta \sum_{k=1}^{q} a_{jk}(\xi, \lambda, \mu)\, y_k \quad (j = 1, 2, \ldots, q), \qquad (3)$$

где $\theta = \lambda^m \lambda^{m'}$, m и m' — целые числа, $a_{jk}(\xi, \lambda, \mu)$ — регулярные функции от λ и μ, имеющие относительно ξ производные достаточно высокого порядка. В матричной форме система (3) записывается в виде

$$\frac{dY}{d\xi} = \theta A(\xi, \lambda, \mu) Y. \qquad (4)$$

Предполагается, что в области U имеет место асимптотическое равенство: $A(\xi, \lambda, \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_r A_r(\xi, \nu)$, причем матрицы $A_r(\xi, \nu)$ регулярны по ν и имеют относительно ξ производные достаточно высокого порядка, а $A_0(\xi, \nu)$ — диагональная матрица с отличными друг от друга диагональными элементами.

Система (4) приводится к виду

$$\frac{dZ}{d\xi} = \theta [F(\xi, \lambda, \mu) + B(\xi, \lambda, \mu)] Z, \qquad (5)$$

где $F(\xi, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r B_r(\xi, \nu)$ — диагональная матрица, а $B(\xi, \lambda, \mu) \approx \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r B_r(\xi, \nu)$, $N + m_0 + 1 = pN_0$, где p — натуральное число.

Для уравнения (5) получаем формальное решение

$$Z = \overset{*}{P}(\xi, \lambda, \mu)\, \overline{\overline{Z}},$$

где $\overline{\overline{Z}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{Z}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\overline{Z}}_q \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{Z}}_j = e^{\theta \int f_j(\zeta, \lambda, \mu,)\, d\zeta}$ (f_j — элементы матрицы F),

$$\overset{*}{P}(\xi, \lambda, \mu) \approx E + \sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1} \overset{*}{P}_r(\xi, \nu).$$

Допустим теперь, что для значений $j = 1, 2, \ldots, q$ при некотором k в промежутке (α, β) имеются такие точки ξ_j, что при $\alpha \leqslant \xi \leqslant \xi_j$ $\operatorname{Re}\theta [f_j(\xi, \lambda, \mu) - f_k(\xi, \lambda, \mu)] \geqslant 0$, а при $\xi_j \leqslant \xi \leqslant \beta$ $\operatorname{Re}\theta [f_j(\xi, \lambda, \mu) - f_k(\xi, \lambda, \mu)] \leqslant 0$. Рассматривается решение $z_j(\xi)$ системы (5), удовлетворяющее начальным условиям $z_j(\xi_j) = \varphi_j(\lambda, \mu)$, где $\varphi_j(\lambda, \mu) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} p_{rj}(\xi_j, \nu)$, причем функции $p_{rj}(\xi, \nu)$, регулярны по ν и имеют по ξ производные достаточно высокого порядка во всем промежутке $\alpha < \xi < \beta$. Тогда в области U решение $z_j(\xi)$ может быть разложено в асимптотический ряд вида

$$z_j(\xi) \approx \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} p_{rj}(\xi, \nu).$$

Ю. Л. Рабинович

11583. Формальные решения и присоединенное уравнение для одного класса дифференциальных уравнений четвертого порядка гидродинамического типа. Лангер (Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type. Langer Rudolph E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 3, 371—410 (англ.)

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4w}{dz^4} + \lambda^2 \left\{ P(z, \lambda) \frac{d^2w}{dz^2} + Q(z, \lambda) \frac{dw}{dz} + R(z, \lambda) w \right\} = 0 \qquad (1)$$

и исследуются его формальные решения в виде разложений по обратным степеням параметра λ. Предполагается, что в некоторой замкнутой области плоскости комплексного переменного z, содержащей точку $z = 0$, коэффициенты уравнения можно представить рядами $P(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \lambda^{-n}$, $Q(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) \lambda^{-n}$, $R(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z) \lambda^{-n}$, сходящимися при достаточно больших значениях $|\lambda|$. Функции $P_n(z)$, $Q_n(z)$ и $R_n(z)$ являются аналитическими в рассматриваемой области, причем $P_0(0) = 0$, $P_0'(0) = 1$, $P_0(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Рассматривая, наряду с уравнением (1) вырожденное уравнение

$$P_0(z) \frac{d^2w}{dz^2} + Q_0(z) \frac{dw}{dz} + R_0(z) w = 0, \qquad (2)$$

автор доказывает, что уравнение (1) имеет формальное решение вида:

$$w_*(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) \lambda^{-n}, \qquad (3)$$

где $U_n(z)$ — аналитические функции. Это решение, за исключением одного частного случая, определено с точностью до множителя. Для построения трех других решений составляется выражение

$$w(z, \lambda) = A(z, \lambda) v(x, \nu) + \frac{1}{\lambda} B(z, \lambda) \dot{v}(x, \nu) + \frac{1}{\lambda^2} C(z, \lambda) \ddot{v}(x, \nu), \qquad (4)$$

где

$$x = \left(\frac{3}{2} \int_0^z \sqrt{P_0(\xi)}\, d\xi \right)^{2/3},$$

а $v(x, \nu)$ — решение дифференциального уравнения

$$\ddot{v} + \lambda^2 x v - \lambda^2 \nu v = 0. \qquad (5)$$

Величина $\nu(\lambda)$ и коэффициенты $A(z, \lambda)$, $B(z, \lambda)$ и $C(z, \lambda)$ под ираются в виде формальных рядов по обратным степеням параметра λ таким образом, чтобы выражение (4) удовлетворяло уравнению (1). Тогда с помощью трех известных формальных решений уравнения (5) (РЖМат, 1957, 2 75) можно написать три формальных решения уравнения (1). Доказывается, что эти решения линейно не зависимы от решения (3). Исключение составляет один частный случай, который исследуется отдельно. Обрывая формальные решения на некоторой конечной степени параметра $\frac{1}{\lambda}$, автор строит присоединенное уравнение, т. е. уравнение, для которого данные функции образуют фундаментальную систему решений.

Д. П. Костомаров

11584. Проблема Римана-Гильберта в теории линейных дифференциальных уравнений. Рёрль (Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Röhrl Helmut), Math. Ann., 1957, 133, № 1, 1—25 (нем.)

11585. Об условиях зависимости решений системы линейных дифференциальных уравнений от выбранных корней характеристического уравнения. Табаровский А. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 159—163

Рассматривается система

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (1)$$

Используя изоморфизм между множеством начальных данных и множеством решений линейной системы дифференциальных уравнений устанавливается теорема: Для того чтобы решение X системы (1) зависело только от одного корня λ_l $(i = 1, \ldots p)$ характеристического уравнения, необходимо и достаточно, чтобы начальная точка X_0 этого решения удовлетворяло условию $(A - \lambda_l E)^{e_l} X_0 = 0$, где e_l — наибольший из элементарных делителей, принадлежащих корню λ_l.

В. В. Немыцкий

11586. Применение операторного исчисления Микусинского к решению обыкновенных дифференциально-разностных уравнений. Феньеш (Anwendung der Operatorenrechnung von Mikusinski zur Lösung gewöhnlicher Differential'differenzengleichungen. Fényes T.), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1959, 4, № 2, 191—196 (нем.; рез. венг., русск.)

С помощью операторного исчисления Микусинского находится решение основной начальной задачи для линейного уравнения

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x^{(\mu)}(t + \nu a) = g(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

где $g(t)$ — непрерывная функция, $a_{\mu\nu}$ и a — постоянные, $a > 0$, $a_{n\nu} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots (n-1)$. Последнее условие означает, что (1) является уравнением с запаздывающим аргументом. При $n = 1$ кратко рассматриваются и уравнения нейтрального типа. В качестве примера рассматривается решение уравнения

$$x''(t + \pi) + 2x'(t) + x(t) = e^{t}$$

с начальными условиями: $x(t) = \sin t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Л. Э. Эльсгольц

11587. Линейные дифференциальные и разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Территин (Linear differential or difference equations with constant coefficients. Turrittin H. L.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 10, 869—875 (англ.)

11588. Одна предельная краевая задача для уравнения $\ddot{x} + \dot{x}f(x, \dot{x}) + \varphi(x) = 0$. Клоков Ю. А., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1959, № 6, 72—80

Изучается следующая предельная краевая задача:

$$\ddot{x} + \dot{x}f(x, \dot{x}) + \varphi(x) = 0, \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\infty) = a, \qquad (1^1)$$

в которой функции $f(x, y)$ и $\varphi(x)$ определены во всей плоскости x, y и непрерывны вместе со своими производными первых порядков. Доказываются следующие теоремы: 1) Необходимым условием существования решения задачи (1), (1¹) является равенство $\varphi(a) = 0$. 2) Пусть $\varphi(0) = 0$, $x\varphi(x) < 0$ при $x \neq 0$ и $|f(x, y)| < a(x)|y| + b(x)$ при любых x, y, где $a(x)$ и $b(x)$ — положительные непрерывные функции. В этом случае для любого $x_0 = x(0)$ существует одно и только одно $x_0' = x'(0)$, для которого решение уравнения (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$. 3) Если $k = \frac{f(0, 0)}{2} + \sqrt{\frac{f^2(0, 0)}{4} - \varphi'(0)} > 0$, то $x(t) = x_0 e^{-kt[1+\varepsilon(t)]}$, где $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. 4) Если $f(0, 0) < 0$ и $\varphi'(x) \to 0$ при $x \to 0$, то $x = -\frac{\varphi(x)}{f(0, 0)}[1 + \varepsilon(t)]$.

Б. М. Левитан

11589. Об одной теореме Бендиксона. Лефшец (On a theorem of Bendixson. Lefschetz Solomon), Bol. Soc. mat. mexicana, 1956, 1, № 1, 13—27 (англ.)

Рассматривается классический вопрос об исследовании асимптотического поведения решения системы

$$dx/dt = X, \quad dy/dt = Y, \quad X(0, 0) = Y(0, 0) = 0,$$

где X, Y — действительные функции, разлагающиеся в окрестности особой точки в сходящиеся степенные ряды. Автор предлагает для перечисления возможных асимптотик применить многоугольник Пиаза. Следует отметить, что в работе Лефшеца не упоминается известный метод Фроммера исследования асимптотик. Этот метод, как показал И. С. Куклес (РЖМат, 1958, 6681), приводит к более далеко идущим результатам.

В. В. Немыцкий

11590. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений системы двух дифференциальных уравнений. Чжан Бин-гэнь (в подл. Чжан Пинь). Шуюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9, № 4, 442—445 (кит.; рез. русск.)

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = \varphi_1(y) + f_1(x), \\ dy/dt = \varphi_2(y) + f_2(x) \end{cases}$$

и устанавливаются без доказательств критерии устойчивости в целом положения равновесия. Например, для асимптотической устойчивости достаточно выполнение условий

1) $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy > 0$, $y \neq 0$, и $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy \to \infty$, если $|y| \to \infty$;

2) $\int_0^x f_2(x)\,dx < 0$, $x \neq 0$, и $\int_0^x f_2(x)\,dx \to -\infty$;

3) $\varphi_1(y)\varphi_2(y) - f_1(x)f_2(x) < 0$, если $x^2 + y^2 \neq 0$.

Устанавливаются и другие аналогичные критерии.

В. В. Немыцкий

11591. Условия существования и нахождение параметров периодических движений автономных систем. Ку-

ликов Н. К., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 4, 56—62

Метод автора (РЖМат, 1960, 2877) применяется для приближенного отыскания периодических решений автономных систем любого порядка. Выводятся равенства, выполнение которых необходимо и достаточно для существования периодических решений. Однако в эти равенства неявно входит исследуемое решение (кроме случая линейных уравнений с постоянными коэффициентами), так что этими равенствами можно пользоваться лишь для получения $(k+1)$-ого приближения к решению, если известно k-е приближение. Рассмотрены примеры: уравнение $\ddot{x}+F(x)=0$ и уравнение Ван-дер-Поля $\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0$. Для последнего вычисляется в первом приближении значение частоты колебаний для периодического решения. При малых ε оно оказывается равным $p=1-\varepsilon^2/2+O(\varepsilon^4)$, в то время как известные методы (см., например, РЖМат, 1959, 3786 К, стр. 71 оригинала) дают в первом приближении $p=1$, а во втором $p=1-\varepsilon^2/16+O(\varepsilon^3)$. Следовательно, первое приближение, полученное автором, менее точно, чем первое приближение, получаемое известными методами (см. также примечание референта в РЖМат, 1960, 6448). А. Ф. Филиппов

11592. Об одном способе решения укороченных уравнений для нелинейных систем без затухания. Четкин М. В., Радиотехн. и электроника, 1960, **5**, № 3, 520—521

11593. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Территтин Х. Л. (Turrittin H. L.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, **1**, № 2, 29—59

Перевод из Ann. Math. Studies, 1952, № 29, 81—116.

11594. Критерий ограниченности решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Мунтяну (Un criteriu me mărginire a soluției unui sistem neliniar de ecuații diferențiale. Munteanu I.), Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, **9**, № 1-4, 237—243 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=A(\xi)+\Phi_A(t,x)\\ \frac{d\eta}{dt}&=B(\tau_i)+\Phi_B(t,x)\end{aligned}\right\},\qquad(1)$$

$$\xi=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_p\end{Vmatrix},\quad \tau_i=\begin{Vmatrix}x_{p+1}\\x_{p+2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{Vmatrix},\quad x=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{Vmatrix}$$

$$A=\begin{Vmatrix}A_1\\A_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\A_p\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}B_1\\B_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\B_{n-p}\end{Vmatrix},\quad \Phi_A=\begin{Vmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\varphi_p\end{Vmatrix},\quad \Phi_B=\begin{Vmatrix}\varphi_{p+1}\\\varphi_{p+2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\varphi_n\end{Vmatrix}$$

Системы

$$\frac{d\xi}{dt}=A(\xi)\qquad(2)$$

$$\frac{d\eta}{dt}=B(\tau_i)\qquad(3)$$

называются порождающими. Доказывается следующая теорема.

Теорема. Если для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) выполнены условия:

1) для порождающей системы (2) существует положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция $U=U(x_1,\ldots,x_p)$ и положительные постоянные $h, H, \rho^{(0)}$ такие, что $(\operatorname{grad}U, A)\geqslant h\rho_p$ и $|\operatorname{grad}U|\leqslant H\rho_p^*$ при $\rho_p>\rho^{(0)}$; для порождающей системы (3) существует положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция $V=V(x_{p+1},\ldots,x_n)$ и положительные постоянные $h', H', \rho^{(0)'}$ такие, что $(\operatorname{grad}V, B)\leqslant -h'\rho_p^*$ и $|\operatorname{grad}V|\leqslant H'\rho_p^*$ при $\rho_p^*>\rho^{(0)'}$;

2) существуют положительные числа $\varepsilon, \varepsilon', H_1', \bar{\rho}, \bar{\rho}'$ такие, что $|\Phi_A(t,x)|<H_1\rho_p^{-\varepsilon}$, $|\Phi_B(t,x)|<H_1'\rho_p^{*-\varepsilon'}$ при $\rho_p>\bar{\rho}$, $\rho_p^*>\bar{\rho}'$ и $-\infty<t<\infty$, — то система (1) имеет по крайней мере одно решение, ограниченное на всей вещественной оси. Резюме автора

11595. Исследование устойчивости неподвижной точки преобразования в критических случаях. Неймарк Ю. И., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, **2**, № 3, 507—508

Указывается, что исследование в критическом случае для n-мерного пространства в ряде случаев может быть сведено к исследованию в критическом случае преобразования плоскости или прямой. В. В. Немыцкий

11596. Функция Ляпунова для систем уравнений с постоянными коэффициентами. Цай Суй-линь (Tsai Sui-lin), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 4, 455—467 (кит.; рез. англ.)

Приводится функция Ляпунова для систем уравнений с постоянными коэффициентами, выраженная через коэффициенты характеристического полинома.

В. В. Немыцкий

11597. Об асимптотическом поведении решений линейных разностных и дифференциальных уравнений. Коваль П. И., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 5, 949—952

11598. Основные теоремы обыкновенных дифференциальных уравнений в векторных топологических пространствах. Фукухара (Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires dans l'espace vectoriel topologique. Hukuhara Masuo), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1959, Sec. I, **8**, № 1, 111—138 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\qquad(1)$$

где t — действительное переменное, а x — точка полного, локально выпуклого топологического действительного векторного пространства R. В пространстве R вводятся как обычно полунорма $|x_V|=\inf(\lambda>0, x\in\lambda V)$.

Рассматриваются функционалы $S(x)$. $S(x)$ называется выпуклым и положительно однородным, если

$$S(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda S(x)+(1-\lambda)S(y)\quad 0<\lambda<1$$
$$S(\lambda x)=\lambda S(x)\quad 0<\lambda<\infty.$$

Вводится понятие фильтра из элементов R и понятие фильтра операторов $f_\lambda(x)$. Фильтр на множество $E\in R$ операторов $f_\lambda(x)$, где λ — числовой параметр, $x\subset R$ и $f_\lambda(x)\subset R'$, где R' — тоже локально выпуклое топологическое пространство, есть такое множество функций, что каждому $x\in E$ можно поставить в соответствие $\lambda_x\in\Lambda$ таким образом, что $f_\lambda(x)$ определена для всех $\lambda\geqslant\lambda_x$.

Все эти понятия вводятся без каких-либо ссылок на предшествующую литературу.

2-я часть работы посвящена собственно дифференциальным уравнениям. Непрерывная функция $\varphi(t)$, имеющая производную, называется решением уравнения (1), если $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ (в работе в этом месте опечатка). Устанавливается, что предел равномерно сходящегося фильтра решений будет также решением. Устанавливается также теорема о продолжении решений. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \qquad (A)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение в действительной области. Теорема. Пусть имеет место неравенство $S(f(t,x)) < F(t,S(x))$ для $(t,x)\in D_f$, $(t,S(x))\in D_F$, тогда решение уравнения (A) есть мажоранта справа для решения уравнений (1), т. е.

$$D^+x(t) = F(t,x(t)) > S(f(t,x)).$$

Аналогичное утверждение имеет место, если вместо знака неравенства имеет место неравенство или равенство.

Пусть Γ — семейство выпуклых и положительно однородных функций, мы скажем, что эта совокупность функции фундаментальная, если каждой окрестности $V\subset R$ можно поставить в соответствие конечное число $S_j(x)\in\Gamma$ таких, что пересечение множеств $\{S_j(x) < 1\}$ содержится в V.

Теорема (единственности). Пусть выполнены следующие условия: а) каждому $S\subset\Gamma$ соответствует действительная функция $F_S(t,x)$, непрерывная на множестве $t\subset I, 0 \leqslant x \leqslant \delta_S$, где $I = [\alpha,\alpha']$, $\delta_S > 0$ — некоторое число, которое может зависеть от S; б) $x \equiv 0$ — единственное решение уравнения $\frac{dx}{dt} = F_S(t,x)$, обращающееся в нуль при $t = \alpha$; в) $S(f(t,x)) \leqslant F_S(t,S(x))$ для $t\subset I$, $(t,x)\in D_f$, $0 \leqslant S(x) \leqslant \delta_S$. Тогда уравнение (1) имеет только одно решение, обращающееся в нуль при $t = \alpha$. Из этой теоремы как частный случай можно получить теоремы единственности, аналогичные известным критериям для обыкновенных дифференциальных уравнений; критерию Липшица

$$| f(t,x) - f(t,y) |_V \leqslant L_V | x - y |_V,$$

где L_V — константа, зависящая от V, или критерию Отсюда

$$| f(t,x) - f(t,y) |_V \leqslant F_V(| x - y |_V),$$

где F_V — непрерывная функция, положительная на $(0,\delta_V]$, и такая, что

$$\int_0^{\delta_V} \frac{dx}{F_V(x)} = \infty.$$

Устанавливается еще одна общая теорема единственности, из которой как частный случай вытекают критерий Нагумо (Nagumo)

$$| f(t,x) - f(t,y) |_V \leqslant \frac{| x - y |_V}{t - \alpha}$$

и критерий Язуи (Yasui), несколько более общий, чем Нагумо. В. В. Немыцкий

11599. Обращение второй теоремы Ляпунова о неустойчивости в линейных нормированных пространствах. Персидский К. П., КазССР Ғылым Ақад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 10, 31—35 (рез. каз.)

В банаховом пространстве рассматривается уравнение $dx/dt = \varphi(t,x)$. В области $t \geqslant 0$, $\| x \| < R$ функция $\varphi(t,x)$ непрерывна по t, $\varphi(t,0) = 0$ и существует такая непрерывная функция $\alpha(t)$, что

$$\| \varphi(t,x_1) - \varphi(t,x_2) \| < \alpha(t) \| x_1 - x_2 \|.$$

В предположении неустойчивости тривиального решения построена функция $v(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости. А именно, в некоторой области $t \geqslant 0$, $\| x \| < \rho$ функция $v(t,x)$ непрерывна и $0 \leqslant v \leqslant 1$; производная v' вдоль интегральной кривой существует и $v'(t,x) = v(t,x)$; для любых $t_0 \geqslant 0$, $r > 0$ существует такая точка x_0 ($\| x_0 \| \leqslant r$), что $v(t_0,x_0) > 0$. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

11600. О колебаниях решений уравнений в конечных разностях. Скалкина М. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 138—144

В § 1 изучаются колебания решений конечноразностных уравнений

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \qquad (1)$$

где $t_n = t_0 + nh$, $y_n = y(t_n)$, $p_n = p(t_n)$ и $q_n = q_n(t_n) \neq 0$.

В § 2 рассматривается уравнение

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (2)$$

и соответствующее разностное уравнение

$$\Delta^2 y_n^h + hp_n \Delta y_n^h + h^2 q_n y_n^h = 0 \qquad (3)$$

с шагом h, $t_n = t_0 + nh$, $\varphi_n = \varphi(t_n)$. Функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале (a,b). Доказываются следующие теоремы:

I. Если на интервале (a,b) решение уравнения (2) имеет два нуля, то соответствующее ему решение уравнения (3) с достаточно малым шагом имеет на этом интервале две перемены знака.

II. Если на бесконечном интервале решение $y(t)$ уравнения (2) является колеблющимся и удовлетворяет условиям: 1) расстояние между его нулями ограничено снизу; 2) $| y(t) | < m$, $| y'(t) | < M$ при $0 < t < \infty$, то соответствующее ему решение y_n^h уравнения (3) с достаточно малым шагом также является колеблющимся. Л. Э. Эльсгольц

11601. Топология линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Баумол (Topology of second order linear difference equations with constant coefficients. Baumol William J.), Econometrica, 1958, 26, № 2, 258—285 (англ.)

Рассматривается линейное разностное уравнение второго порядка:

$$Y_{t+2} = aY_{t+1} + bY_t + C, \qquad (1)$$

которое определяет, как известно, линейное отображение плоскости (Y_{t+1},Y_t) в себя. Автор естественным образом называет плоскость Y_{t+1}, Y_t фазовой плоскостью разностного уравнения (1) и на этой плоскости рассматривает инвариантные кривые соответствующего уравнению (1) линейного отображения плоскости в себя. Эти кривые он называет „фазовыми диаграммами" разностного уравнения (1). Предполагая, что $c = 0$, автор сначала подробно рассматривает случай однородного разностного уравнения. Им рассматриваются различные случаи в зависимости от корней x_1 и x_2 соответствующего (1) характеристического уравнения $X^2 - aX - b = 0$ именно: 1) корни X_1 и X_2 комплексные сопряженные и при этом а) равные единице по модулю, б) не равные единице по модулю; в случае 1а) фазовые диаграммы являются эллипсами, в случае 1б) — спиралями. 2) Корни X_1 и X_2 действительны и либо оба по абсолютной величине меньше единицы, либо оба по абсолютной величине больше единицы; в этом случае фазовые диаграммы являются кривыми типа парабол. 3) Один из корней (X_1) по абсолютной величине меньше единицы, а другой (X_2) по абсолютной величине больше единицы; в

этом случае фазовые диаграммы являются кривыми типа гипербол. Фазовые диаграммы находятся из обычного решения разностного уравнения (1), выраженного через t — исключением из него параметра t (полностью аналогично тому, как для линейного дифференциального уравнения второго порядка $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ уравнения траекторий на фазовой плоскости x, $\dot{x}$ — в координатах x, $\dot{x}$ — находятся из решения этого уравнения исключением t). Автор разъясняет, как, пользуясь фазовыми диаграммами, строить „траектории" уравнения (1) (т. е. точечные группы отображения, соответствующего уравнению (1)). Далее автор дает ряд замечаний, касающихся случая, когда свободный член c в уравнении (1) — не равная нулю константа, а также в случае, когда c есть заданная функция t. В последнем параграфе статьи линейное разностное уравнение вида (1) применяется к данной в работе Хикса (Hicks I. R., The trade cycle, Oxford University press, New-Jork, 1946) модели „промышленного цикла" (В работе Хикса „промышленный цикл" описывается нелинейным уравнением, в реферируемой работе — линейным разностным уравнением). Е. А. Леонтович-Андронова

11602. Преобразование Фурье в теории разностных уравнений и его применения. Бабушка (The Fourier transform in the theory of difference equations and its applications. Babuška Ivo), Arch. mech. stosowanej, 1959, **11**, № 4, 349—381 (англ.; рез. польск., русск.)

Дана числовая последовательность $a(n)$ $(-\infty < n < \infty)$, удовлетворяющая неравенствам $\sum_{-\infty}^{\infty} |a(n)| \times (1 + |n|^p) < \infty$ при любом натуральном p. В пространстве последовательностей не выше, чем степенного роста, рассматривается уравнение

$$g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(l-n) f(l). \qquad (1)$$

Решение строится методом „преобразования Фурье". Вводятся периодические обобщенные функции $G(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n) e^{inx}$, $A(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(n) e^{inx}$, $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{inx}$, и уравнение (1) записывается в эквивалентной форме $G(x) = A(x) F(x)$. Достаточным условием его разрешимости служит неравенство $A(x) \neq 0$. Вместо одного уравнения (1) можно рассматривать систему таких уравнений с данной матрицей $a(n) = \| a_{jk}(n) \|$; тогда условием разрешимости будет неравенство $\det \| A_{jk}(x) \| \neq 0$. Результат применяется к некоторым механическим задачам. Г. Е. Шилов

11603. Некоторые качественные вопросы в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Халанай А., Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 127—144

Доказываются основные теоремы второго метода Ляпунова в применении к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом, причем функции Ляпунова заменяются обладающими аналогичными свойствами функционалами. Эти результаты аналогичны результатам Н. Н. Красовского (РЖМат, 1957, 2316). Доказываются также некоторые теоремы о периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

1. Если при $\mu = 0$ тривиальное решение системы

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) x(t-\tau) + \mu f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad (1)$$

где $A(t+\omega) = A(t)$, $B(t+\omega) = B(t)$, $f(t+\omega, x, y) = f(t, x, y)$, постоянная $\tau > 0$, $x(t)$ — n-вектор, равномерно асимптотически устойчиво, то при достаточно малом μ система (1) при $\tau > \omega$ имеет периодическое решение периода ω, а при $\tau < \omega$ имеет периодическое решение периода $k\omega$, где k — целое число такое, что $k\omega > \tau$ (аналогичная теорема доказана Н. Н. Красовским (РЖМат, 1958, 1934)). Этот результат обобщается на некоторые системы вида $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \mu)$.

2. Если уравнение

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad (2)$$

где $f(t, x, y)$ — периодическая функция t периода ω, имеет ограниченное асимптотически устойчивое в метрике c_0 решение, то оно имеет периодическое решение периода $\nu\omega$, где ν — целое число.

3. Если уравнение (2) имеет ограниченное решение $x_0(t)$, удовлетворяющее условию $\lim_{t\to\infty} [x_0(t+\omega) - x_0(t)] = 0$, то оно имеет периодическое решение периода ω.

4. Всякое ограниченное и равномерно устойчивое решение уравнения (2) с периодической по t функцией $f(t, x, y)$ асимптотически почти периодическое.

Л. Э. Эльсгольц

11604. Периодические решения линейных систем с запаздывающим аргументом. Халанай (Solutions périodiques des systèmes linéaires à argument retardé. Halanay Aristide), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 25, 2708—2709 (франц.)

Рассматривается линейное неоднородное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) x(t-\tau) + f(t), \qquad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ — периодические функции периода $\omega > \tau$, утверждается, что при любом выборе функции $f(t)$ уравнение (1) имеет периодическое решение периода ω, если соответствующее однородное уравнение не имеет периодических решений периода ω, отличных от тривиального. Утверждается также, что методом последовательных приближений можно доказать существование периодического решения системы $\dot{x}(t) = A(t) \times x(t) + B(t) x(t-\tau) + f(t, x(t), x(t-\tau))$, где $A(t)$, $B(t)$ и $f(t, x, y)$ — периодические функции t периода $\omega > \tau$, если $f(t, x, y)$ по переменным x и y удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица и соответствующее линейное уравнение не имеет периодических решений периода ω, отличных от тривиального. Л. Э. Эльсгольц

11605 К. Интегральные кривые, определяемые дифференциальными уравнениями. (Вэйфэнь фанчэн сониды цзифэнь цюйсянь). Часть 1. Цинь Юаньсюнь. Пекин, Кэсюэ чубаньшэ, 1959, стр. IV, 282, илл., 1,15 юаня (кит.)

11606 К. Интегральные кривые, определяемые дифференциальными уравнениями. (Вэйфэнь фанчэн сониды цзифэнь цюйсянь). Часть 2. Цинь Юаньсюнь. Пекин, Кэсюэ чубаньшэ, 1959, стр. IV, 283—650, илл., 1,45 юаня (кит.)

Часть 1 см. реф. 11605 К.

11607 К. Дифференциальные уравнения. Сб. статей. Уч. зап. Белорусск. ун-та, вып. 2(51). Минск, 1959, 72 стр., 3 р.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *Л. Д. Кудрявцев, Н. И. Мозжерова*

11608. Общие решения дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Агранович М. С., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 1, 9—12

Для уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{l} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x-h_k) = f(x) \qquad (1)$$

указывается формула общего решения в пространстве обобщенных функций — функционалов над основным пространством K_A бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне ограниченной области A в n-мерном пространстве. Решение записывается с помощью интегрирования по некоторой лестнице Хёрмандера (см., например, Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, 1958, стр. 130), несколько видоизмененной для случая $h_k \neq 0$. Следствия для $f \equiv 0$: 1) каждое решение есть конечная сумма производных от обычных сколь угодно гладких решений того же уравнения; 2) если A есть многогранник, каждое решение есть конечная сумма функционалов над пространством K всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, каждый из которых есть решение уравнения (1) в полупространстве, содержащем A; если A выпуклая область, конечная сумма переходит в интеграл. Доказательства не приведены. Г. Е. Шилов

11609. Существование решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в некоторых классах функций. **Агранович М. С.**, Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1959, № 3, 3—13

Пусть $P = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $W_{M,a}$ — пространство Б. Л. Гуревича (РЖМат, 1958, 5727) бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми производными при $|x| \to \infty$ с оценкой $|D^q\varphi| \leqslant Ce^{-M[(a-\varepsilon)|x|]}$. Доказывается, что $PW'_{M,a} = W_{M,a}$; иначе говоря, уравнение $Pu = f$ при любой $f \in W'_{M,a}$ имеет решение $u \in W'_{M,a}$. Более того, решение u будет разве лишь на два подрядка гладкости ниже, чем f; в частности, u вместе с f бесконечно дифференцируемо. Функция $M(x)$, участвующая в определении пространства $W_{M,a}$, предполагается удовлетворяющей неравенству $M(\varepsilon t) \geqslant CM'(t)$ при любом $\varepsilon > 0$, любом $C > 0$ и достаточно большом $t > t_0$. Г. Е. Шилов

11610. Несколько теорем об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами. **Агранович М. С.**, Докл. АН СССР, 1959, 128, № 3, 439—442

1. Пусть P — дифференциальный оператор по n переменным порядка m с постоянными коэффициентами, фундаментальное решение которого есть обобщенная функция порядка N (всегда $N \leqslant n+2$). Пусть $u(x)$ есть решение уравнения $Pu = f$ в ограниченной области Ω, если при этом $f \in C^{p+N}$ (т. е. имеет непрерывные производные до порядка $p+N$) в Ω, и $u \in C^{m+p+N}$ в граничной полоске Γ, то $u \in C^p$ в Ω. В частности, если u бесконечно дифференцируема в Γ, а f бесконечно дифференцируема в Ω, то u бесконечно дифференцируема в Ω. Даются оценки функции u в Ω через f и через значения u в Γ. Указываются обобщения на неограниченные области.

2. Всякое решение уравнения $Pu = f$ в функционалах над пространствами $S, S_{\alpha,A}, W_{M,A}$ есть сумма производных от обычных решений этого же уравнения. Для пространства K аналогичная теорема была доказана автором ранее (реф. 11608).

3. Указываются формулы общего решения уравнения $Pu = f$ в пространстве бесконечно дифференцируемых функций с помощью систем лестниц Хёрмандера. Аналогичные формулы можно построить для получения общего решения в пространствах обобщенных функций конечного порядка и пространства обычных функций заданной гладкости; в других пространствах (целые аналитические функции — все или до заданного порядка роста) автором получены формулы общего решения ранее другими способами (реф. 11609). Г. Е. Шилов

11611. О построении решений задачи Коши для бесконечных систем линейных уравнений в частных производных. **Жаутыков О. А.**, КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1959, вып. 8(12), 3—17 (рез. каз.)

Рассматриваются задачи Коши для бесконечных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^i u_k}{\partial t^i} = \sum_{s=0}^{\infty} a_{ks} \frac{\partial^j u_s}{\partial x^j} \quad (i = 1,2;\ j = 0,1,2;\ k = 0,1,2,\ldots), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x)}{\partial t^2} = \int_0^1 K(x,\tau) \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial \tau}\, d\tau \qquad (2)$$

в области двух независимых переменных — t, x, причем при $i = 1$ разбирается только случай $j = 1$. Предполагается: 1) как сами решения так и начальные данные этих задач разлагаются в ряд Фурье

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}(t) \cos\frac{n\pi}{l} x \qquad (3)$$

в некотором интервале $(0, l)$; 2) двойной ряд $\Sigma_{k,s} |a_{ks}|$ сходится. Отыскание решений рассматриваемых задач в виде (3) приводит к задачам Коши для бесконечных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которые решаются автором операционным методом; этот метод приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. В связи с этим, методом сжатых отображений доказываются теорема об однозначной разрешимости соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

М. Л. Расулов

11612. Нулевые решения уравнения в частных производных. **Хёрмандер** (Null solutions of partial differential equations. **Hörmander Lars**), Arch. Ration. Mech. and Analysis., 1960, **4**, № 3, 255—261 (англ.)

Пусть $P(D) = P(-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$ — оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. Бесконечно дифференцируемое решение $u(x)$ уравнения

$$P(D)u = 0, \qquad (1$$

которое равно 0 вне полупространства $H = \{x : \langle x, N\rangle \geqslant 0\}$ называется нулевым решением (null solution) относительно H. Ранее автором доказано (РЖМат 1957, 2325), что нулевое решение $u \not\equiv 0$ относительно H существует тогда и только тогда, когда граничная гиперплоскость $\langle x, N\rangle = 0$ является характеристической, т. е. когда $P^0(N) = 0$, где P^0 — главная часть полинома P.

Основной результат реферируемой работы заключается в следующем. Пусть гиперплоскость $\langle x, N\rangle = 0$ является характеристической для каждого неприводимого множителя, на которые разлагается полином $P(\zeta)$. Обозначим через $E(H)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в H с топологией равномерной сходимости производных всех порядков на каждом компактном множестве, лежащем в H. Тогда замыкание $E(H)$ совокупности всех нулевых решений уравнения (1) относительно H есть совокупность всех решений этого уравнения в $E(H)$. Далее, замыкание в $E(R^n)$ множества всех функций u, каждая из которых являет

ся нулевым решением относительно $\{x : < x, N>>c\}$ при каком-нибудь c (своем для каждой u), совпадает с совокупностью всех решений уравнения (1) в $E(R^n)$ (R^n — все n-мерное пространство). М. С. Агранович

11613. Асимптотические явления в математической физике. Фридрикс (в подл. Фридрихс К. О.) (Friedrichs K. O.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 2, 79—94
См. РЖМат, 1957, 3138.

11614. О решении некоторых смешанных граничных задач. II. Факторизация ядра контурных интегралов. Танимура (On the solution of some mixed boundary problems. II. Factorization of the kernel by contour integrals. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1955, 5, № 163-187, 337—348 (англ.)
Ч. I см. РЖМат, 1960, 10315.

11615. О решении некоторых смешанных граничных задач. III. Задачи о частичном интервале для симметричных ядер. Танимура (On the solution of some mixed boundary problems. III. Problems of a partial interval for symmetrical kernels. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1956, 6, March, 63—74 (англ.)
Ч. 1 см. РЖМат, 1960, 10315; ч. II см. реф. 11614. Решается задача об отыскании функций $U(x)$ и $W(x)$, значения которых заданы соответственно при $|x<a$ и при $|x|>a$, если их преобразования Лапласа $\Psi_{(q)}$ и $\Phi_{(q)}$ связаны соотношением

$$\Psi_{(q)} = k(q)\ \Phi_{(q)}$$

с известной функцией $k(q)$, четной, аналитической в начале координат. Решение представляется в виде ряда из повторных контурных интегралов в комплексной плоскости и используется для исследования некоторых смешанных граничных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Ю. Н. Валицкий

11616. О решении некоторых смешанных граничных задач. VII. Интеграл, эквивалентный разложению в ряд Фурье. Танимура (On the solution of some mixed boundary problems. VII. An integral equivalent to an extension of the Fourier series. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1957, 7, Oct., 297—306 (англ.)
Рассматриваются интегралы вида

$$F(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{C_l(x,q)}{D(q)}\Psi^{(k)}(q)\,qdq, \qquad (1)$$

где $\Psi^{(k)}(q) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,C_k(x,q)\,dx \quad (i,k=1,2;\ i\neq k)$,

$C_1(x,q)$, $C_2(x,q)$ — некоторые частные решения уравнения

$$C'' - q^2C = 0 \qquad (2)$$

на отрезке $[x_1, x_2]$, $D(q)$ — вронскиан системы $\{C_1(x,q), C_2(x,q)\}$. Методами теории вычетов устанавливается, что интеграл (1) совпадает с суммой ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям некоторой однородной краевой задачи для уравнения (2). Интегральное представление (1) используется при решении третьей краевой задачи для уравнения $\Delta u = p\cdot u(x,y)$ в прямоугольнике, когда одна из его сторон состоит из двух промежутков, на которых задаются различные краевые условия. Ю. Н. Валицкий

11617. О решении некоторых смешанных граничных задач. VIII. Интегральное представление разложения в ряд Фурье — Бесселя — Дини. Танимура. (On the solution of some mixed boundary problems. VIII. The integral representation of an extension of the Fourier — Bessel — Dini series. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1957, 7, Oct., 307—313 (англ.)
Методы предыдущей статьи того же цикла (реф. 11616) переносятся на изучение интегралов вида

$$F(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{C_l(x,q)}{D(q)}\Psi^{(k)}(q)\,qdq, \qquad (1)$$

где $C_1(x,q)$ и $C_2(x,q)$ — некоторые частные решения уравнения $x^2C'' + xC' - (q^2x^2+\nu^2)C = 0 \quad (\nu \geqslant 0)$ (смысл остальных обозначений см. там же). Интегральное представление (1) применяется при исследовании некоторых краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\nu^2}{x^2}+p\right)u = 0.$$

Ю. Н. Валицкий

11618. О решении некоторых смешанных граничных задач. IX. Более простые задачи в прямоугольной области. Танимура (On the solution of some mixed boundary problems. IX. Simpler problems of a rectangular domain. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1959, 9, March, 51—65 (англ.)
Изучаются интегралы вида

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{C_i(x,\lambda)}{D_{12}(\lambda)}\Psi^{(j)}(\lambda)\,d\lambda \quad (i,j=1,2;\ i\neq j), \qquad (1)$$

где $C_1(x,\lambda)$, $C_2(x,\lambda)$ — некоторые решения уравнения

$$Ly \equiv \frac{1}{P(x)}\frac{d}{dx}\left(Q(x)\frac{dy}{dx}\right) - R(x)\,y = \lambda y \qquad (2)$$

на отрезке $[x_1, x_2]$, $\Psi^{(j)}\lambda = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,C_j(x,\lambda)\,P(x)\,dx$,

$D_{12}(\lambda)/Q(x)$ — вронскиан системы $\{C_1, C_2\}$, L — некоторый контур в комплексной плоскости, $f(x)$ — заданная функция. Как и в предыдущих статьях этого цикла (реф. 11616, 11617), устанавливается связь интегралов (1) с рядами по собственным функциям уравнения (2). Интегралы типа (1) используются при решении краевых задач в прямоугольнике $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ для уравнения $L_x u = L_y u$. Эти задачи следующие: третья краевая задача; однородная третья краевая задача, причем производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ испытывает на отрезке прямой $y = b$ ($y_1 < b < y_2$, $x_1 < x < a < x_2$) скачок, равный $C_1(x,\sigma)$; третья краевая задача, в которой на двух частях стороны $y = y_2$ поставлены различные условия; та же задача, причем $u(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ могут терпеть разрыв на отрезке прямой $y = b\,(y_1 < b < y_2, \quad x_1 < x < a < x_2)$. Ю. Н. Валицкий

11619. О предельной задаче с косой производной. Лион (Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique. Lions J. L.), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 207—239 (франц.)

11620. О корректных краевых задачах в полупространстве для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Дикополов Г. В., Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 5, 158—160
В полупространстве $t \geqslant 0$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^m u(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial t^m} = \sum_{k=1}^{m} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{k-1}u(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial t^{k-1}}, \qquad (1)$$

где $P_k(s)$ — любые многочлены с постоянными коэффициентами. Через **H** обозначается пространство всех обобщенных функций $f(x)$, являющихся производными любых порядков от функций из $L^2(R^n)$. Преобразование Фурье отображает **H** на пространство H функций $g(\sigma)$, получающихся из функций $L^2(R^n)$ умножением на любые многочлены. Топологически **H** и H — счетные объединения гильбертовых пространств. Пусть $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_m(\sigma)$ — корни уравнения $\lambda^m = \sum_{k=1}^{m} P_k(\sigma)\lambda^{k-1}$, пронумерованные так, что $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{j+1}(\sigma)$; G_j — множество в R^n, на котором $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leqslant 0$. Очевидно, что $G_1 \supset \ldots \supset G_m$.

Для каждого уравнения (1) следующим образом описывается корректная краевая задача. Пусть на каждом G_j задана функция $v_j(\sigma)$, продолжаемая на все R^n как функция из H. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t, x)$, у которого преобразование Фурье от $\partial^{j-1}u(0, x)/\partial t^{j-1}$ совпадает на G_j с $v_j(\sigma)$. Это решение при $t \geqslant 0$ принадлежит **H**; При $t \to \infty$ оно растет не быстрее некоторой степени t. Решение с такими свойствами единственно. Оно непрерывно зависит от $v_j(\sigma)$ (в смысле топологии в **H** и H). Задача становится некорректной, если G_j заменить другими множествами G_j' ($G_1' \supset \ldots \supset G_m'$; $G_j \neq G_j'$ на множестве положительной меры хотя бы при одном j).

Для волнового уравнения рассмотренная задача оказывается задачей Коши, для уравнения Лапласа — задачей Дирихле. Для обратного уравнения теплопроводности теорема 1 утверждает просто единственность решения $u \equiv 0$ в рассмотренном классе функций. Для ультрагиперболического уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ задача состоит в задании $v_1(\sigma)$ (т. е. $u(0, x_1, x_2, x_3)$ всюду и $v_2(\sigma)$ — на области $G = \{\sigma_3^2 \leqslant \sigma_1^2 + \sigma_2^2\}$.

Отмечается, что если, в дополнение к условиям теоремы 1, $u(0, x)$ — обычная функция, принадлежащая $L^2(R^n)$ вместе с достаточным числом производных по x, то решение $u(t, x)$ — обычная функция, принадлежащая $L^2(R^n)$ при каждом $t \geqslant 0$, М. С. Агранович

11621. Замечание к статье «О единственности решения задачи Коши для квазилинейных симметричных систем». **Слободецкий Л. Н.**, Успехи матем. наук, 1960, **15**, № 1, 262

См. РЖМат, 1957, 3989.

11622. Об устойчивости решений уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа. **Бакельман И. Я.**, Успехи матем. наук, 1960, **15**, № 1, 163—170

Для двух любых обобщенных решений z_1 и z_2 уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y)\, R(x, y, z) > 0$ в выпуклой области G плоскости xy, совпадающих на границе области, устанавливается оценка $|z_1 - z|$ в зависимости от максимума модуля R на этих решениях и величины $\iint_D |\varphi_1 - \varphi_2|\, dx\, dy$. А. В. Погорелов

11623. О дифференциальном неравенстве $0 < \alpha \leqq rt - s^2 \leqq \beta < \infty$. **Хейнц** (Über die Differentialungleichung $0 < \alpha \leqq rt - s^2 \leqq \beta < \infty$. Heinz Erhard), Math. Z., 1959, **72**, № 2, 107—126 (нем.)

Усиливаются теоремы А. Д. Александрова о гладкости и строгой выпуклости поверхности с ограниченной удельной кривизной. В частности доказывается, что дважды дифференцируемое решение $z(x, y)$ дифференциального неравенства $0 < \alpha \leqq rt - s^2 \leqq \beta < \infty$ в области G, ограниченное по модулю постоянной $\delta < \infty$, на множестве точек G_d области G, удаленных от ее границы на расстояние не меньшее d, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем и константой, зависящими только от α, β, δ и d. А. В. Погорелов

11624. О непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений. **Наш** (в подл. Нэш Дж. (Nash J.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1960, **4**, № 1, 31—52

См. РЖМат, 1960, 6498.

11625. Изолированные особенности решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. **Гилбарг Д., Серрин Джеймс** (Gilbarg D., Serrin J.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, **2**, № 6, 63—86

См. РЖМат, 1958, 4720.

11626. Теорема Фрагмена — Линделёфа в гармоническом анализе и ее применение к некоторым вопросам теории эллиптических уравнений. **Лакс П. Д.** (Lax P. D.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, **3**, № 4, 107—132

См. РЖМат, 1960, 3026.

11627. О задаче Дирихле для полупространства. **Джафаров** (Јарымфәза үчүн дирихле мәсәләси һаггында Чәфәров. Ә. С.), АзәрбССР Елмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-ријазијјат вә техн. елмләри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1959, № 5, 3—11 (азерб.; рез. русск.)

Изучаются свойства гармонических на полупространстве функций $U(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от свойств граничных функций $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в метрике L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В частности, приведены некоторые достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi \in L_p(R_{n-1})$, чтобы функция U имела ограниченные в смысле $L_p(x_n > 0)$ производные порядка $1, \ldots, r$. Этот результат является уточнением соответствующих результатов С. М. Никольского и референта. О. В. Бесов

11628. Теоремы о среднем значении и их применение для решения граничных задач. **Вальтер** (Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben. Walter Wolfgang), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, **59**, № 3, 93—131 (нем.)

Для функции $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, определенной в некоторой области G n-мерного евклидова пространства R_n, вводятся взвешенные средние по шару радиуса R с центром в точке x

$$M(R, x, u, g) = \frac{1}{\Omega R^n} \int_{|x-y|<R} g\left(\frac{|y-x|}{R}\right) u(y)\, dy,$$

где $g(t)$ — функция, определенная в $(0, 1)$ и Ω — объем единичного шара в R_n. При выполнении определенных ограничений получается равенство

$$M(R, x, u, g) = \sum_{i=0}^{p-1} b_{ni} R^{2i} \Delta^i u(x) + \frac{1}{\Omega R^n} \int_{|x-y|<R} \Delta^p u(y)\, H_p(|y-x|, R, g)\, dy,$$

где $b_{ni} = a_{ni} \int_0^1 g(t)\, t^{n+2i-1}\, dt$, a_{ni} — некоторые положительные постоянные, $H(r, R, g)$ — некоторая функция, явный вид которой выписывается и Δ оператор Лапласа.

Из формулы (1) автор получает следующий результат. Если функция $g(t)$ такова, что $g(t)\, t^{n-2} \in L(0, 1)$ и

$$\int_0^1 g(t)\, t^{n+2i-1}\, dt = \begin{cases} 1 \text{ при } i = 0, \\ 0 \text{ при } 0 < i < p, \end{cases} \qquad (2)$$

то для любой p — гармонической функции $u(x)$ справедливо равенство

$$u(x) = M(R, x, u, g). \qquad (3)$$

Обратно, если $g(t)$, кроме (2), удовлетворяет условию

$$\int_0^1 g(t)\,t^{n+2p-1}\,dt \neq 0$$

и ограничена, то функция $u(x)$, удовлетворяющая равенству (3) при любом $x \in G$ при любом достаточно малом R, p-гармонична в G.

В дальнейшем хорошо известным вариационным методом решается первая краевая задача для полигармонического уравнения. Автор доказывает сходимость минимизирующей последовательности по методу Р. Куранта (см., например, Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., 1953, стр. 28—35 см. РЖМат, 1957, 477), производя ее сглаживание с помощью своего метода усреднения.

Рассматривается также первая краевая задача для уравнения $\Delta^p u + (-1)^p q(x)\,u = (-1)^p F(x)$ $(q(x) \geqslant 0)$ и соответствующая задача о собственных значениях.

Л. Н. Слободецкий

11629. Решение задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. (Предварит. сообщение). Нечас Индржих (Nečas Jindřich), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 3, 467—469 (рез. франц.)

Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство, точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, Ω — ограниченная область в E_n. Граница $\dot\Omega$ области Ω предполагается представимой в окрестности каждой точки границы посредством непрерывной функции $(n-1)$ переменных, первые обобщенные производные которой ограничены фиксированной постоянной. Предполагается, что область Ω является пределом возрастающей последовательности областей Ω_k с бесконечно дифференцируемыми границами, имеющими в некотором смысле своим пределом $\dot\Omega$. Пусть $Du = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - cu$, $(a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ непрерывны в $\Omega + \dot\Omega$ вместе с первыми производными, $c \geqslant 0$ непрерывна в $\Omega + \dot\Omega$ и существует $d = \text{const} > 0$ $\sum a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant d\sum \xi_i^2\Big)$. Пусть $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство Соболева. Утверждается, что для $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ существует функция $\in L_2(\dot\Omega)$ — граничное значение на $\dot\Omega$ — след функции $u(x)$ на Ω. Пусть $W(\dot\Omega)$ — совокупность следов. Утверждается, что методом ортогональных проекций можно доказать существование решения задачи *Ia*: для $h \in W(\dot\Omega)$ найти $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Du = 0$ в слабом смысле и след $u(x)$ на $\dot\Omega = h$. Пусть $W_{20}^{(1)}(\Omega)$ — замыкание в $W_2^{(1)}(\Omega)$ функций, отличных от нуля только в подобластях области Ω. Утверждается, что вариационным методом можно доказать существование решения задачи II: для $f \in L_2(\Omega)$ найти $v \in W_{20}^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Dv = f$ в слабом смысле. Утверждается, что можно дать определение обобщенной производной по внешней конормали ν $(\partial v/\partial\nu) \in L_2(\dot\Omega)$, притом $(\partial v/\partial\nu) = T(f)$, где T — линейный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\dot\Omega)$. Утверждается, что имеет место формула Грина $\int_\Omega uDv\,d\Omega = \int_{\dot\Omega} u\,(\partial v/\partial\nu)\,ds$, где u — решение задачи *Ia*, v — решение задачи II. Тогда $\int_\Omega uf\,d\Omega = \int_{\dot\Omega} hT(f)\,ds$ и для $h \in L_2(\dot\Omega)$ правая часть есть линейный функционал над f в $L_2(\Omega)$. Следовательно, левая часть есть линейный функционал над $f \in L_2(\Omega)$, и $u \in L_2(\Omega)$ объявляется решением задачи *Iδ*, получающейся из *Ia* заменой $h \in W(\dot\Omega)$ на $h \in L_2(\dot\Omega)$. Неравенству $\|\partial v/\partial\nu\|_{L_2(\dot\Omega)} \leqslant R\,\|f\|_{L_2(\Omega)}$ соответствует двойственное неравенство $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant R\,\|h\|_{L_2(\dot\Omega)}$.

Х. Л. Смолицкий

11630. Замечание об эллиптических дифференциальных уравнениях. Маржик (Eine Bemerkung über elliptische Differentialgleichungen Mařik Jang), Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, № 2, 246—250 (нем.; рез. русск.)

Пусть G — непустое открытое множество пространства E_m и H — граница G. Рассматривается система операторов l вида $l = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где a_{ij} таковы, что форма $A(\bar l) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для любого $\bar l(\xi_i, \ldots, \xi_m)$. Функции b_i — произвольны. Пусть L — система операторов вида $L = c - l$, которые обладают следующим свойством: Если $u \geqslant 0$ на H, $Lu \geqslant 0$ на G, то $u \geqslant 0$ на G. Доказана теорема:

Достаточным условием принадлежности оператора $L = c - l$ к L является существование некоторой функции $v(x)$, дважды непрерывно дифференцируемой на G и удовлетворяющей условиям $v > 0$ на $\bar G$, $Lv > 0$ на G.

Даются способы построения подобной функции $v(x)$ для некоторого вида операторов $L = c - l$, а также получены оценки для решения $u(x)$ уравнений $L(u) = f$. Доказывается непрерывная зависимость решения $u(x)$ этого уравнения от коэффициентов оператора L и правых частей.

А. А. Вашарин

11631. Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами. Гординг Ларс (Gårding L.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей. 1957, **1**, № 3, 107—116

См. РЖМат, 1957, 3153

11632. Об одном уравнении гиперболического типа, вырождающемся на границе. Терсенов С. А., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 2, 276—279

Для уравнения

$$L(u) \equiv y^n u_{yy} - u_{xx} + au_y + bu_x + cu = f, \qquad (1)$$

где $1 \leqslant n < 2$ и коэффициенты a, b, c, f — аналитические функции x, y в полуплоскости $y \geqslant 0$, рассматриваются некоторые обобщения задачи Коши с начальными данными на линии $y = 0$ вырождения типа уравнения, в смысле, предложенном А. В. Бицадзе (РЖМат, 1960, 370). Определяется дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1). Пусть $\nu(x)$ и $\tau(x)$ — заданные, нужное число раз дифференцируемые функции.

В случае $n = 1$, $a(x, 0) < 1$, $k = 3 - 2[\min a(x, 0)]$ вводятся функции:

$$\eta(x, y) = \int_0^y \exp\left\{\int_t^R a(x, \xi)\,\xi^{-1}d\xi\right\}dt,$$

$$w(x, y) = \sum_{s=0}^N w_s(x, y);$$

$$N > (k-1)/2,\ w_0(x, y) = -\eta\int_y^R (t\eta_t)^{-1} F(x, t)\,dt -$$

$$-\int_0^y (t\eta_t)^{-1}\eta F(x, t)dt,\ w_s(x, y) = -\eta\int_y^R (t\eta_t)^{-1}L_2(w_{s-1})dt -$$

$$-\int_0^y (t\eta_t)^{-1}\eta L_2(w_{s-1})\,dt,\ L_2(v) = v_{xx} - bv_x - cv;$$

$F(x, y) = L_2(\tau) + f$ и в области D, ограниченной отрезком AB оси $y = 0$ и двумя характеристиками уравнения (1) разных семейств, выходящими из точек A и B устанавливается:

Теорема 1: а) Если $a(x, 0) < 1$ на AB, то существует единственное решение $u(x, y)$ уравнения (1) в D, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = \tau(x)$,

$\lim_{y\to 0}(u_y - w_y)/\tau_y = \nu(x)$. б) Если $a(x, 0) \geqslant 1$ на AB, то существует единственное решение $u(x, y)$, которое удовлетворяет условию $u(x, 0) = \nu(x)$. Для случая $1 < n < 2$ формулируется

Теорема 3. Если $a(x, 0) > 0$ на AB, то существует единственное решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию $u(x, 0) = \nu(x)$ на AB. Без доказательства формулируются аналогичные теоремы при более частных предположениях о коэффициентах a, b, c и f и о функции $\tau(x)$. И. Л. Кароль

11633. Разложение решений общего двумерного линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами в ряды по однородным полиномиальным решениям. Уиддер (Expansions in series of homogeneous polynomial solutions of the general two-dimensional linear partial differential equation of the second order with constant coefficients. Widder D. V.), Duke Math. J., 1959, 26, № 4, 599—603 (англ.)

Изучаются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y), \qquad (1)$$

где $P_n(x, y)$ — однородный полином степени n, удовлетворяющий уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Для $P_n(x, y)$ доказываются формулы: $P_n(x, y) = A_n(Mx + y)^n + B_n(Mx - y)^n$, $M = \sqrt{-N}$, $N < 0$; $P_n(x, y) = A_n(Mx + yi)^n + \overline{A}_n(Mx - yi)^n$, $M = \sqrt{N}$, $N > 0$. В эллиптическом случае $N > 0$ ряд (1) сходится всюду внутри эллипса $M^2x^2 + y^2 < \rho^2$ $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|} = 1/\rho\right)$ и расходится всюду вне его, за исключением может быть отрезков, лежащих на продолжениях некоторых его диаметров. В гиперболическом случае $N < 0$ ряд (1) будет сходиться всюду внутри параллелограмма:

$$|Mx - y| \leqslant \rho_1, \quad |Mx + y| \leqslant \rho_2$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}, \frac{1}{\rho_2} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|}\right)$$

и расходится всюду вне его, за исключением может быть некоторых отрезков диагоналей этого параллелограмма. Рассмотрен также случай $N = 0$. В. М. Бабич

11634. Доказательства существования для смешанных задач для гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными методом непрерывности. Томе (Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method. Thomée Vidar), Math. scand., 1958, 6, № 1, 5—32 (англ.)

В области V плоскости (x, t) с кусочно-гладкой границей S ищется решение гиперболической системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = F_i \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n, \ \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n)$$

с вещественными $\alpha_i \in C^{(1)}(V)$ и с $a_{ik} \in C(V)$, удовлетворяющее на S граничным условиям весьма общего вида. Для описания этих граничных условий поступим следующим образом. Обозначим через S_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ множество тех точек S, через которые внутрь области V входят точно i характеристик системы (1), через S_i^- и S_i^+ те части S_i, в которых внешняя нормаль ν к S образует с осью x тупые и острые углы соответственно и через $S^- = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i^-$, $S^+ = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i^+$. Предполагая, что S^- и S^+ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, автор задает на них линейные граничные условия вида

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ik}^j u_j = f_{ik}, \ k = 1, 2, \ldots, i \text{ на } S_i^-,$$

$$\sum_{j=n-i+1}^{n} l_{ik}^j u_j = f_{ik}, \ k = 1, 2, \ldots, i \text{ на } S_i^+, \qquad (2)$$

причем предполагается, что l_{ik}^j непрерывны и граничные условия независимы друг от друга. Задача (1) — (2) решается в обобщенной обстановке в пространстве квадратично суммируемых функций. Для этого сначала выводятся априорные оценки решений, а затем применяется метод непрерывного продолжения по параметру. Аналогичная методика применяется для решения смешанной задачи для одного гиперболического уравнения, при условии простоты корней его характеристического уравнения. Л. Н. Слободецкий

11635. О некоторых основных свойствах решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Выборный Рудольф, Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 4, 537—551 (русск.; рез. нем.)

Доказывается единственность решения смешанной задачи для параболического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f,$$

где $c(x, t) \leqslant 0$ при краевом условии $a\frac{\partial u}{\partial l} + bu = \varphi$ и начальном условии $u|_{t=0} = \psi$. При этом a, b, φ — функции точки на границе рассматриваемой конечной области, $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, $a^2 + b^2 > 0$, l — направление, образующее острый угол с внутренней нормалью. Кроме того, доказываются теоремы о непрерывной зависимости решения от коэффициентов уравнения и от f, а также от коэффициентов a, b и от φ, ψ. Полученные результаты формулируются аналогично теоремам О. А. Олейник, относящимся к эллиптическим уравнениям (Матем. сб., 1952, 30 (72), 695—712). С помощью теоремы единственности для линейного уравнения автор получает некоторую теорему единственности для нелинейного параболического уравнения вида $u_t = F(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j})$. Д. М. Эйдус

11636. О решениях уравнения распространения тепла. Геринг (On solutions of the equation of heat conduction. Gehring F. W.), Michigan Math. J., 1958, 5 № 2, 191—202 (англ.)

Функция $u = u(x, t)$ называется параболической в области D плоскости x, t, если в ней

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Функция $w = w(x, t)$ называется субпараболической в D, если для любого содержащегося в этой области прямоугольника $R = R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$

$$w \leqslant w_R \quad (x, t) \in R, \qquad (2)$$

где $w_R = w_R(x, t)$ — параболическая в R функция, совпадающая с w при $t = t_1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Параболические и субпараболические функции введены И. Г. Петровским (Petrowsky I., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. Compositio math., 1934—35, 1, 383—419) и применялись им для доказательства существования решения первой краевой задачи для уравнения (1). В реферируемой работе

устанавливаются некоторые свойства параболических и субпараболических функций, аналогичные соответствующим свойствам гармонических и субгармонических функций. В частности, доказываются некоторые теоремы типа теорем Фрагмена — Линделёфа для гармонических функций. Л. Н. Слободецкий

11637. Некоторые замечания о фундаментальных решениях параболических дифференциальных уравнений второго порядка. Роте (Some remaks on fundamental solutions of parabolic differential equations of second order. Rothe E. H.), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 3, 227—245 (англ.)

Пусть D — ограниченная область n-мерного евклидова пространства точек $x=(x_1,\dots,x_n)$ с достаточно гладкой границей $\dot{D}$. Предположим, что уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-V(x)u=0 \qquad (1)$$

$$(a_{ik}=a_{ki},\ V(x)\geqslant 0)$$

параболично в $\Delta=D\times[0,+\infty)$ $(x\in D,\ 0\leqslant t<+\infty)$. Обозначим через $\Gamma(x,\xi,t)$ фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке $(\xi,0)$ и через $G(x,\xi,t)$ — функцию Грина уравнения (1), удовлетворяющую на боковой поверхности $\dot{\Delta}$ цилиндра Δ и на его нижнем основании нулевым граничным условиям. Главной целью работы является доказательство того, что функции $\Gamma(x,\xi,t)$ и $G(x,\xi,t)$ имеют одинаковую особенность при $x=\xi$ и $t=0$. Иначе, что функция $\gamma(x,\xi,t)=\Gamma(x,\xi,t)-G(x,\xi,t)$ является регулярной функцией. Отсюда получаются некоторые следствия (большей частью известные) о поведении собственных функций и собственных значений задачи

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-(V+\lambda)u+0,$$
$$u|_{\dot{D}}=0.$$

Л. Н. Слободецкий

11638. Единственность продолжения решений некоторых параболических дифференциальных операторов. Мидзохата (Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Mizohata Sigeru), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, A—Math., **31**, № 3, 219—239 (франц.)

Доказывается следующее предложение.

Теорема. Функция $u=u(x_1,\dots,x_n,t)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат пространства точек $(x_1,\dots,x_n,t)$ параболическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u,$$

с достаточно гладкими коэффициентами и такая, что

$$u\Big|_{x_n=0}=\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}=0,$$

тождественно равна нулю в некоторой окрестности начала координат.

Теорема допускает очевидное обобщение на случай, когда гиперплоскость $x_n=0$ заменена достаточно гладкой поверхностью S, все нормали к которой не параллельны оси t, и когда производная по x_n заменена на производную по направлению, трансверсальному к S. Л. Н. Слободецкий

11639. О единственности решения задачи Коши для уравнения параболического типа. Ли Дэ-юань, Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 5, 979—982

Рассматривается параболическое уравнение

$$\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu-\frac{\partial u}{\partial t}=f,$$

где коэффициенты a_{ij} трижды непрерывно дифференцируемы по пространственным координатам x_i $(i=1,2,\dots,n)$ и один раз непрерывно дифференцируемы по t. При этом коэффициенты b_i, c и свободный член f ограничены по модулю в рассматриваемой области. Пусть Γ — кусок цилиндрической n-мерной гиперповерхности в пространстве переменных $x_1, x_2,\dots,x_n, t$ с образующей, параллельной оси t. Доказывается, что решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения с начальными условиями $U\Big|_{\Gamma}=\varphi$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}=\psi$, где ν — нормаль к Γ, единственно в классе функций, дважды непрерывно дифференцируемых по x_i и один раз по t. Приводится без доказательства аналогичный результат для квазилинейных параболических уравнений. Тем самым известный результат Е. М. Ландиса, относящийся к уравнениям эллиптического типа, переносится на уравнения параболического типа. Д. М. Эйдус

11640. Задача Коши для прошедшего времени для некоторых параболических уравнений. Мидзохата (Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques. Mizohata Sigeru). Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 10, 693—696 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u=0,$$

где $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\gamma|\xi|^2$ для $x\in R_n$, $0\leqslant t\leqslant h$. При некоторых предположениях относительно коэффициентов доказывается следующая теорема единственности: Пусть u — решение уравнения в полосе $0<t<h$, $x\in R_n$, причем $u|_{t=0}=0$. Тогда $u\equiv 0$ в некоторой окрестности гиперплоскости $t=0$. Аналогичная теорема в частном случае, когда коэффициенты уравнения не зависят от t, была доказана ранее Иосида (РЖМат, 1958, 6014). Д. М. Эйдус

11641. О стабилизации решения уравнения теплопроводности. Полякова В. М., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 6, 1230—1233

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

где $0<a_0\leqslant a(x,t)\leqslant A_0$. Пусть $u(x,t)$ — решение этого уравнения в области $-\infty<x<\infty$, $t>0$. Доказывается, что если $\int_{-K}^{N}u(x,0)\,dx\to u_0$ при $K, N\to\infty$, то при $t\to\infty$ имеет место $u(x,t)\to u_0$ равномерно по x в любом конечном интервале. Имеются опечатки.

Д. М. Эйдус

11642. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром. Калашников А. С., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 1, 27—30

В полосе $S(0\leqslant t\leqslant T,\ -\infty<x<+\infty)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0}=u_0(x). \qquad (2)$$

В предположении, что $\varphi(u)$ дважды непрерывно дифференцируемо и что $\varphi''(u)$ имеет конечное число нулей в любом конечном интервале изменения u и что $u_0(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, доказывается, что обобщенное решение задачи (1)—(2) является пределом при $\varepsilon \to +0$ для решений уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x},$$

удовлетворяющих начальному условию (2).

В более ранних работах предполагалось, что $\varphi''(u)$ не меняет знака (РЖМат, 1959, 5852). Л. Н. Слободецкий

11643. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t)$. **Соболев С. Л.**, Докл. АН СССР, 1959, 129, № 6, 1246—1249

Найдено в явном виде фундаментальное решение задачи Коши для уравнения:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t), \qquad (1)$$

т. е. решение уравнения

$$\frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x, y, z, t),$$

равное нулю при $t < 0$. Оно имеет вид:

$$G = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{t} Y_0\left(\sqrt{\frac{xyz}{t}}\right), & t > 0,\ xyz > 0, \\ \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{t}\cdot K_0\left(\sqrt{\frac{xyz}{t}}\right), & t > 0,\ xyz < 0; \end{cases}$$

$G(x, y, z, t)$ является неоднозначной функцией в комплексном пространстве (x, y, z), обращается в бесконечность на координатных плоскостях и с различной скоростью убывает в различных квадратах при $r \to \infty$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Уравнение (1) корректно по Петровскому, но не относится ни к одному из хорошо изученных типов. М. Ф. Федорюк

11644. Квазилинейные гипоэллиптические дифференциальные операторы. Петре (Opérateurs différentiels quasi linéaires hypoelliptiques, Peetre Jaak), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 24, 3401—3403 (франц.)

Л. Хермандером был подробно исследован класс линейных дифференциальных операторов P таких, что все решения однородного дифференциального уравнения $Pf = 0$, априори предполагаемые только обобщенными функциями, оказываются бесконечно дифференцируемыми. Одним из характеристических свойств гипоэллиптического оператора P является то, что всякое достаточно гладкое (например, непрерывное) решение однородного уравнения $Pf = 0$ оказывается бесконечно дифференцируемым. В реферируемой работе рассматривается достаточно гладкое решение f уравнения $Pf = 0$, где $P = \sum_j a^j(x, N_{j1}, \ldots, N_{jn_j}) M_j + a^0(x, N_{01}, \ldots, N_{0h_0})$, $a^0, a^1, \ldots$ — бесконечно дифференцируемые функции, N_{jk}, M_j — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и приводятся достаточные условия на линейный дифференциальный оператор $\sum_j a^j(x, N_{j1}f, \ldots, N_{jh_j}f) M_j$, обеспечивающие бесконечную дифференцируемость функции f. Е. А. Горин

11645. О задаче Коши для системы конечного числа линейных уравнений в частных производных первого порядка счетного множества аргументов. Жаутыков О. А., КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1959, вып. 8(12), 18—20 (рез. каз.)

При некоторых ограничениях (которые накладываются на исходные данные задачи) рассматривается задача нахождения решения системы линейных уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ks}(t_1, t_2, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots) \frac{\partial z}{\partial x_s}$$

$$(k = 1, \ldots, m), \qquad (1)$$

удовлетворяющего условию:

$$z(t_1^0, \ldots, t_m^0, x_1, x_2, \ldots) = \omega(x_1, x_2), \qquad (2)$$

где t_k меняются в замкнутых интервалах $[\alpha_k, \beta_k]$, $|x_s| < R$. Показывается, что с помощью замены $t_k = t_k^0 + uu_k$ $(0 < u < 1)$, $\alpha_k - t_k^0 < u_k < \beta_k - t_k^0$ задача (1) — (2) приводится к следующей задаче Коши для одного уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} u_l a_{ls} \frac{\partial z}{\partial x_s},$$

$$z(u, u_1, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots)|_{u=0} = \omega(x_1, x_2, \ldots).$$

М. Л. Расулов

11646. Системы уравнений в частных производных и связанные с ними формулы Грина. Бохнер (Systèmes des équations aux dérivées partielles qui se rattachent aux formules de Green. Bochner S.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 19—26. Discuss., 26—27 (франц.)

11647. Первая краевая задача для сильно эллиптических систем в классе обобщенных функций. Мусаев С. Р., Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-рија.ијат вә кимја сер., Уч. зап. Азерб. ун-т Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 2, 47—57

Пусть G — конечная область n-мерного евклидова пространства E_n и Γ — достаточно гладкая ее граница. $F^m(E_n)$ есть основное пространство финитных функций порядка m, определенных в E_n. Совокупность обобщенных функций, определенных в E_n над функциями $F^m(E_n)$ и равных нулю вне $\overline{G}$, обозначим через $Y_m(\overline{G})$. Ставится задача (А). Дана $\rho(x) \in Y_m(G)$, найти $u(x) \in Y_k(\overline{G})$, удовлетворяющую равенству: $<Lu, \varphi> = <\rho, \varphi>$, для всех $\varphi \in F^m(G)$, удовлетворяющих совокупности граничных условий: $R\varphi = 0$.

Утверждается однозначная разрешимость задачи (А), если коэффициенты Lu достаточно гладкие и краевая задача $L^*u = \psi$, $R(\varphi) = 0$ при любой функции $\psi \in C^m(\overline{G})$ в классе функций $C^k(\overline{G})$ разрешима единственным образом. Аналогичный результат утверждается для сильно эллиптической системы. Именно, пусть $A^{(k_1, \ldots, k_s)}(x)$ при фиксированных $k_1, \ldots, k_s$, $0 \leqslant s \leqslant 2m$, $\sum_{i=1}^{s} k_i = 1, 2, \ldots, n$ есть квадратная матрица порядка N и

$$Lu = \sum_{k_1, \ldots, k_s = 1}^{n} (-1)^s \frac{\partial^s}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_s}} [A^{(k_1, \ldots, k_s)}(x) U]$$

сильно эллиптическая система. Тогда уравнение $<Lu, \varphi> = <\rho, \varphi>$, где $\rho \in Y_m(\overline{G})$ — заданная обобщенная функция, $\varphi \in F^m(G)$, имеет единственное решение $u \in Y_m(\overline{G})$, если соответствующая однородная сопряженная система при однородно граничных данных имеет только тривиальное решение. Этот результат обобщает результат М. И. Вишика. (Матем. сб., 1951, 29 (71), № 3), а также С. Л. Соболева и М. И. Вишика (РЖМат, 1960, 7642). А. А. Вашарин

11648. О справедливости теорем Лиувилля для решений параболических систем. Эйдельман С. Д., Успехи матем. наук, 1960, 15, № 1, 233—234

В более ранних работах автора теорема Лиувилля распространена на некоторые линейные параболические системы с постоянными коэффициентами. В настоящей работе приведен пример, показывающий, что для параболической системы с коэффициентами, зависящими от t, теорема Лиувилля может не иметь места. Д. М. Эйдус

11649. Смешанная граничная задача для одной системы дифференциальных уравнений параболического типа. Ким Е. И., Иванова Л. П., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 6, 1183—1186

Пусть D — область плоскости (x, y), ограниченная кусочно-гладкой кривой. В области $A = D \times (0, T)$ $((x, y) \in D,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ ищется решение системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Delta u_k,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i(x, y, 0) = f_i(x, y) \qquad (2)$$

и граничным условиям на боковой границе C области A $u_i|_C = \varphi_i$ или $\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} u_k\right)\Big|_C = \varphi_i$. Здесь a_{ik} — комплексные числа, причем корни уравнения $|\|a_{ik}\| - \lambda E| = 0$ различны и имеют положительные реальные части, и α_{ik} функции, непрерывные на C. Решение смешанных задач производится хорошо известным методом теории потенциала. Сначала строится фундаментальная матрица для системы (1), с помощью которой вводят потенциалы простого и двойного слоев. Решения ищутся в виде этих потенциалов, для плотностей которых получается система интегральных уравнений типа Вольтерра, решаемая методом последовательных приближений. Л. Н. Слободецкий

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова

11650. Эллиптическая баллистика. Абелос (La balistique elliptique. Abeloos L.), Bull. Assoc. ingrs issus École applic. artill. et génie, 1959, **37**, № 3, 19—56 (франц.; рез. флам.)

Рассматриваются различные вопросы внешней баллистики в предположении, что основными траекториями снарядов (в пустоте и около сферической земли) являются кеплеровские эллипсы, движение по которым рассчитывается по правилам небесной механики.

Г. Н. Дубошин

11651. К вопросу интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке. Дубасов В. Т., Тр. Моск. авиац. технол. ин-та, 1959, вып. 41, 42—46

11652. К теории движения физического маятника на корабле. Пантелеев В. Л., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1959, № 4, 41—53

11653. Классические нормальные формы в демпфированных линейных динамических системах. Кои (Classical normal modes in damped linear dynamic systems. Caughey T. K. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, № A-62, 3 pp., ill.) (англ.)

11654. Движение цапфы в подшипнике в области неустойчивости в окрестности положения равновесия центра этой цапфы. Тондл (The motion of a journal in a bearing in the unstable region of equilibrium position of the centre of the journal. Tondl Ales), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 5. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 95—107 (англ.)

Исходя из некоторых формул гидродинамической теории смазки, автор исследует качественно нелинейные дифференциальные уравнения движения цапфы в подшипнике около некоторого предполагаемого установившегося движения. S. Drobot

11655. Механизм движения линейного осциллятора при переходе через резонанс. Растригин Л. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1960, № 1, 169—171

11656. Влияние нелинейной характеристики демпфирования внутреннего трения на вынужденные колебания. Осинский (Wpływ nieliniowej charakterystyki tłumienia tarciem wewnętrznym na drgania wymuszone. Osiński Zbigniew), Rozpr. inż., 1959, **7**, № 1, 25—37 (польск.; рез. русск., англ.)

11657. О движении груза по пологой оболочке. Березовский А. А., Укр. матем. ж., 1960, **12**, № 1, 79—87

11658. Оптимальный фильтр четного порядка с монотонной функцией на выходе. Фукада (Optimum filters of even orders with monotonic response. Fukada Minoru), IRE Trans. Circuit Theory, 1959, **6**, № 3, 277—281 (англ.)

11659. Динамика генератора на плоскостном полупроводниковом триоде. Постников Л. В., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, **2**, № 5, 766—775

Методом точечных преобразований исследуются автоколебания генератора с контуром в цепи коллектора. Исследование проводится при пренебрежении инерционностью носителей заряда в триоде на основе кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик. Решен вопрос о существовании, единственности и устойчивости предельного цикла, дано разбиение наиболее интересной с точки зрения приложений части пространства на области различного качественного поведения системы.

Резюме автора

11660. Заметка о диффузии в одномерном случае. Парсонс (A note on one-dimensional diffusion. Parsons D. H.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 4, 449—450 (англ.)

11661. Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Вульфсон С. З., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1960, № 1, 162—165

Температурная задача для бетонного массива с учетом ползучести бетона исследована в различных постановках в работах Н. Х. Арутюняна (Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, 1952), А. Р. Ржаницына (Сб. исследования по строительной механике, Госстройиздат, 1954) и др. В настоящей статье решение дается на основании так называемого принципа Вольтерра, сформулированного и развитого Ю. Н. Работновым (Прикл. матем. и механ., 1948, **10**, № 1). Определяются предельные значения температурных напряжений для затухания функции последействия, имеющей особенность в момент загружения. В. В. Немыцкий

11662. Синтез некоторых оптимальных релейных систем методом фазового пространства. Павлов А. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 6, 118—126

Рассматриваются релейные системы регулирования, линейная часть которых имеет специальный вид (последовательное соединение двух интегрирующих и апериодического звеньев). Решается задача синтеза оптимальной системы на основе метода построения фазового пространства этой системы, предложенного А. А. Фельдбаумом (РЖМат, 1958, 7719). Задача формирования оптимального закона управления $\sigma = \varphi(x, \dot{x}, \ddot{x})$ для системы, содержащей три интегрирующих звена, преобразованиями приводится к исследованию системы

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = -\delta M + G(\tau), \qquad (1)$$

где $G(\tau)$ — известная функция задающего воздействия и возмущений, величина M определяется постоянными времени звеньев и абсолютным значением выходной координаты реле, символ δ определяет релейность управляющего воздействия ($\delta = \{1$ при $\sigma > 0$, 0 при $\sigma = 0$, -1 при $\sigma < 0\}$), x — ошибка. Линейная система имеет действительные характеристические числа, поэтому на основании теоремы об n интервалах (Фельдбаум А. А., Автоматика и телемеханика 1959, **14**, № 6) оптимальный по времени процесс содержит не более трех интервалов постоянства управляющего воздействия. Интегрированием системы (1) в фазовом пространстве $x, y = dx/dt$, $z = dy/dt$ (при допустимых возмущениях $G = G_0 = \text{const}$, $|G| < M$) в форме, исключающей время, автор выводит уравнения для определения координат точек переключения оптимального управляющего воздействия, на основании которых выясняется форма поверхности переключения. Обсуждается возможная структура вычислительного устройства, которое реализует предложенный закон переключения σ. Аналогичным образом исследуется система, на выходе которой вместо интегрирующего звена $T_\varphi \dot{\varphi} = -\gamma_1 + f_2(t)$ предыдущей задачи установлено звено $T_\varphi \dot{\varphi} + \varphi = -\gamma_1 + f_2(t)$. После преобразований система приводится к виду

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} + \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\delta M + G(\tau),$$

где x, δ, M и G имеют тот же смысл, что и в (1). Здесь при $G(\tau) = G_0 = \text{const} \neq 0$ определение координат точек переключения в явном виде затруднительно. Задача решается при $G_0 = 0$, причем дается формула, определяющая закон оптимального переключения σ, и обсуждается структура вычислительных устройств, обеспечивающих это переключение. Н. Н. Красовский

11663. Некоторые задачи теории динамического программирования. Ройтенберг Я. Н., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 4, 656—665

Рассматривается задача о выборе закона изменения управляющих сил, при помощи которых в нестационарной линейной системе обеспечивалось бы осуществление наперед заданного движения. Задача рассматривается как для систем непрерывного действия, так и для импульсных систем. Предполагая, что система непрерывного действия описывается дифференциальными уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = x_j(t) + q_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где y_k — обобщенные координаты системы, $x_j(t)$ — заданные внешние силы, $q_j(t)$ — добавочные внешние (управляющие) силы, f_{jk} — полиномы дифференцирования ($D = d/dt$), автор описывает процедуру вычисления $q_j(t)$ в виде ступенчатых функций, сохраняющих постоянные $q_j(t_l)$ значения на заданных интервалах времени $t_l < t < t_{l+1}$. Для определения величин $q_j(t_l)$ составляются линейные алгебраические уравнения, решение которых позволяет обеспечить совпадение точек заданного движения $\bar{r}_3(t)$ и движения $\bar{r}_c(t)$ системы (1) в моменты времени t_l (по всем или по части обобщенных координат системы). Эти уравнения получаются численным интегрированием формулы Коши для решения неоднородной системы (1) и коэффициенты их определяются функцией веса $W(t, \tau)$ из этой формулы. Рассматриваются случаи, когда число управляющих сил больше, равно или меньше числа согласуемых координат $q_j(t)$. Аналогичная процедура вычислений описывается и для импульсных систем, описываемых уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(T)\, y_{k_l} = x_j(t) + q_j(t), \qquad (2)$$

где T — оператор, определяемый соотношением

$$T^s y_k = y_k(t + st). \qquad (3$$

Здесь значения $q_j(t_l)$ управляющих сил вычисляются из линейных уравнений, коэффициенты которых также определяются функцией веса $W[t, \tau_l]$ из формулы, являющейся в случае (2) аналогом формулы Коши. Эта функция веса может быть вычислена решением системы разностных уравнений, сопряженной к первоначальной системе, что, как и в непрерывном случае, определяет метод реализации процедуры вычисления сил $q_j(t)$ на электронных вычислительных устройствах.

Н. Н. Красовский

11664. Оптимальное управление в одной нелинейной системе. Сун Цзянь, Автоматика и телемеханика 1960, **21**, № 1, 3—14 (рез. англ.)

Рассматриваются оптимальные по быстродействию переходные процессы в некоторых регулируемых системах специального вида. Преобразованием переменных задача сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений

$$dx_1/dt = x_2,\ dx_2/dt = \alpha x_3 x_4 - x_2 x_4^2,$$
$$dx_3/dt = -\beta_1 x_3 - \beta_1 u_1,\ dx_4/dt = -\beta_2 x_4 + \beta_2 u_2, \qquad (1$$

где управляющие величины u_1, u_2, стесненные ограничениями

$$|u_1| \leqslant 1,\ 0 < \lambda \leqslant u_2 \leqslant 1, \qquad (2$$

требуется подобрать так, чтобы перевести систему из состояния $x_l(0) = x_{l0}$ в заданное состояние $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \gamma$ $(0 < \lambda < \gamma < 1)$ за наименьшее время. В соответствии с принципом максимума (Понтрягин Л. С., Успехи матем. наук, 1959, **14**, вып. 1 (85)) автор составляет гамильтонову систему для вектора $\psi(t) = \{\psi_1, \ldots, \psi_4\}$, который определяет в данном случае оптимальное управление $u_l(t)$ из условий

$$u_1(t) = -\operatorname{sign} \psi_1(t)$$
$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi_4 > 0, \\ \lambda & \text{при } \psi_4 < 0. \end{cases} \qquad (3$$

Обсуждаются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости решений оптимальной задачи от начальных условий. Описывается построение устройства, позволяющего вычислить таблицу значений координат $\{x_1, \ldots, x_n\}$ точек переключения параметров u_1 и u_2. Принцип работы этого устройства сводится к моделированию процессов в исходной системе (1) и сопряженной системе $d\psi/dt = -\left[\frac{df}{dx}\right]^* \psi$ при изменении знаке времени t, что и позволяет при выборе начальных условий $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 3)$, $x_4 = \gamma$ при всех возможных $\psi_i(0)$ построить таблицу точек переключения. Обсуждается также возможность синтеза оптимальной системы на основе приближенного построения изохрон (поверхностей равного времени переходных процессов) при помощи автоматического оптимизатора. При дополнительных упрощениях для систем

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -u_2^2 x_2 - \alpha u_1 u_2$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_3 u_2 - x_2 u_2^2, \quad \frac{dx_3}{dt} = -\beta_1 x_3 - \beta_1 u_1$$

описывается аналитический способ построения оптимального управления u_1, u_2, основанный на возможности проследить в этих случаях характер изменения функции $\psi_i(t)$, а следовательно, и функций $u_i(t)$. Приведены графики некоторых конкретных оптимальных процессов.

Н. Н. Красовский

11665. Замечания к статье Ю. С. Соболева «Об абсолютной устойчивости некоторых регулируемых си

стем». **Алимов Ю. И.**, Автоматика и телемеханика, 1960, **21**, № 1, 143—144
См. РЖМат, 1960, 5326.

11666. Автоколебания при синхронном режиме в схеме генератор-приемная система за счет нечувствительности системы регулирования скорости агрегата. Ледянкин Д. П., Научн. докл. высш. школы. Энергетика, 1959, № 2, 59—65

11667. О получении оптимальных процессов в некоторых релейных системах регулирования. Воронков В. С., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1959, вып. 112, 39—49

11668. О вибрационном параметрическом регулировании. Хрущев С. Н., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 3, 522—524

Рассматривается линейная система регулирования, описываемая дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^{(n-i)} = 0, \qquad (1)$$

где a_i — постоянные коэффициенты ($a_0 = 1$) и φ — исследуемая переменная. Предполагается, что некоторые параметры системы допускают введение высокочастотных вибраций, вследствие чего коэффициенты уравнения (1) приобретают вид: $a_i + f_i(\omega t)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), где $f_i(\omega t)$ — сходящиеся тригонометрические ряды периода $2\pi/\omega$, с нулевым средним значением. Производя усреднение по явно содержащемуся времени t в дифференциальном уравнении с возмущенными коэффициентами и удерживая члены 1-го порядка относительно $1/\omega$, получим усредненное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i + \frac{A_i}{\omega}\right) \varphi_0^{(n-i)} = 0, \qquad (2)$$

где A_i — известные постоянные и φ_0 — основная компонента переменной φ. Уравнение (2) дает возможность, меняя частоту вибрации ω, добиться увеличения диапазона устойчивости исходной регулируемой системы. Уравнение (2) можно уточнить, вводя члены высшего порядка относительно $1/\omega$. Изложенные соображения применены также к регулированию нелинейных систем.

Б. П. Демидович

11669. Основы теории автоматического регулирования. Учебн. пособие. Вып. 1. Тимофеев В. А. Сев.-Зап. заочн. политехн. ин-т, Л., 1959, 140 стр., илл., 6 р. 15 к.

11670. Течение реакции гемоглобина с кислородом и углекислым газом с математической точки зрения. Струзик (Kinetyka reakcji hemoglobiny z tlenem i tlenkiem węgla w ujęciu matematycznym. Struzik T.), Zastosow. mat., 1959, **4**, № 4, 300—327 (польск.; рез. русск., англ.)

Автор решает методом симметрических составляющих систему дифференциальных уравнений, представляющую собой скорость реакции возникновения оксигемоглобина:

$$dz/dt = -\kappa_1' zx, \quad dm/dt = k_1' zx - k_2' mx,$$

$$dn/dt = k_2' mx - k_3' nx, \quad dp/dt = k_3' nx - k_4' px,$$

$$dq/dt = k_4' px, \quad dx/dt = -k_1' zx - k_2' mx - k_3' nx - k_4' px,$$

система дифференциальных уравнений получена на основании принципа Гульдберга и Ваага и теории промежуточных связей Адайра. Далее рассматриваются некоторые частные интегралы системы и приводятся практические методы нахождения насыщенности в функции времени. Показывается, что операторные методы можно применять для решения системы дифференциальных уравнений, представляющих течение реакции образования и одновременно распада оксигемоглобина, если насыщенность O_2 является практически постоянной, т. е. $[O_2] \geqslant [Hb + HbO_2]$. Если же этого упрощения применить нельзя, то система дифференциальных уравнений решается методом Рунге-Кутта. Приведены примеры применения выведенных методов для анализа опытов, опубликованных различными авторами.

Резюме автора

11671. Новый способ определения давления в жидкости. Багдоев А. Г., Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1959, **29**, № 4, 153—157 (рез. арм.)

Рассмотрена задача о распространении ударной волны по поверхности неоднородной сжимаемой жидкости. Первоначальное давление возникает в некоторой точке границы полупространства, занятого неоднородной сжимаемой жидкостью. Возмущенное движение предполагается малым и осесимметричным. Уравнение движения для давления $P(r, z, t)$ (r, z — цилиндрические координаты, t — время) берется в виде: $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{a^2(z)}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$, причем на границе имеют место следующие граничные условия:

$$P(r, 0, t) = \begin{cases} P_1(r, t), & r < R(t), \\ 0, & r > R(t), \end{cases}$$

где $R(t)$ — радиус фронта поверхности, $P_1(r, t)$ — давление за фронтом. Решение ищется в виде ряда по степеням k-параметра, характеризующего неоднородность жидкости: $P = P_0 + kP_1 + k^2P_2 + \ldots$ Полученная для определения $P_0, P_1, P_2, \ldots$ система уравнений решается с помощью изображений по Лапласу.

М. И. Гуревич

11672. Околозвуковые поля движения при обтекании симметричных крыловых профилей без угла атаки с числом Маха. I. Ночилла (Campi di moto transonici attorno a profili alari simmetrici, senza incidenza, con numero di Mach. I. Nocilla Silvio), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, **90**, № 1, 46—62 (итал.)

Указывается класс решений уравнения Томотика—Тамада, которые соответствуют звуковому обтеканию профилей. Этот класс аналогичен классу решений уравнения Чаплыгина, который референт (Уч. зап. Моск. гос. ун-та, 1951, **154**, № 4, 287) построил для той же цели; автор ссылается на эту работу. Ф. И. Франкль

11673. Поведение осесимметричной звуковой струи вблизи звуковой плоскости. Смит (The behaviour of an axially symmetric sonic jet near to the sonic plane. Smith M. G.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 3, 287—297 (англ.)

Рассматривается осесимметричное безвихревое истечение невязкого газа из круглого отверстия в пространство с меньшим давлением, причем в плоскости отверстия скорость газа постоянна и равна скорости звука. Исследуя особенность течения в окрестности плоскости отверстия (звуковой плоскости), автор записывает уравнения движения газа в полярной системе координат ξ, φ в меридиональной плоскости, помещая полюс системы координат на край отверстия, а полярную ось — в его плоскости. Искомые величины: $U, V, A = a/a^*$ и $\eta = \ln(\rho/\rho^*)$, где U — радиальная и V — трансверсальная составляющие скорости; a и a^* — местная и критическая скорости звука; ρ и ρ^* — местная и критическая плотности, раскладываются в ряды по степеням φ, а из системы уравнений движения для зависящих от ξ коэффициентов этих рядов получаются обыкновенные дифференциальные уравнения. Подробно исследуется такое уравнение для $\gamma_{12}(\xi)$ — коэффициента при φ^2 в разложении $\eta(\xi, \varphi)$, которое после замены: $(\gamma + 1)\gamma_{12} = -\xi^2 F(\xi)$ приводится к виду:

$$(1 - \xi)F'' - F' = 6(1 - \xi)F^2 \qquad (1)$$

с краевыми условиями: $\xi^2 F(\xi) \to 1$ при $\xi \to +0$; $F'|_{\xi=0} = 0$.

Автор указывает, что для плоской струи аналогичное уравнение имеет вид

$$F'' = 6F^2, \qquad (2)$$

и общее решение его выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Решение уравнения (1) не выражается через известные специальные функции, поэтому после замены: $\xi = 1 - \alpha x$, $\psi = \ln x$; $F(\xi) = \beta f(x)$, $(\alpha^2\beta = 1)$; $y = x^2 f(x)$; $\lambda = dy/d\psi$ оно приводится к виду

$$\lambda d\lambda/dy - 4\lambda + 4y - 6y^2 = 0 \qquad (3)$$

при условиях: $\lambda = 0$, $y = 0$; $(\psi - \psi_0)^2 y \to 1$ при $\psi \to \psi_0 = \ln \beta$. Исследование особых точек уравнения (3) в фазовой плоскости (λ, y) показывает, что единственное регулярное в точке (0, 0) решение (3) должно иметь вид

$$\lambda = 2y\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r y^r\right). \qquad (4)$$

Устанавливается, что радиус сходимости этого ряда не меньше 1/6, и исследуется также его поведение при $y \to \infty$. Значение $(\gamma + 1)\gamma_{12}$ рассчитывается численно с помощью ряда (4) и сравнивается с аналогичным решением уравнения (2) для случая плоской струи.

Примечание референта. Автор, очевидно, не знаком с работой Л. В. Овсянникова „Исследозание газовых течений с прямой звуковой линией". Дисс., Л., 1948, где, наряду с полным исследованием случая плоской струи, исследованы также пространственные и осесимметричные течения в окрестности звуковой плоскости и, в частности, получено уравнение (1).

И. Л. Кароль

11674. Обтекание замкнутого тела потоком с большой дозвуковой скоростью. Хеллиуэлл, Макки (The flow past a closed body in a high subsonic stream. Helliwell J. B., Mackie A. G.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 3, 298—313 (англ.)

В обычном околозвуковом приближении газовой динамики строится плоское симметричное течение газа вокруг профиля с двумя осями симметрии, передняя и задняя кромки которого клиновидны, т. е. граница профиля в их окрестности состоит из отрезков прямых линий, а остальная часть границы подбирается так, чтобы величина скорости потока на ней была постоянна и равна скорости звука. Вне профиля скорость потока везде дозвуковая и на бесконечности параллельна хорде профиля. Задача сводится к построению решения смешанной краевой задачи для системы уравнений околозвукового приближения:

$$\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u, \quad \partial x/\partial u = u\partial y/\partial v \qquad (1)$$

в полуполосе: $u > 0$; $0 < v < v_0$ плоскости годографа (u, v) (x, y — координаты, пропорциональные потенциалу скорости и функции тока соответственно) с краевыми условиями:

$$y|_{v=v_0} = 0,\ r > 0;\ y|_{r=0} = 0,\ 0 < v < v_0;\ y|_{v=0} = 0,$$
$$r > r_0; \qquad (2)$$

$x|_{v=0} = \text{const}$, $0 < r < r_0$; где $r = u^{3/2}/3$, r_0 задано и в точке $(r = r_0, v = 0)$, решение задачи должно иметь заданную особенность, соответствующую потоку на бесконечности в плоскости течения. С помощью семейства частных решений системы (1), содержащих бесселевы функции индекса 1/3, решение, имеющее эту особенность, выписывается в явном виде, а полное решение задачи ищется в виде:

$$y = r^{1/3}\int_0^\infty [A\sqrt{\lambda r_1}\, J_{5/6}(\lambda r_1) + F(\lambda)]\,\frac{\operatorname{sh}\lambda(v_0 - v)}{\operatorname{sh}\lambda v_0}\, J_{1/3}(\lambda r)\, d\lambda,$$

$$x = \left(\frac{3}{2}r^2\right)^{1/3} \times$$

$$\times\int_0^\infty [A\sqrt{\lambda r_1}\, J_{5/6}(\lambda r_1) + F(\lambda)]\,\frac{\operatorname{ch}\lambda(v_0 - v)}{\operatorname{sh}\lambda v_0}\, J_{-2/3}(\lambda r)\, d\lambda,$$

где $F(\lambda)$ — неизвестная функция, для определения которой из условий (2) получается система дуальных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \lambda F(\lambda) \operatorname{cth}\lambda v_0\, J_{1/3}(\lambda r)\, d\lambda =$$
$$= -A\sqrt{r_1}\int_0^\infty \lambda^{3/2}(\operatorname{cth}\lambda v_0 - 1) J_{5/6}(\lambda r_1)\, J_{1/3}(\lambda r)\, d\lambda,$$
$$(0 < r < r_1),$$
$$\int_0^\infty F(\lambda) J_{1/3}(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > r_1),$$

A — масштабная постоянная. Решение этой системы имеет вид:

$$F(\lambda) = \sqrt{\lambda r_1}\int_0^1 \alpha H(\alpha) J_{5/6}(\lambda r_1 \alpha)\, d\alpha,$$

$$H(\alpha) + \int_0^1 \lambda H(\lambda) K(\lambda, \alpha)\, d\lambda = -AK(1, \alpha), \qquad (3)$$

$$K(\lambda, \alpha) = \int_0^\infty \frac{t \exp(-tv_0/r_1)}{\operatorname{sh}(tv_0/r_1)} J_{5/6}(\alpha t) J_{5/6}(\lambda t)\, dt. \qquad (4)$$

Раскладывая $\operatorname{sh}^{-1}(tv_0/r_1)$ в (4) по степеням $\exp(-tv_0/r_1)$ и произведя несколько первых итераций интегрального уравнения (3), авторы получают решение задачи (1)—(2) в виде быстро сходящегося ряда и далее определяют геометрические характеристики получающихся профилей для ряда значений параметра r_1/v_0 от $r_1/v_0 = 0{,}1$ до $r_1/v_0 = 0{,}6$.

И. Л. Кароль

11675. Сопротивление круглого цилиндра, вызванное двумя рядами вихрей. Рой (Resistance on a circular cylinder due to any number of vortices lying in two rows. Roy Durga, Miss) Z. angew. Math. und Phys., 1959, **10**, № 5, 502—508 (англ.; рез. нем.)

Круглый цилиндр обтекается плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости. За цилиндром находятся две цепочки вихрей. Обе цепочки параллельны скорости набегающего потока и одинаково движутся параллельно этой скорости. Рассчитано сопротивление цилиндра в каждый момент времени.

М. И. Гуревич

11676. Стационарное течение вязкой жидкости. Воровович И. И., Юдович В. И., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 3, 542—545

Рассматривается задача об установившемся ламинарном течении вязкой жидкости в некоторой области Ω, которая заключается в определении вектора скорости $\mathbf{v}(x)$ $(x \in \Omega)$ по условиям

$$\nu\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (\nu, \rho > 0),$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}|_S = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{b}$ — заданные векторы. Вводится понятие обобщенного решения задачи и методами нелинейного функционального анализа доказывается существование по крайней мере одного обобщенного решения. Указаны достаточные условия единственности обобщенного решения. При дополнительных предположениях о гладкости границы S области Ω и вектор-функции $\mathbf{F}$ авторы устанавливают дифференциальные свойства решений и, в частности, показывают, что решение будет классическим. Последняя часть посвящена обоснованию сходимости метода Бубнова — Галеркина приближенного решения рассматриваемой задачи. При определенных предположениях дается оценка быстроты сходимости приближений Бубнова — Галеркина, основанная на теореме референта о достаточных условиях равносходимости метода Фурье и метода Бубнова — Галеркина (РЖМат, 1957, 3310 К) и на результатах И. Ю. Харик (Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 1).

М. А. Красносельский

11677. К вопросу об инфильтрации несжимаемой жидкости в пористую среду с переменной проницаемостью, внешнюю по отношению к бесконечному цилиндру. Василаке Серджиу, Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 475—487

Указанная в заглавии задача, рассматриваемая в условиях стационарного осесимметричного движения при переменной проницаемости $\mu = Ae^{-\beta r}$, описывается уравнением $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{r} - \beta\right)\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ при граничном условии: $p(z,r)|_{r=a} = f(z)$, где $f(z)$ — непрерывная функция, суммируемая на числовой оси. С помощью функции Грина построено решение, обращающееся в нуль на бесконечности, и показано, что при $a\beta > 1$ оно является единственным. М. Т. Нужин

11678. Теорема единственности, сингулярные решения и обобщения проблемы проникновения волн в жидкости. Розо (Résultats d'unicité, solutions singulières et généralisations d'un problème de diffusion d'ondes liquides. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 17, 1611—1613 (франц.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1960, 9006) автор провел редукцию задачи о линейных волнах около проницаемого берега к следующей краевой задаче:

$$\Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 \qquad (1)$$

внутри угла, ограниченного лучом $y = 0$, $x > 0$ и лучом OB, $y = -x\operatorname{tg}\xi$, $\pi > \xi > \pi/2$ (область T), с граничными условиями:

$$(\partial\varphi/\partial y) + i(\partial\varphi/\partial x) = 0 \text{ при } y = 0, \qquad (2)$$

$$\varphi = \tau \text{ на } OB, \qquad (3)$$

причем τ — постоянно. Утверждается единственность решения этой краевой задачи в классе ограниченных функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\lim \int_C \left|\frac{d\varphi}{dr}\right| ds = 0 \text{ при } r \to 0 \text{ или } r \to \infty, \qquad (4)$$

где C — дуга радиуса r, заключенная внутри угла T.

Используя свои известные интегральные представления, автор показывает, что, кроме единственного регулярного решения, краевая задача (1—3) имеет различные сингулярные решения, имеющие особенности либо в вершине угла, либо на бесконечности. В заключение статьи автор рассматривает различные обобщения краевой задачи (1 — 3). В частности, рассматривается случай, когда в условии (3) величина τ не является постоянным числом, а произвольным полиномом от r. Для доказательства единственности решения, кроме условия (4), автор требует ограниченности величин: $r^{-q}\varphi$, $r^{-q}\frac{d\varphi}{dr}$, где q — степень полинома. Н. Н. Моисеев

11679. Исследование решения второго порядка проблемы возбуждения цилиндрических волн плоским волнопродуктором. Фонтане (Etude de la solution du second ordre du problème de la génération d'une houle cylindrique par un batteur plan. Fontanet Pierre), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 16, 1450—1452 (франц.)

Проблема возбуждения волн волнопродуктором в канале бесконечной длины эквивалентна следующей краевой задаче: Определить функцию $\varphi(x,y,z,t)$, гармоническую по пространственным переменным внутри области, ограниченной плоскостями $S_1\{z=0\}$, $S_2\{y=+l/2\}$, $S_3\{y=-l/2\}$, $S_4\{x=0\}$ и неизвестной свободной границей $z=\xi(x,y,t)$ по следующим граничным условиям: $\partial\varphi/\partial n = 0$ на S_1, S_2 и S_3, $\partial\varphi/\partial n = \varepsilon\cos\omega t$ на S_4, $(\partial\varphi/\partial t) + g\xi + 1/2\,(\nabla\varphi)^2 = 0$ при $z = \xi$, $(d\xi/dt) = (\partial\varphi/\partial z)_{z=\xi}$, g — постоянное число (ускорение силы тяжести). На свободной границе заданы два условия, одно из которых служит для определения неизвестной функции $z = \xi(x,y,t)$. Ставится задача об определении периодического по t решения периода $2\pi/\omega$. В своей предыдущей статье (C. r. Acad. sci., 1959, 249, 1186) автор предложил метод построения формального решения этой задачи в виде рядов, расположенных по степеням ε. В указанной статье были выписаны приближения первого и второго порядков. Приближения второго порядка представляли из себя бесконечные ряды тригонометрических функций. Реферируемая статья посвящена анализу второго приближения. Оценивая различные слагаемые, автор выделяет „главные", которые позволяют качественно описать основные нелинейные эффекты. В заключение автор высказывает некоторые предположения о возможных особенностях точного решения. Н. Н. Моисеев

11680. Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. Черный Г. Г., Прикл. матем. и механ., 1960, 24, № 1, 121—125

11681. О некоторых магнитогидродинамических движениях цилиндрической вращающейся жидкой массы, представляющих интерес с точки зрения космогонии. Агостинелли (Su alcuni moti magneto idrodinamici in una massa fluida cilindrica rotante interessanti la Cosmogonia. Agostinelli Cataldo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, 90, № 2, 479—508 (итал.)

Исследуется система уравнений магнитной гидродинамики однородной несжимаемой вязкой жидкости, имеющей бесконечное протяжение в одном направлении, которое принимается за направление оси Oz. Предполагается, что составляющие вектора магнитной напряженности $\mathbf{H}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$ не зависят от координаты z. Получены три класса точных нестационарных решений, выражающихся через магнитную и гидродинамическую функции тока:

$$H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \qquad H_\varphi = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}, \qquad v_\varphi = -\frac{\partial w}{\partial r}.$$

Эти функции берутся в виде $v = -h_0 r^2/2 + \psi(r,\varphi,t)$, $w = -\omega r^2/2 + \alpha\psi$ (r,φ,t). Движение жидкой массы представляется, следовательно, наложением некоторого внутреннего движения на вращение массы, как твердого целого, со скоростью ω. К первому классу относятся решения, в которых ψ является гармонической функцией; ко второму классу те, в которых постоянная α связана с магнитной проницаемостью μ и плотностью ρ соотношением $\alpha = \mu/4\pi\rho$. Решения этого класса замечательны тем, что при исчезающе малой вязкости в них появляются вековые члены, т. е. оказывается возможным распадение жидкой массы вследствие резонанса. Решения третьего класса получаются в предположении $\Delta\psi = k\psi$. Все найденные решения могут интерпретироваться как движение вещества в спиральных туманностях. Н. А. Ростовцев

11682. О построении общего решения динамической задачи теории упругости для полупространства в случае осевой симметрии. Бородачев Н. М., Bul. Inst. politechn. Iași, 1958, 4, № 3-4, 85—88 (рез. англ., рум.)

Рассматривается осесимметричная задача о нестационарных колебаниях полупространства при нулевых начальных условиях. Общее решение строится путем последовательного применения преобразований Лапласа и Ханкеля (последнее — по переменной r). Указывается на возможность удовлетворения типичным граничным условиям. Утверждается, что указанный способ построения решения имеет преимущества по сравнению с известными методами контурного интегрирования и комплексных решений. В. А. Свекло

11683. Об исследовании точных решений нестационарных задач дифракции в окрестности волновых фронтов. Булдырев В. С., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 2, 291—294

Пусть плоская нестационарная волна или волна, возникшая от точечного источника, распространяется в двухслойной среде, разделенной на две части сферической или цилиндрической границей раздела. Предполагается, что функция u, описывающая волновое поле, удовлетворяет волновому уравнению $u_{tt}=a_1^2\Delta u$ внутри цилиндра (сферы) и $u_{tt}=a_2^2\Delta u$ вне цилиндра (сферы); причем на границе раздела выполняются обычные краевые условия.

Построим по законам геометрической оптики фронты отраженных и преломленных волн. Построим, кроме того, фронты, которые „доставляются" лучами, часть своего пути идущими по границе раздела (в точке „прихода" на границу и в точке „схода" с нее луч касается границы). Утверждается, что во всякой области, не содержащей волновых фронтов и границы раздела, функция u аналитична, как функция всех своих аргументов. В окрестности волновых фронтов, „доставленных" лучами, идущими по границе раздела, функция u (так же как и все ее производные) непрерывна, хотя аналитичность u на волновом фронте уже не имеет места.

Пусть $\gamma=0$ — уравнение волнового фронта, доставленного лучами, испытавшими конечное число преломлений и отражений, но нигде не совпадающими с границей раздела. Утверждается, что $u(x,y,t)$ в окрестности $\gamma=0$ будет иметь вид: $u=\gamma^{\beta-1}A(x,y,z,t)$ (предполагается, что рассматриваемый участок волнового фронта не имеет особых точек, A — аналитическая функция своих аргументов). Указывается способ построения коэффициентов разложения $A(x,y,z,t)$ в ряд по степеням γ. Доказательство этих предложений проводится с помощью построения точных решений описанных выше задач дифракции (в виде рядов по функциям Бесселя или полиномам Лежандра, коэффициенты которых выражаются с помощью интегралов типа Мелина). Подробные доказательства отсутствуют. В. М. Бабич

11684. О головной волне поверхностного типа. Зайцев Л. П., В сб.: Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн. 3. Л., Ленингр. ун-т, 1959, 378—383

Рассматривается среда, состоящая из двух полупространств и характеризующаяся одним волновым уравнением. В полупространстве с большей скоростью распространения упругих волн имеется источник типа центра расширения. Решение граничной задачи ищется в виде интегралов Фурье — Бесселя, в которых подынтегральная функция представляется интегралом Меллина. Для приближенного вычисления интегралов Меллина используется метод стационарной фазы. При деформации исходного контура в стационарный приходится делать дополнительные обходы по разрезам в плоскости комплексной переменной. Интегрирование в окрестности седловых точек дает в некотором приближении потенциал отраженной волны, интегрирование же по разрезам выделяет волну, характеризующуюся отсутствием разрывов даже в производных высокого порядка. Однако можно ввести понятие квазифронта волны как поверхности, на которой горизонтальная составляющая смещений имеет экстремальные значения. При удалении от границы раздела величина смещений на этой поверхности экспоненциально убывает, что дает основание называть выделенную волну волной поверхностного типа.

П. В. Крауклис

11685. Некоторые вопросы распространения волн в среде с релаксацией напряжений. Хайкович И. М. В сб.: Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн. 3. Л., Ленингр. ун-т, 1959, 320—337

Рассматривается распространение волн в среде, обобщающей модель идеально упругой среды учетом перегруппировки материальных точек, приводящей к релаксации напряжений и остаточных деформаций. Малые деформации среды $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy},\ldots$ связаны с упругими деформациями $e_x, e_{xy},\ldots$ формулами $\partial\varepsilon_x/\partial t=\partial e_x/\partial t+\left(e_x-\frac{1}{3}\theta\right)/T$; $\partial\varepsilon_{xy}/\partial t=\partial e_{xy}/\partial t+e_{xy}/T$, где $\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=e_x+e_y+e_z$, T — время релаксации, величины $e_x, e_{xy},\ldots$ связаны с напряжениями законом Гука. При $T\to\infty$ переходим к идеально упругой среде, при $T\to 0$ — к паскалевской жидкости. Для однородной и изотропной среды при больших значениях T рассматриваются нестационарные задачи распространения плоских волн в безграничной среде, а также граничные задачи Лэмба для полупространства и упругого слоя на релаксирующем полупространстве. Исследуется поглощение и дисперсия волн в рассматриваемых задачах.

А. С. Алексеев

11686. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. Флитман Л. М., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 4, 697—705

Рассматривается динамическое воздействие гладкого штампа на упругую полуплоскость. Задача решается путем применения одностороннего по t и двустороннего по x преобразования Лапласа. Вначале из условия равенства нулю касательного напряжения на всей границе выводится связь между трансформантами граничных значений нормального напряжения и вертикального перемещения и ставится задача (вспомогательная) для полубесконечного штампа. Для этой задачи с помощью приемов, указанных В. А. Фоком, из упомянутой выше связи определяются раздельно трансформанты граничных значений напряжения и перемещений в той части границы, где они не заданы, после чего вопрос сводится к построению оригиналов. Для решения первоначально поставленной задачи плоскость xt разбивается на части, в которых интересующие нормальные напряжения и смещения находятся последовательно с помощью построенного решения для полубесконечного штампа. В конце работы обсуждается вопрос о возможности решения задачи методом комплексных решений.

В. А. Свекло

11687. Применение комплексных переменных в плоской теории упругости. Риго (Utilisation de la variable complexe en élasticité plane. Rigaud M.), Ann. scient. Univ. Besançon. Méc. et phys. théor., 1958, № 2, 13—29 (франц.; рез. нем., англ., русск.)

Краткое изложение основ теории Колосова — Мусхелишвили. Г. С. Шапиро

11688. Теорема о среднем значении и ей обратная для смещений в теории упругости. Диас, Пейн (On a mean value theorem, and its converse, for the displacements in the theory of elasticity. Diaz J. B., Payne L. E.), Portug. math., 1959, 17, № 3-4, 123—126 (англ.)

С помощью классической теоремы Гаусса о среднем дается новый вывод полученной ранее авторами (Proc. III U. S. Congr. Appl. Mech., 1958, 293—303) теоремы, выражающей значения каждой из компонент смещения в центре упругой сферы через средние всех компонент смещения по поверхности сферы. Г. С. Шапиро

11689. Идея построения фундаментальных решений для анизотропных неоднородных тел. Калиский (On an idea of constructing basic solutions for anisotropic non-homogeneous bodies. Kaliski S.), Non-Homogenety in Elasticity and Plasticity. London—New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1959, 389—401. Discuss., 439 (англ.)

Рассматривается сначала случай однородной среды. Под фундаментальными решениями понимаются вектора смещения u_j, соответствующие сосредоточенным им-

пульсам, действующим в направлении осей x_j. Точка, где действует сосредоточенный импульс, окружается параллелепипедом, и фундаментальное решение находится в виде трехкратного ряда Фурье с коэффициентами, зависящими от t. Полученное таким образом фундаментальное решение будет совпадать с фундаментальным решением для неограниченного пространства (пока в рассматриваемую точку не придут волны, отраженные от граней параллелепипеда). В случае неоднородной анизотропной среды для искомого фундаментального решения получается интегро-дифференциальное уравнение, причем в случае „малой" неоднородности перед интегралом будет стоять малый параметр. Это интегро-дифференциальное уравнение автор надеется решить с помощью итераций. В одном частном случае автор утверждает, что сходимость итерационного процесса им доказана. Интегро-дифференциальное уравнение автор свел к интегральному, у которого ядро умножается на малый множитель.

Примечание референта. Утверждение автора, что к этому интегральному уравнению можно применять метод итераций, вызывает сомнение, так как ядро в этом случае не будет ядром Гильберта — Шмидта (как написано в работе), а будет обобщенной функцией (содержащей δ-функцию и ее производные).

В. М. Бабич

11690. О вычислении критических скоростей при движении груза по балке. Моргаевский А. Б., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 3, 176—179

Рассматривается задача о поперечных колебаниях балки, лежащей на упругом основании, при движении по ней сосредоточенного груза, перемещающегося с заданной постоянной скоростью v. Для решения применяется метод Фурье, причем сосредоточенная нагрузка трактуется как предельный случай нагрузки, распределенной на участке $(vt - \varepsilon/2,\ vt + \varepsilon/2)$, где $\varepsilon \to 0$. Коэффициенты разложения искомого прогиба балки в ряд по собственным функциям находятся из бесконечной алгебраической системы линейных уравнений. Определение критических значений скорости v приводится к отысканию нулей определителя рассматриваемой системы. В статье приводятся некоторые численные расчеты, результаты которых совпадают с данными, полученными с помощью других методов (Болотин В. В., Тр. Моск. ин-та, инж. ж.-д. трансп., 1950, вып. 74).

Н. Н. Лебедев

11691. Об одном подходе к эксцентрично нагруженной круговой мембране. Хике (Ein Beitrag zur exzentrisch belasteten Kreismembran. Hieke Max), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 5-6, 180—192 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается задача о колебаниях круговой мембраны под действием внезапно приложенной нагрузки, равномерно распределенной по площади эксцентрично расположенного круга, составляющего часть поверхности мембраны. Предлагается метод решения данной и родственной ей задач, основанный на суперпозиции решений неоднородного уравнения колебаний мембраны, соответствующих некоторому специальному выбору правой части этого уравнения.

Примечание референта. Решение задач рассматриваемого типа может быть легко найдено с помощью классических методов математической физики.

Н. Н. Лебедев

11692. К динамике круглой мембраны. Хике (Ein Beitrag zur Dynamik der Kreismembran. Hieke Max), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 12, 476—483 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Методом разрывного множителя Дирихле получено решение задачи о колебаниях закрепленной по контуру круглой мембраны, возникающих вследствие приложения давления, не изменяющегося с течением времени, и равномерно распределенного по площади кругового сегмента. Отсюда выводится решение для случая, когда давление равномерно распределено в полосе между двумя параллельными хордами, и для некоторых других случаев.

Н. А. Ростовцев

11693. Образование крутильных волн в круглом цилиндре. Джонс (The generation of torsional stress waves in a circular cylinder. Jones R. P. N.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 3, 325—336 (англ.)

Дано обобщение теории Похгаммера-Кри, учитывающее более сложные, чем в этой теории, виды крутильных колебаний, имеющих узловые поверхности. Для ряда относящихся сюда задач с начальными и граничными условиями выведены и исследованы общие формулы решений. В частности, дано полное решение задачи о распространении действия внезапно приложенного крутящего момента в форме касательных напряжений, действующих по окружности на поверхности цилиндра.

Н. А. Ростовцев

11694. Задача о распространении упруго-пластических волн в неоднородных стержнях. Пежина (The problem of propagation of elastic-plastic waves in a non-homogeneous bar. Perzyna P.), Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1959, 431—438. Discuss., 439 (англ.)

Исследуется влияние неоднородности общего вида (неоднородность относится как к упругим, так и к пластическим свойствам) на характер распространения волн. Предполагается, что изменение механических свойств материала вдоль стержня происходит непрерывно. Задача решается для полубесконечного стержня, на конце которого задано давление. Выведены уравнения движения как для процесса нагружения, так и для разгрузки. Отдельно изучен случай линейного упрочнения, для которого в квадратурах получено решение для деформаций и скоростей в упругой области. Для пластической области в случае нагрузки, монотонно возрастающей от нуля, автор рекомендует воспользоваться методом решения Х. А. Рахматулина (Прикл. матем. и механ., 1950, **14**, 65), а для исследования волны разгрузки — методом референта (Прикл. матем. и механ., 1946, **10**, 597).

Г. С. Шапиро

11695. Равновесие в магнитной гидродинамике. II. Устойчивость в вариационной формулировке. Волтьер (Hydromagnetic equilibrium. II. Stability in the variational formulation. Woltjer L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 6, 769—771 (англ.)

Обсуждаются общие идеи о применимости вариационных методов к проблеме равновесия и устойчивости в магнитной гидродинамике. Делаются поправки и замечания к предыдущей статье автора по этому вопросу (РЖМат, 1959, 9165).

Ю. Н. Днестровский

11696. Гидромагнитное равновесие. III. Осесимметричные несжимаемые среды. Волтьер (Hydromagnetic equilibrium. III. Axisymmetric incompressible media. Woltjer L.), Astrophys. J., 1959, **130**, № 2, 400—404 (англ.)

Уравнения для несжимаемой идеально проводящей жидкости при наличии аксиальной симметрии используются в виде, приданном им Чандрасекхаром (Chandrasekhar S., Proc. Nat. Acad. Sci., 1958, **44**, 842). Выражая магнитное поле и скорость в терминах скаляров P, T, U, V при помощи соотношений

$$\frac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} = -\tilde{\omega}\frac{\partial P}{\partial z}e_{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega}Te_{\varphi} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(\tilde{\omega}^2 P)e_z; \quad (1)$$

$$\boldsymbol{v} = -\tilde{\omega}\frac{\partial U}{\partial z}e_{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega}Te_{\varphi} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(\tilde{\omega}^2 U)e_z \quad (2)$$

уравнения магнитной гидродинамики записываем в следующем виде:

$$\widetilde{\omega}^3 (\partial P/\partial t) = [\widetilde{\omega}^2 U, \widetilde{\omega}^2 P], \quad (3)$$

$$\widetilde{\omega} (\partial T/\partial t) = [\widetilde{\omega}^2 U, T] + [V, \widetilde{\omega}^2 P], \quad (4)$$

$$\widetilde{\omega}^3 (\partial V/\partial t) = [\widetilde{\omega}^2 T, \widetilde{\omega}^2 P] + [\widetilde{\omega}^2 U, \widetilde{\omega}^2 V], \quad (5)$$

$$\widetilde{\omega} (\partial/\partial t) \Delta_5 U = [\Delta_5 P, \widetilde{\omega}^2 P] - [\Delta_5 U, \widetilde{\omega}^2 U] - [V, \widetilde{\omega}^2 V] - [\widetilde{\omega}^2 T, T], \quad (6)$$

где

$$[\varphi, \psi] = (\partial\varphi/\partial z)(\partial\psi/\partial\widetilde{\omega}) - (\partial\varphi/\partial\widetilde{\omega})(\partial\psi/\partial z); \quad (7)$$

$$\Delta_5 = (\partial^2/\partial\widetilde{\omega}^2) + (3/\widetilde{\omega})(\partial/\partial\widetilde{\omega}) + (\partial^2/\partial z^2).$$

Уравнения равновесия получаются из (3)—(6) при $\partial/\partial t = 0$. Найдены их формальное решение, определяемое четырьмя произвольными функциями F, G, M, N, зависящими от $\widetilde{\omega}^2 P$, причем скаляр P подчиняется уравнению

$$\Delta_5 P = F' \Delta_5 U - \widetilde{\omega}^2 TVF'' - \widetilde{\omega}^2 VG' - TN' + M. \quad (8)$$

В предположении, что среда ограничена твердыми стенками, на которых $P = T = U = 0$, найдено 5 интегралов уравнений (3)—(6). Равновесные конфигурации получаются также из условия минимума энергии по отношению к найденным интегралам. Вариационный подход приводит к тому же решению, которое было найдено непосредственно из уравнений (3)—(6). Полученное решение хотя и не имеет прямого приложения, но его, по мнению автора, полезно иметь в виду для сравнения как единственный пример точного решения задачи отыскания равновесных конфигураций, которую обычно невозможно довести до конца. Г. С. Голицын

11697. Гидромагнитное равновесие. IV. Сжимаемая среда с осевой симметрией. Волтьер (Hydromagnetic equilibrium. IV. Axisymmetric compressible media. Woltjer L.), Astrophys. J., 1959, 130, № 2, 405—413 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики для политропной сжимаемой среды с осевой симметрией. Введением новых функций дифференциальные уравнения преобразуются к системе шести уравнений с шестью неизвестными функциями, из которых выводятся некоторые заключения для различных частных случаев. Далее записываются несколько частных интегралов, выражающих постоянство вдоль трубки тока массы, скалярного произведения вектора скорости на вектор магнитного поля и некоторые другие законы сохранения. На основе полученных интегралов доказывается, что состояние равновесия может быть определено как состояние, при котором энергия имеет экстремальное значение. Д. Е. Долидзе

11698. Волна разгрузки в теле с переменным модулем разгрузки. Калиский, Осецкий (The unloading wave in a body with variable unloading modulus. Kaliski S., Osiecki J.), Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1959, 403—413. Discuss., 439 (англ.)

Исследуется распространение волн в стержне в предположении, что нагрузка происходит по упругому закону, при постоянном модуле упругости, а модуль разгрузки переменный и растет с увеличением напряжений. (Решение для области разгрузки ищется обратным методом, путем задания формы волны разгрузки). Путем использования метода Римана и итеративного метода получено приближенное решение. Точное решение обратной задачи для волны разгрузки удается получить лишь при некоторых дополнительных предположениях.

Г. С. Шапиро

11699. Математическое обоснование теории пластин (плоская задача теории упругости). Моргенштерн (Mathematische Begründung der Scheibentheorie (zweidimensionale Elastizitätstheorie). Morgenstern Dietrich), Arch. Ration. Mech. and Analysis., 1959, 3, № 1, 91—96 (нем.)

Рассматривается задача о безызгибной деформации тонкой пластины толщиной h, срединная поверхность которой ограничена контуром G. Торцы пластины свободны от напряжений, а граничные условия на боковой поверхности постоянны по высоте. Используя принцип минимума потенциальной энергии, автор показывает, что осредненные по толщине перемещения, отвечающие точному решению задачи, при $h \to 0$ сходятся по энергии к соответствующим величинам, являющимся решением задачи о плоском напряженном состоянии в области, ограниченной контуром G при аналогичных краевых условиях. В. Я. Павилайнен

11700. Задача о волнах напряжений в бесконечной упругой пластинке. Бруберг (A problem on stress waves in an infinite elastic plate. Broberg K. B. Kgl. tekn. högskol. handl., 1959, № 139, 27 pp., ill.) (англ.)

Изучается распределение упругих волн напряжений в бесконечной пластинке, возбужденных импульсивной касательной нагрузкой, приложенной в точке верхней плоскости. Результаты теоретических выкладок сравниваются с полученными экспериментально. Исходя из дифференциального уравнения движения теории упругости $\partial^2 s/\partial\tau^2 = \operatorname{grad}\operatorname{div} s - k^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} s$ (s — вектор, пропорциональный перемещению, τ — время, k — отношение скорости распространения волн вращения и расширения), автор сводит задачу к нахождению двух функций Φ и Ψ, связанных с дивергенцией и ротором вектора перемещения, из уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Phi = p^2\Phi, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Psi - \frac{\Psi}{\rho^2} = \frac{p^2}{k^2}\Psi$$

(ρ и ζ — безразмерные цилиндрические координаты, p — некоторый параметр). Указываются решения этих уравнений при соответствующих задаче граничных условиях. На основании полученных выражений составляется решение для бесконечной плиты, нагруженной равномерно импульсами вдоль прямой линии, разделяющей верхнюю плоскость на две части. К. В. Соляник-Красса

11701. Об энергетическом методе в теории гибких пластин. Забавников Б. И., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 108, 308—326

Пластина предполагается заделанной по части контура L_1, свободно опертой по L_2 и свободной на L_3. Дифференциальные уравнения Кармана записываются в виде $D\Delta\Delta w - hA(w, \varphi) = q$, $\Delta\Delta\varphi = -\frac{1}{2}EA(w, w)$, причем $A(a, b) = a_{xx}b_{xx} + a_{yy}b_{yy} - 2a_{xy}b_{xy}$. Краевые условия будут:

$w = 0$, $\partial w/\partial n = 0$, $\varphi = f_1(s)$, $\partial\varphi/\partial n = f_2(s)$ на L_1,

$w = 0$, $M_n = 0$, $\varphi = f_1(s)$, $\partial\varphi/\partial n = f_2(s)$ на L_2,

$Q_n = 0$, $M_n = 0$, $\varphi = f_1(s)$, $\partial\varphi/\partial n = 0$ на L_3.

Доказывается, что если функционал

$$\Phi(w, \varphi) = \iint [D\Delta\Delta w - hA(w, \varphi) - 2q]\, w\,dx\,dy - \frac{h}{E}\iint \varphi\Delta\Delta\varphi\,dx\,dy$$

принимает наименьшее значение, то функции w и φ будут решениями указанной краевой задачи; имеет место также обратное предложение. А. И. Лурье

11702. Об одной автомодельной динамической задаче для конической оболочки. Герасимов И. С., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 5, 989—991

Выведено уравнение осесимметричного движения (обыкновенное дифференциальное уравнение 6-го порядка) круглой упругой конической оболочки под действием подвижной нагрузки (постоянное давление, нормальное

к поверхности конуса), распространяющейся с постоянной скоростью вдоль оси оболочки. Толщина оболочки возрастает по линейному закону при удалении от вершины. Г. С. Шапиро

11703. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Арутюнян Н. Х., Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери серия, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, 12, № 2, 77—105 (рез. арм.)

В качестве исходной решается задача о полуплоскости под действием нормальной к ее границе сосредоточенной силы. На основе этого решения плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала сведена к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром $K(t, x) = |t - x|^{\mu-1}$. Решение этого уравнения получено в замкнутом виде методом М. Г. Крейна (РЖМат, 1956, 1410). Для иллюстрации рассмотрена контактная задача о вдавливании плоского жесткого штампа в полуплоскость под действием сосредоточенной силы или момента, приложенных в середине штампа. Г. С. Шапиро

11704. Напряжение и деформация в бесконечной полосе, обусловленные линейной дислокацией. Кроупа Ф. (Napětí a deformace v nekonečném pásu, způsobené hranovou dislokací. Kroupa František), Aplikace mat., 1959, 4, № 5, 239—254 (чешск.; рез. русск., англ.)

Изучается задача определения напряжений и деформаций, обусловленных линейной дислокацией и вектором Бургерса (Burgers). Предполагается, что линии дислокации перпендикулярны к плоскости полосы и что направление вектора Бургерса совпадает с направлением оси полосы. Решение проводится при помощи интеграла Фурье. Выражения для напряжений и деформаций получены в явном виде, причем общий прогиб полосы, обусловленный дислокацией, дается очень простой формулой. I. Babuška

11705. Физические основания математической теории пластичности. Мандель (Bases physiques des théories mathématiques de la plasticité. Mandel J.), Cahier Groupe franç. études rhéol., 1959, 4, № 2, 17—46 (франц.)

11706. О рассеянии звука вблизи критического состояния. Адхамов А., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1958, 18, 52—58

Уравнение малых колебаний для квазипотенциала φ скорости звука имеет вид:

$$(\partial^2\varphi/\partial t^2) - c^2\Delta\varphi + \beta\nabla\rho\nabla\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\rho\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $\mathbf{u}$ — скорость звука, ρ — плотность жидкости, p — давление, T — температура, c_V — теплоемкость,

$$c^2 = (\partial p/\partial\rho)^2 + T(\partial p/\partial T)/\rho^2 c_V,$$

$$\beta = T(\partial p/\partial T)/\rho^3 c_V = c^2_{\text{кр}}/\rho,$$

$c_{\text{кр}}$ — скорость звука в критической точке. Пусть $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, где $\delta\rho$ — флюктуация плотности. Если $\varphi = \varphi_0 + \psi$, где $\varphi_0 = A\exp i(\omega t - k(\mathbf{n}_0\mathbf{x}))$ — падающая волна, ψ — малая рассеянная волна, то в первом приближении из (1) получаем

$$\ddot{\psi} - c_0^2\Delta\psi = \left(\partial c_0^2/\partial\rho\right)\delta\rho\,\Delta\varphi_0 - \beta\nabla\delta\rho\nabla\varphi_0, \qquad (2)$$

$$c^2 = c_0^2 + \left(\partial c_0^2/\partial\rho\right)\delta\rho.$$

Для амплитуды B рассеянной волны ψ на больших расстояниях отсюда вытекает формула:

$$B = -\frac{A}{4\pi c_0^2}\left(k^2\frac{\partial c_0^2}{\partial\rho} - kK_x\beta\right)\int\delta\rho\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{x}}\,dv, \qquad (3)$$

где $\mathbf{K} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$, $K = 2k\sin\vartheta/2$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении рассеянной волны, $\cos\vartheta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0$. С помощью статистических соображений подсчитывается величина интеграла в (3). В результате для средней амплитуды рассеянной волны получается формула:

$$|B|^2 = \left(A^2K^4V\rho kT/16\pi^2c_0^4\right)\left(\left(\partial c_0^2/\partial\rho\right) - 2\beta\sin^2(\vartheta/2)\right)/\left((\partial p/\partial\rho) + 4k^2f\sin^2(\vartheta/2)\right),$$

где f — некоторая положительная величина, определяемая корреляциями флюктуаций плотности в различных точках пространства. Ю. Н. Днестровский

11707. Распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве. Хаскинд М. Д., Акуст. ж., 1959, 5, № 4, 464—471

В полупространстве $z \leqslant 0$ рассматривается волновое поле $\varphi(x, y, z)e^{i\omega t}$. Функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s = V_n,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi\right|_{z=0} = 0\ (\nu = \nu_r + i\nu_i), \qquad (2)$$

где V_n — заданная функция точек поверхности s, излучающей и рассеивающей волны, ν — заданный комплексный параметр. Вводится вспомогательная функция f, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta f + k^2 f = 0 \qquad (3)$$

и связанная с функцией φ соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = f. \qquad (4)$$

Автор ставит задачу определения функции φ по найденной функции f. Для этого используется уравнение

$$\frac{\partial^2(\varphi - f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi - f)}{\partial y^2} + \mu^2(\varphi - f) = -\nu\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right), \qquad (5)$$

вытекающее из (1), (3) и (4). Здесь $\mu^2 = k^2 + \nu^2$, причем μ выбирается следующим образом:

$$\mu = \begin{cases} \mu_r + i\mu_i \text{ при } \nu_i\nu_r > 0, \\ \mu_r - i\mu_i \text{ при } \nu_i\nu_r < 0, \end{cases}$$

где $\mu_r = |\mu|\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mu_i = |\mu|\sin\frac{\alpha}{2}$, $e^{i\alpha} = \frac{1}{|\mu|^2}(k^2 + \nu_r^2 - \nu_i^2 + i2|\nu_i\nu_r|)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$. В двумерном случае из уравнения (5) и условия ограниченности на бесконечности получаем следующее выражение для функции φ:

$$\varphi = f - \frac{\nu}{2\mu i}\left[e^{i\mu y}\int_{-\infty}^{y} e^{-i\mu y}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right)dy - e^{-i\mu y}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\infty}^{y} e^{i\mu y}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right)dy\right] \qquad (6)$$

при $\operatorname{Im}\mu > 0$,

$$\varphi = f - \frac{\nu}{2\mu i}\left[e^{i\mu y}\int_{\infty}^{y} e^{-i\mu\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right)dy - e^{-i\mu\nu}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{y} e^{i\mu\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \nu f\right)dy\right] \qquad (7)$$

при $\operatorname{Im}\mu < 0$.

В случае $\mu = 0$ исследуется асимптотика решения (7) при $y \to \pm\infty$. Аналогично рассматривается трехмерный случай. В конце работы приводятся примеры, иллюстрирующие предложенный метод. Д. П. Костомаров

11708. Дифракция поля диполя на полуплоскости с проводимостью в одном направлении. Радлоу (Diffraction of a dipole field by a unidirectionally conducting semiinfinite screen. Radlow James), Quart. Appl. Math., 1959, 17, № 2, 113—127 (англ.)

Исследование поставленной задачи проводится с помощью двустороннего преобразования Лапласа. Результаты работы сформулированы в теореме:

Пусть поле диполя $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$ с вектором Герца $(0, 0, \Pi_z)$ $\Pi_z = e^{-ikR}/R$ падает на экран $x \geqslant 0$, $-\infty < y < \infty$, $z = 0$, который обладает бесконечной проводимостью в направлении ξ: $\xi = x\cos\alpha_0 - y\sin\alpha_0$ $(0 < \alpha_0 < \pi/2)$ и является идеальным изолятором в перпендикулярном направлении $\eta_1 : \eta_1 = x\sin\alpha_0 + y\cos\alpha_0$. Пусть далее электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, условиям излучения на бесконечности, граничным условиям на экране: $e_\xi = 0$, $[h_\xi] = 0$, $[e^*_{\eta_1}] = 0$, условиям интегрируемости, и $[h_{\eta_1}] = 0$ на ребре экрана. Тогда полное поле $\mathbf{E} = \mathbf{e} + e_0$, и $\mathbf{H} = \mathbf{h} + h_0$ в компонентах по осям ξ, η_1, z дается формулами

$$\mathbf{E} = \left\{\Phi_{\xi z_0} + \Psi^{(1)},\ \Phi_{\eta_1 z_0} + \Psi^{(2)},\ \Phi_{z z_0} + k^2\Pi_z + \Psi^{(3)}\right\},$$

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\left\{\frac{\partial\Pi_z}{\partial\eta};\ \frac{\partial\Pi_z}{\partial\xi} + b^{(\eta)};\ b^{(z)}\right\},$$

где

$$\Phi = I_R - I_S,\quad I_R = \frac{i}{2}\int_{-\mu_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR\operatorname{ch}\mu)\,d\mu,$$

$$I_S = \frac{i}{2}\int_{-\mu_S}^{\infty} H_1^{(2)}(kS\operatorname{ch}\mu)\,d\mu,$$

$$R = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2},$$

$$S = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2]^{1/2},$$

$$\mu_R = \operatorname{arsh}\left\{\frac{2}{R}\sqrt{r r_0}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right\},$$

$$\mu_S = \operatorname{arsh}\left\{\frac{2}{S}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right\},\quad x = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi,$$

$$x_0 = r_0\cos\varphi_0,\quad z_0 = r_0\sin\varphi_0.$$

Функции $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\Psi^{(3)}$ определяются выражениями

$$\Psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\pi i k\cos\alpha_0\sin\frac{\varphi_0}{2}e^{-ik\xi_0}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{-\infty}^{\xi}\frac{r+r_0'}{(r_0')^{1/2}}\frac{H_1^{(2)}(k\rho')}{\rho'}e^{ik\xi_0'}\,d\xi_0'\right\},$$

$$\Psi^{(2)} = e^{-ik\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{ik\xi'}\left.\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\eta}\right|_{\xi=\xi'} d\xi',$$

$$\Psi^{(3)} = e^{-ik\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{ik\xi'}\left.\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z}\right|_{\xi=\xi'} d\xi',$$

где $\rho = [(y-y_0)^2 + (r+r_0)^2]^{1/2}$. Для функций $b^{(\eta)}$ и $b^{(z)}$ справедливы формулы:

$$b^{(\eta_1)} = \int_{-\infty}^{\xi}\left(F_{zz_0} + \Psi^{(3)}\right)\Big|_{\xi=\xi'} d\xi',$$

$$b^{(z)} = -\int_{-\infty}^{\xi}\left(F_{\eta_1 z_0} + \Psi^{(2)}\right)\Big|_{\xi=\xi'} d\xi',\quad F = -\Pi_z + \Phi.$$

Некоторые из компонент полей сингулярны на ребре экрана и имеют особенности порядка $O(1/\sqrt{r})$.

Ю. Н. Днестровский

11709. О решении некоторых аксиально-симметричных граничных задач с помощью интегральных уравнений. Некоторые электростатические и гидродинамические задачи для сферической шляпки. Коллинс (On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations. I. Some electrostatic and hydrodynamic problems for a spherical cap. Collins W. D.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, 12, № 2, 232—241 (англ.)

Ищется решение задачи Дирихле для трехмерного пространства, если граничные условия заданы на поверхности сферической шляпки. Под сферической шляпкой понимается часть сферы $r = a$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$. Потенциал $V(r, \vartheta)$ на поверхности шляпки равен заданной непрерывной функции $f(\vartheta)$ и убывает на больших расстояниях как $1/r$. Функция $V(r, \vartheta)$ ищется в виде

$$V(r,\vartheta) = a/2\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\eta_1)\ \frac{\sec\eta_1/2}{R(\eta,\vartheta)}\,d\eta \qquad (1)$$

где $g(\eta_1) = g(-\eta_1)$, $R(\eta_1, \vartheta) = (r^2 e^{i\eta} + a^2 e^{i\eta} - 2ar\cos\vartheta)^{1/2}$, причем

$$R(\eta,\vartheta) = \begin{cases} \rho e^{i\tau\frac{1}{2}},\ r \geqslant a,\ \rho \geqslant 0, \\ \rho e^{-i\tau\frac{1}{2}},\ r < a,\ \rho \geqslant 0 \end{cases} \begin{array}{l} 0 \leqslant \tau \leqslant \pi \text{ для } 0 \leqslant \eta \leqslant \alpha, \\ -\pi \leqslant \tau \leqslant 0 \text{ для } -\alpha \leqslant \eta \leqslant 0. \end{array}$$

Доказывается, что функция $V(r, \vartheta)$, определенная формулой (1), непрерывна всюду, включая поверхность шляпки. Граничное условие приводит к интегральному уравнению Вольтерра первого рода относительно функции $g(\eta_1)$

$$\int_0^s \frac{G(t)\,dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} = \frac{F(s)}{\sqrt{1+s^2}}\left(0 < s < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (2)$$

где $g(\eta_1) = G\left(\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\right)$, $f(\vartheta) = F\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)$. Уравнение (2) рассматривалось ранее в работах других авторов. Его решение имеет вид:

$$G(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^s \frac{sF(s)\,ds}{[(t^2 - s^2)(1+s^2)]^{1/2}}\left(0 < t < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Рассматриваются два частных случая: 1) сферическая шляпка постоянного потенциала U, 2) сферическая шляпка во внешнем однородном поле. В первом случае решение имеет вид: $V(r, \vartheta) = \frac{U}{\pi r}(r\gamma + a\gamma')$, где $\frac{\sin\gamma}{a} = \frac{\sin\gamma'}{r} = \frac{2\sin\alpha}{r_1 + r_2}$, $r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\alpha - \vartheta)$, $r_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\alpha + \vartheta)$. В последующей части работы изложенный метод применяется для нахождения функции потока идеальной жидкости в присутствии сферической шляпки. Ю. Н. Днестровский

11710. Расчет собственных частот *TE* колебаний тороидальных и П-образных резонаторов. Патрушев В. Л., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, 2, № 2, 223—228

Для расчета собственных частот тороидальных и П-образных резонаторов используются криволинейные координаты ξ и η_1, введенные автором в предыдущих работах. Вариационный функционал для колебаний типа *TE* имеет вид:

$$I(E)=\iint_D r\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial E}{\partial \eta}\right)^2-\left(k^2-\frac{1}{r^2}\right)h_0^2E^2\right]d\xi\,d\eta, \quad (1)$$

где $h_0(\xi,\eta)$ — коэффициент Ляме, $r=r(\xi,\eta)$ — радиальная координата. Допустимые функции в функционале $I(E)$ должны удовлетворять нулевому граничному условию на поверхности резонатора $\eta=0$, $\eta=\eta_0$ и $\xi=0$, $\xi=1$. Функции $E(\xi,\eta)$ ищутся в виде

$$E=\sum_{j,k}a_{jk}\sin\left(j\pi\frac{\int_0^\eta h_0d\eta}{\int_0^{\eta_0}h_0d\eta}\right)\sin\left(k\pi\frac{\int_0^\xi h_0d\xi}{\int_0^1 h_0d\xi}\right)=$$
$$=\sum a_m\varphi_m. \quad (2)$$

Система уравнений $\partial I/\partial a_s=0$ $(s=0,1,2,\ldots)$ является линейной однородной системой относительно a_m. Равенство нулю ее определителя приводит к алгебраическому уравнению относительно k — приближенному значению собственной частоты резонатора. Подсчитываются основные собственные частоты П-образного и тороидального резонаторов. При этом в сумме (2) оставляется один член. Указывается, что даже такое грубое приближение дает точность порядка $1\div2\%$. Ю. Н. Днестровский

11711. О функции магнитного потока в трехмерном поле. Скобелкин В. И., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 2, 280—283

Для описания магнитного поля в присутствии ферромагнетиков необходимо ввести две скалярные функции потока ψ и ϑ, причем $\mathbf{B}=\nabla\psi\times\nabla\vartheta$. Строится выражение для лагранжиана в виде $L=u+w$, где $u=-\int\mathbf{R}$, $\mathbf{R}=\frac{1}{2c}(\psi\nabla\vartheta-\vartheta\nabla\psi)$, $w=\int_0^{B^2}\mathbf{H}d\mathbf{B}$. Доказывается справедливость следующего вариационного принципа: среди всех возможных соленоидальных полей магнитной индукции при выполнении заданных граничных условий для действительного поля замкнутой магнитостатической системы интеграл по пространству $E=\int_\Omega Ld\omega$ принимает наименьшее значение. Уравнения Эйлера — Остроградского при этом имеют вид: $\left(1/4\pi\right)\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}j\Big)\nabla\vartheta=0$, $\left(-\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}+\frac{1}{c}j\right)\nabla\psi=0$, при естественных граничных условиях на поверхностях разрыва магнитных проницаемостей или токов: $[\nabla\vartheta\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,|_S=0$, $[\nabla\psi\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,|_S=0$, где значок $[A]\,|_S$ означает скачок величины A на поверхности S. Доказывается существование функции Вейерштрасса у рассматриваемой вариационной задачи и единственность поля $\mathbf{H}$. Ю. Н. Днестровский

11712. Расчет полей. Элементарные решения, связанные с функцией потока через круг с центром на оси Oz. Аналитические выражения для индукции и ее производных на оси Oz. Готье, Лоде (Calcul des champs. Solutions élémentaires associées à la fonction flux à travers un cercle d'axe Oz. Expressions analytiques de l'induction et de ses dérivées sur Oz. Gautier Pierre, Laudet Michel), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 19, 2737—2739 (франц.)

Пусть известен поток $\Phi(a,z)$ магнитного поля $\mathbf{B}$ через круг радиуса a с центром на оси Oz. Разложим $\Phi(a,z)$ в интеграл Фурье:

$$\Phi(a,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-iuz}du. \quad (1)$$

Нетрудно показать, что для компоненты B_z магнитного поля на оси Oz справедлива формула

$$B_z(0,z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ug(u)}{aI_1(au)}e^{-iuz}du. \quad (2)$$

Обсуждается вопрос о практическом подсчете $B_z(0,z)$ по замеряемым значениям потока $\Phi(a,z)$. Если $\Phi_1,\ldots,\Phi_k,\ldots$ — измеренные значения потока через промежутки $\Delta z=l$, то $B_z(0,z)\cong\sum_k\Phi_kb(z_k-z)$, где $b(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u}{aI_1(au)}\frac{\sin ul/2}{ul/2}e^{iu\xi}du$. Элементарное решение $b(\xi)$ универсально и подсчитывается один раз.

Ю. Н. Днестровский

11713. Электромагнитная индукция в плоскости с местной переменной проводимостью. I. Фолланд (Elektromagnetische Induktion in Ebenen mit örtlich variabler Leitfähigkeit. Teil I. Volland H.), Gerlands Beitr. Geophys., 1959, 68, № 2, 110—122 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается следующая задача: одномерный горизонтальный электрический ток в ионосфере перемещается с заданной скоростью в направлении, перпендикулярном току. В глубине земли имеется проводящая плоскость с заданным законом проводимости

$$\sigma_l(x)=\sigma_0(q^2/(x^2+q^2)),$$

где σ_0 — константа, q — параметр, x — координата, параллельная поверхности земли. Определяется магнитное поле электрического тока, индуцированного в проводящей плоскости. Задача сводится к уравнению Лапласа для магнитных потенциалов с весьма сложными граничными условиями. Решения построены в виде рядов. Приводятся результаты численных просчетов ряда примеров. Ю. Н. Днестровский

11714. Диффузия ионов в слое F_2. Глиддон (Diffusion of ions in a static F_2 region. Gliddon J. E. C.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, 12, № 3, 340—346 (англ.)

Исследуется диффузия ионов в ионосфере. Процесс описывается уравнением вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=q-KN+D\left(\frac{\partial^2N}{\partial z^2}+\frac{3}{2H}\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{N}{2H^2}\right). \quad (1)$$

Для коэффициента диффузии D, коэффициента уничтожения K и плотности источников q принимаются следующие выражения:

$$D=\frac{b}{n}=\frac{b}{n_0\exp(-(z_0-z)/H)},$$

$$K=\frac{\beta}{k}\exp\left(-\frac{z-z_0}{H}\right),$$

$$q=\begin{cases}q_0\exp\left[1-((z-z_0)/H)-\operatorname{cosec}\varphi\exp(-(z-z_0)/H)\right], \\ 0<\varphi<\pi,\\ 0,\quad \pi<\varphi<2\pi,\end{cases}$$

здесь b, β, H, q_0 — постоянные, n — плотность нейтральных молекул, t — время в секундах, φ — время в радианах, отсчитываемое от восхода солнца, $k=t/\varphi=1{,}37\cdot10^4$. Уравнение (1) с помощью замены переменных

$$t=k\varphi,\quad x=2(\beta\gamma)^{1/4}e^{-(z-z_0)/2H},$$

$$N=e^{-(z-z_0)/2H}v,\quad \gamma=n_0H^2/kb$$

преобразуется к виду

$$(\partial^2v/\partial x^2)-(\gamma/\beta)^{1/2}(\partial v/\partial\varphi)-x^2v/4=w(x,\varphi). \quad (2)$$

где

$$w(x, \varphi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} kq_0\gamma^{1/4} \beta^{-3/4} x \exp\left\{1 - x^2 \frac{\operatorname{cosec}\varphi}{4(\beta\gamma)^{1/4}}\right\}, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Автор ищет решение уравнения (2), периодическое по φ с периодом 2π и равное нулю при $x = 0$ и $x = 2\pi$. Функции $v(x, \varphi)$ и $w(x, \varphi)$ представляются в виде:

$$v(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n+1}(\varphi) D_{2n+1}(x), \quad w(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1}(\varphi) D_{2n+1}(x), \tag{3}$$

где $D_n(x) = 2^{-n/2} e^{-x^2/4} H_n(x/\sqrt{2})$, $H_n(x)$ — полиномы Эрмита,

$$g_{2n+1}(\varphi) = 1/\sqrt{2\pi}(2n+1)! \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, \varphi) D_{2n+1}(x)\, dx. \tag{4}$$

Коэффициенты $f_{2n+1}(\varphi)$ определяются, как периодические решения уравнений

$$f'_{2n+1} + \left(2n + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/2} f_{2n+1} = -g_{2n+1}(\varphi), \tag{5}$$

которые получаются при подстановке (3) и (4) в (2). Устанавливается сходимость ряда (3). Доказывается единственность решения поставленной задачи.

Примечание референта. Ряд формул в работе написан небрежно, без учета того факта, что функция q в течение половины периода тождественно равна нулю. Д. П. Костомаров

11715. Применение функции Грина к решению задачи о диффузии в ионосфере. Глиддон (Use of Green's function in the solution of ionospheric diffusion problems. Gliddon J. E. C.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 3, 347—353 (англ.)

Процесс диффузии ионов в ионосфере описывается уравнением, которое заменой переменных может быть приведено к виду

$$(\partial^2 v/\partial\zeta^2) - 4\gamma(\partial v/\partial\varphi) - 4\gamma k K v = -4\gamma k \zeta^{-1} q, \tag{1}$$

(реф. 11714), здесь γ, k — постоянные, q — плотность источников ионов:

$$q = \begin{cases} q_0 \zeta^2 e^{1-\zeta^2 \operatorname{cosec}\varphi}, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

$K = K(\zeta)$ — коэффициент уничтожения. Задача состоит в построении решения, периодического по φ с периодом 2π и равного нулю при $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. В настоящей заметке эта задача решается методом функции Грина для двух случаев: $K = \text{const}$ и $K = \frac{\beta}{k}\zeta^2$. В первом случае уравнение (1) заменой неизвестной функции $v = ue^{-kK\varphi}$ сводится к уравнению теплопроводности. Функция Грина для этого уравнения на полуограниченной прямой известна. С ее помощью строится решение задачи. Во втором случае сначала методом разделения переменных строится функция Грина, а потом решается поставленная задача. Доказывается эквивалентность данного решения с решением, найденным другим методом в предыдущей работе (реф. 11714). Д. П. Костомаров

11716. Система аксиом теории Максвелла электромагнитного поля. Хорват (Az elektromágneses tér maxwellféle elméletének axiómarendszere. Horváth János), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1959, **9**, № 3, 259—286 (венг.)

11717. Осесимметричная задача электроуплотнения глинистых грунтов. Кудрявцев Е. П., Научн. докл. высш. школы. Энергетика, 1959, № 2, 199—209

11718. О возможных равновесных конфигурациях тонкого кольцевого плазменного проводника в магнитном поле. Вандакуров Ю. В., Ж. техн. физ., 1959, **29**, № 11, 1312—1316

В гидродинамическом приближении исследуются условия равновесия кольцевого плазменного проводника, поверхность которого в криволинейных координатах r, φ, ψ

$$x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi,\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi,\ z = -r\sin\varphi,$$

описывается уравнением $r = a(1 + \varepsilon^2 b\cos 2\varphi)$; здесь $\varepsilon = a/R$ — малый параметр, b — постоянная порядка единицы. Задача решается приближенно с точностью до членов порядка ε^2 включительно. Рассматриваются такие конфигурации, которым соответствуют поверхностные токи, имеющие обе составляющие, и объемные токи, текущие вдоль проводника. Полное магнитное поле определяется из решения следующей задачи:

$$\operatorname{grad} p + 1/\pi[\bar{H}_i \operatorname{rot} \bar{H}_i] = 0, \quad \operatorname{div} \bar{H}_i = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H}_e = 0, \quad \operatorname{div} \bar{H}_e = 0, \tag{2}$$

$$H^0_{im} = H^0_{en} = 0, \tag{3}$$

$$8\pi p + \left(H^0_i\right)^2 = \left(H^0_e\right)^2, \tag{4}$$

где $\bar{H}_i$ и $\bar{H}_e$ — поле внутри и вне проводника: индекс 0 сверху означает, что данная величина рассматривается на поверхности проводника. Поле $\bar{H}_i$ и компонента $H_{e\psi}$ ищутся в виде

$$\bar{H}_i = \bar{i}_r g H_0 \frac{a}{r}[A(r)\sin\varphi + B(r)\sin 2\varphi + \ldots] + \bar{i}_\psi g H_0 \frac{a}{r}[(r^2/a^2) + C(r)\cos\varphi + D(r)\cos 2\varphi + \ldots] + \bar{i}_\psi (h_i H_0)/(1 + (r/R)\cos\varphi), \tag{5}$$

$H_{e\psi} = h_e H_0/(1 + (r/R)\cos\varphi)$, здесь $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ — функции, которые определяются из уравнений (1), H_0, g, h_i, h_e — постоянные. Из (5) с учетом граничных условий (3) и (4) можно определить скачки тангенциальных составляющих магнитного поля, т. е. найти поверхностные токи, $\operatorname{rot} \bar{H}e$ дает плотность объемных токов. Вычитая из полного магнитного поля поле токов, получим стороннее поле, удерживающее плазму в равновесии. Внутри проводника оно имеет следующий вид: $\bar{H}_{ст} = \bar{i}_r \varepsilon H_0 (p\sin\varphi + (r/R) Q \sin 2\varphi) + \bar{i}_\varphi \varepsilon H_0 (p\cos\varphi + (r/R) Q\cos 2\varphi) + \bar{i}_\psi \varepsilon H_0 (1 - (r/R)\cos\varphi + (r^2/R^2)\cos^2\varphi)$, где p и Q — постоянные, которые выражаются через g, h_i, h_e.

Д. П. Костомаров

11719. Об одной краевой задаче и ее применениях. Бхутани (A certain boundary value problem and its applications. Bhutani O. P.), Appl. Scient. Res., 1959, **A8**, № 6, 413—424 (англ.)

Рассмотрено уравнение теплопроводности в эллипсе при неоднородных краевых условиях вида $u|_L = At^s$ (t — время, A и s — постоянные). Вводятся эллиптические координаты и используется преобразование Лапласа. Решение получено в виде ряда по функциям Матье. В качестве приложений рассмотрены задачи: неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в эллиптической трубе параллельно ее оси, свободная конвекция в эллиптической трубе, индукционный ток в эллиптическом сердечнике соленоида и т. п.

О. И. Панич

11720. Решение проблемы с начальными данными для многоскоростного нейтронного уравнения переноса в плоскопараллельном случае. Пимбли (Solution of an initial value problem for the multi-velocity neutron transport equation with a slab geometry. Pimbley George H., Jr), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 6, 837—865 (англ.)

Рассматривается нестационарная многогрупповая система кинетических уравнений в плоскопараллельной геометрии. Рассеяние нейтронов предполагается изотропным в лабораторной системе координат. Многогрупповая система записывается в матричной форме. Рассмотрены вопросы существования и единственности решения задачи, а также спектральные свойства неограниченного оператора, определенного в пространстве Гильберта. Г. И. Марчук

11721. Теплоотдача при конденсации пара во вращающемся конусном цилиндре. Чернышевский И. К., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1960, № 1, 155—157

11722. Теория инерционного поля в общей теории относительности. Керес Х., Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1959, № 9, 3—42 (рез. англ.)

Продолжение исследований автора (РЖМат, 1958, 4192) по вопросу об уравнениях общей механики, гидродинамики и электродинамики в трехмерной формулировке в общей теории относительности. Работа состоит из трех частей. В первой части рассматривается обобщенная инерциальная система, заданная интервалом $ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{jk} dx\, dx^k$.

Для получения уравнений механики (включая гидродинамику) и электродинамики в переменном инерционном поле вначале составляются классические уравнения, а затем с помощью ковариантного перехода получены «полурелятивистские» уравнения (с явным выделением времени). Во второй части исследуются уравнения инерционного поля на основании уравнений Эйнштейна и предлагается метод последовательных приближений для их решения (вводится параметр, который в конце вычислений полагается равным единице). Вопрос о сходимости не рассматривается. Не рассматриваются также граничные условия. Отдельно рассматривается вопрос об уравнениях для пространственной метрики инерциальной системы и их интегрировании методом последовательных приближений. В третьей части, имеющей много общего с результатами Кирквуда (Kirkwood R. L., Phys. Rev., 1953, **92**; 1954, **95**), изучаются уравнения электродинамики и инерционного поля в неинерциальных системах отсчета трехмерного евклидова пространства. Здесь, в частности, получены уравнения Максвелла—Лоренца в подвижной системе координат. Они имеют вид:

$$\mathrm{rot}\,(E + (1/c)\,[\mathbf{H}, \mathbf{v}]) + (1/c)\,(\partial \mathbf{H}/\partial t) = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{H} - (1/c)[\mathbf{E}, \mathbf{v}]) - (1/c)\,(\partial \mathbf{E}/\partial t) = (4\pi\rho/c)\,\mathbf{w},\ \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

где $\mathbf{v}$ — переносная скорость, $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ — относительная скорость. Дается также представление поля через потенциалы: $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{H}, \mathbf{v}] = -\mathrm{grad}\varphi - (1/c)\,(\partial \mathbf{A}/\partial t)$. Условие Лоренца записывается в виде $\mathrm{div}\,(\mathbf{A} + (1/c)\,\Phi \mathbf{v}) + (1/c)\,(\partial \Phi/\partial t) = 0$, $\Phi = \varphi - (1/c)(\mathbf{A}, \mathbf{v})$, а сила Лоренца $\mathbf{f} = \rho\,(\mathbf{E} + (1/c)\,[\mathbf{u}, \mathbf{H}])$. Вводится понятие сопутствующего пространства, полученного с помощью преобразования интервала $ds^2 = (c^2 - v^2)\,dt^2 + 2v_i dx_i dt - dx_i dx_i$ к новым переменным z_l по формулам $x_l = a_{lk}(t)\,z_k + a_l$, причем $a_{li} a_{lk} \parallel \delta_{ik}$. Как пример, рассмотрено центрально симметричное поле, в котором скорость определяется формулой $\mathbf{v} = -f(r, t)\,\mathbf{x}$, и показано, что такое поле сводится к гравитационному полю Шварцшильда. Для определения безвихревого поля скоростей применяется метод последовательных приближений. И. С. Аржаных

11723. Гравитационные уравнения Ханда и геоны. Чеймберс (The Hund gravitational equations and geons. Chambers Ll. G.), Canad. J. Phys., 1959, **37**, № 9, 1008—1016 (англ.)

Анализируются гравитационные уравнения Ханда

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t},\ \mathrm{div}\,\mathbf{g} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}[\mathbf{f}, \mathbf{g}] - \frac{4\pi\gamma\rho}{c}\mathbf{v},\ \mathrm{div}\,\mathbf{f} = \frac{1}{2c^2}(f^2 + g^2) - 4\pi\gamma\rho.$$

Показано, что равенство $f = 0$ невозможно, если $v \neq 0$. В статическом случае векторы $\mathbf{f}_s$ и $\mathbf{g}_s$ представлены в виде градиентов зависимых потенциалов. Рассматриваются стационарные решения в динамическом случае, а также решения типа стоячих волн. В последнем случае вопрос сводится к интегрированию уравнения Гельмгольца и решение представлено в обычном виде через функции Бесселя и поверхностные сферические функции. Дана классификация стационарных решений (фокус, седловая точка, вихревая точка).

И. С. Аржаных

11724. Замечания о ковариантном гамильтоновом формализме для векторных полей. Лиотта (Remarks on the covariant hamiltonian formalism for vectorial fields. Liotta R. S.), Nuovo cimento, 1959, **14**, № 2, 443—447 (англ.)

На основании развитых в предыдущих работах автора (Liotta R. S., Nuovo cimento, 1956, **3**; 1958, **8**, 1959, **13**) исследований по теории поля, связанных с переходом от лагранжевого формализма к гамильтоновскому, обсуждается вопрос о ковариантной записи уравнений электромагнитного поля и мезонного поля. Показано, что такой переход можно осуществить для заряженного мезонного поля и для электромагнитного, но нельзя представить в нормальной форме уравнения мезонного поля при наличии электромагнитного.

И. С. Аржаных

11725. Волновое уравнение второго порядка для фермионов. Маркс (A fermionok másodrendű hullámegyenlete. Marx György), Magyar fiz. folyóirat, 1959, 7 № 3, 219—232 (венг.)

11726. О приближенном решении краевой задачи с дифференциальным уравнением теплопроводности. Чернышенко Э. А. Научн. сообщ. Днепропетр. инж.-строит. ин-т, 1959, вып. 41, 8 стр., илл.,

11727 К. Волны на воде. Матем. теория и приложения. Стокер Дж. Дж., Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1959, 617 стр., илл., 26 р. 80 к.

Перевод с английского (Stoker J. J., Water Waves. v. 4. Pure and Appl. Math. Mathematical theory with applications. 1957).

11728 К. Некоторые вопросы аэродинамики и динамики самолета. Ред. Зоншайн С. И. (Тр. Моск. авиац. технол. ин-та, вып. 42). М., Оборонгиз, 1959, 114 стр., илл., 5 р. 70 к.

11729 Д. Переходные процессы в нелинейных электромеханических системах с переменным магнитным потоком. Авраамов И. С. Автореф. дисс. канд. техн. н., Томский политехн. ин-т, Томск, 1959

См. также: 11432, 11462, 11496, 11513, 11514, 11546—11551, 11553, 11743, 11746, 11748, 11759, 11794, 11795, 11818 К, 11820, 11843, 11848, 11961, 12026, 12112, 12114, 12116—12118, 12120—12122, 12124, 12125, 12127—12131, 12133—12138.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

11730. Метод определения собственных значений и собственных функций для одного класса линейных интегральных уравнений. Пугачев В. С., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 3, 527—533

Метод решения линейного интегрального уравнения первого рода, встречающегося в статистической теории оптимальных систем (РЖМат, 1960, 6064), применен, после некоторых видоизменений, для определения собственных значений и собственных функций однородного линейного интегрального уравнения $\int_0^T k(t, u)\,\varphi(t) \times \times \rho(t)\,dt = \lambda\varphi(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant T)$ с определенно положительным симметричным ядром, представляющим собой корреляционную функцию случайной функции, связанной с белым шумом линейным дифференциальным уравнением (белый шум — случайная функция с нулевым математическим ожиданием и некоррелированными значениями). В данном случае ядро определяется формулой $k(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau)\,w(u, \tau)\,d\tau$ и уравнением $F_t w(t, \tau) = H_t \delta(t - \tau)$ $(w(t, \tau) = 0$ при $\tau > t)$, F и H — полиномы относительно оператора $D = d/dt$ с произвольными действительными переменными коэффициентами

$$F = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k,\quad H = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k \quad (m < n).$$

Приведены примеры. М. К. Номоконов

11731. Об одном сингулярном интегральном уравнении, связанном с циклической группой дробно-линейных преобразований. Парадоксова И. А., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 36—40

Исследуется интегральное уравнение вида

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\omega_k(\tau) - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = c(t), \quad (1)$$

где a, b, c — заданные функции удовлетворяющие условию Гёльдера, $\omega_k(t) = \frac{\alpha_k t + \beta_k}{\gamma_k + \delta_k}$ образуют циклическую группу, решенное в замкнутой форме Ф. Д. Гаховым и Л. И. Чибриковой (РЖМат, 1956, 6624). Исследуются нули функции $\theta_0(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega_k'(z)$. Доказывается, что она имеет всего $4n - 2$ нуля, из которых $2n - 2$ лежат в неподвижных точках преобразований $\omega_k(z)$, а остальные $2n$ лежат в точках, эквивалентных друг другу относительно этих преобразований. На основе этого устанавливается следующее тождество:

$$\frac{\theta_0(z)}{F(z) - F(a)} \cdot \frac{F(\tau) - F(a)}{\theta_0(\tau)} \cdot \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(a)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\omega_k(\tau) - z}, \quad (2)$$

где $F(z)$ — основная автоморфная функция группы, a — один из нулей второй категории функции $\theta(z)$. При помощи тождества (2) доказывается, что путем простой замены переменных уравнение (1) может быть сведено к уравнению

$$a(t)\,\psi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau = c_1(t), \quad (3)$$

решенному Л. И. Чибриковой (РЖМат, 78 8, 1957). На основе последнего решение уравнения (1), данное Ф. Д. Гаховым и Л. И. Чибриковой, уточняется в отношении подсчета числа линейно независимых решений. Ф. Д. Гахов

11732. Главная часть расходящихся интегралов и сингулярные интегральные уравнения Вольтерра типа свертки. Бутцер (Über den endlichen Bestandteil divergenter Integrale und singuläre Integralgleichungen vom Volterra—Faltungstypus. Butzer P. L.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 355—357 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = g(t), \quad t > 0,$$

и приводятся некоторые значения α, при которых решение может быть записано в замкнутой форме. В. В. Немыцкий

11733. Об интегральном уравнении специального вида. Вудуорд (On a special integral equation. Woodward David A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 6, 853—854 (англ.)

11734. Особое интегральное уравнение с суммарным ядром. Антипов В. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 9—13

Решение уравнения $g(t) + \lambda\int_0^\infty k(t+\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$, $t > 0$, в предположении, что как данные функции $k(t)$ и $\varphi(t)$, так и искомая функция $g(t)$ допускают преобразование Лапласа, получается в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi(p) - \lambda K(p)\,\Phi(-p)}{1 - \lambda^2 K(p)\,K(-p)}\,e^{pt}\,dp,$$

где $K(p)$, $\Phi(p)$ соответственно обозначают преобразование Лапласа функций $k(t)$, $\varphi(t)$. Решение существует, если в полосе сходимости найдется прямая, на которой $1 - \lambda^2 K(p)\,K(-p) = 0$. Если данные функции $k(t)$, $\varphi(t)$ и искомая функция $g(t)$ принадлежат $L_2(0, \infty)$, то решение можно получить и в несколько иной форме. С. Г. Михлин

11735. О поведении диссипативной системы, подвергнутой нелинейному наследственному воздействию. Массалья (Sul comportamento di un sistema dissipativo soggetto ad azioni ereditarie non lineari. Massaglia Bruna Fogagnolo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, 90, № 2, 462—471 (итал.)

Для решения уравнения $\ddot{q} + 2h\varepsilon\dot{q} + \sigma^2 q - \varepsilon f(q) + \varepsilon\int_0^{T_0} H(\tau)\,f[q(t-\tau)]\,d\tau = 0$ $(h > 0,\ \sigma > 0,\ T_0 > 0,\ |\varepsilon| \ll 1)$, согласно методу Крылова — Боголюбова, совершается подстановка $q = a(t)\cos[\sigma t + \Phi(t)]$, $\dot{q} = -\sigma a(t)\sin[\sigma t + \Phi(t)]$. Отсюда с точностью до ε^2 получается уравнение для $a(t)$: $\dot{a} = -\varepsilon h a + \frac{\varepsilon}{2\pi\sigma}\int_0^{T_0} H(\tau)\,d\tau \times \times \int_0^{2\pi} f[a\cos(\psi - \sigma\tau)]\sin\psi\,d\psi$ и аналогичное уравнение для Φ. Эти уравнения подробно исследуются в случае $f(q) = -\omega^2 q + \alpha q^3 - \beta q^5$. Оказывается, что если $\alpha = \beta = 0$ или $\beta > 0$,

$$3\sqrt{H_0}\,\alpha < [40\,(h+\omega^2 H_0)\beta]^{1/2}\left(H_0 = \frac{1}{2\sigma}\int_0^{T_0} H(\tau)\,\sin\sigma\tau\,d\tau > 0\right),$$

то $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$; при $\beta > 0$, $3\sqrt{H_0}\,\alpha > [40\,(h+\omega^2 H_0)\beta]^{1/2}$ существует два предельных цикла, из которых лишь один устойчивый; в остальных случаях существует один неустойчивый предельный цикл. Условия возможности перехода от уравнений первого приближения к полному уравнению не обсуждаются. А. Д. Мышкис

11736. Наследственные динамические системы. Фотель (Systèmes dynamiques héréditaires. Vogel Théodore), Cahiers phys., 1959, **13**, № 107—108, 319—328 (франц.)

После общих замечаний о свойствах физических систем и значении фазового пространства, автор продолжает исследование наследственных динамических систем (РЖМат, 1958, 5795, 9802, 9803). Если наследственность учитывается интегралами вида $z = \int_0^t e^{a(\tau-t)} g(x, \dot{x})\,d\tau$, то при помощи дифференцирования можно перейти к обычным динамическим системам в пространстве x, y, z. Более подробно исследуется уравнение $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \int_0^t e^{a(\tau-t)} g(x, \dot{x})\,d\tau) = 0$; в этом случае, перейдя к пространству x, y, z, можно указать строение окрестности особой точки (в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения), а в некоторых случаях сделать заключение об отсутствии периодических режимов. Даже в простом уравнении $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = 0$ может оказаться поучительным переписать последнее слагаемое в виде $\int_0^t g'(x)\dot{x}\,d\tau$, после чего с помощью обозначения $\ddot{x} = -z$ перейти к системе третьего порядка. Далее кратко рассматривается случай, когда от наследственности зависит граница области, в которой строится фазовая траектория, причем по достижении границы система „разрушается". Это показано на примере осциллятора, подверженного усталости: в этом случае при малой начальной амплитуде колебание не прекратится, при средней — система разрушится через некоторое время, при большой — разрушится мгновенно. В добавлении указаны результаты расчета предельных циклов для уравнения $\ddot{x} + ax^2\dot{x} + (1-a^2)x + \int_0^t [ax + b(x)\,y]dt = 0$, если функция $b(x) = a^2x^2$ $(x < 1{,}95)$, $= cx^2$ $(x > 1{,}95)$. А. Д. Мышкис

11737. О решении интегрального уравнения, определяющего профиль водосточной трубы. Федеричи-Каса, Нейра-Комбариса (Sobre la resolución de la ecuación integral relativa al perfil del vertedero sutro. Federici Casa Carlo, Neira Combariza Hernando), Ingeniería y arquit., 1959, **13**, № 148, 16—18 (исп.)

11738. Продольные колебания упруго-эридитарного стержня с сингулярной функцией воздействия. Розовский (Поздовжні коливання пружно-ериднтарного стержня з сингулярною функцією впливу. Розовський М. І.), Доповіді АН УРСР, 1959 № 6, 587—593 (укр.; рез. русск., англ.)

Исследуются продольные колебания стержня, упругие несовершенства которого имеют наследственный характер и представляются через сингулярное ядро при помощи известного интегрального соотношения Вольтерра. Для представления затухающих колебаний таких стержней автор строит системы новых специальных функций, названных им эридитарным (наследственным) синусом и эридитарным косинусом, которые при пренебрежении упругими несовершенствами в пределе переходят в соответствующие одноименные тригонометрические функции. Г. Н. Савин

11739. О некоторых задачах теории диффузии излучения. Соболев В. В., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 6, 1265—1268

В теории диффузии излучения встречаются задачи, кажущиеся с первого взгляда весьма различными, но сводящиеся в действительности к интегральным уравнениям одного и того же типа

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty [\mathrm{Ei}(|\tau - t|) + \mathrm{Ei}(\tau + t)] \times B(t)\,dt + g(\tau), \qquad (1)$$

где $\lambda < 1$. Методом преобразования Лапласа в явном виде дается решение уравнения (1) $B(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty \Gamma(\tau, t)\,g(t)\,dt$, где резольвента $\Gamma(\tau, t)$ определяется формулами

$$\Gamma(\tau, t) = \frac{1}{2}[\Phi(|\tau - t|) + \Phi(\tau + t)],$$

$$\Phi(\tau) = 4\lambda\int_1^\infty \frac{xe^{-\tau x}dx}{\lambda^2\pi^2 + \left(x + \lambda\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + \frac{2k(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1}e^{-k\tau}$$

и k — корень уравнения $\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} = 1$.

В. С. Владимиров

11740. „Получение интегральных уравнений для нелинейных цепей с применением операторного метода. Гинзбург М. М., Электричество, 1960, № 5, 54—58

11741 К. Интегральные уравнения. Трикоми Ф. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1960, 299 стр., илл., 11 р. 75 к.

См. также: 12139, 12140, 12169.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

11742. Вариационное исчисление в целом. Фет А. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3**, М., АН СССР, 1958, 386—391

Дается обзор работ по топологическим методам оценки числа решений вариационных задач, при этом основное внимание уделяется оценке числа решений периодической задачи вариационного исчисления. Во многих теоремах кратко указана идея доказательства. Библ. 12 назв. Л. Э. Эльсгольц

11743. О применении интегральных и вариационных принципов механики в задачах колебаний. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И., Прикл. матем. и механ., 1960, **24**, № 1, 80—87

Уточняется формулировка вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Показано, например, что в теории колебаний нельзя утверждать о минимальности действия для всего интервала времени колебаний. Устанавливается вариационный принцип стационарных (линейных) колебаний $\omega^2 \delta\Gamma - \delta U = 0$, где Γ — выражение живой силы через амплитуды нормальных колебаний, а U — аналогичное выражение потенциальной энергии. И. С. Аржаных

11744. К задаче о траекториях. Беленький Н. М., Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та. Сер. физ.-матем., 1959, вып. 3, 231—239

Рассматривается плоское движение точки под действием консервативных сил. С помощью вариационного принципа в форме Якоби выводится уравнение Эйлера (проекция на нормаль) и рассматриваются некоторые простейшие примеры. И. С. Аржаных

11745. К решению одной вариационной задачи сверхзвуковых течений. Костычев Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 3, 3—7

Рассматриваются осесимметричные сверхзвуковые течения газа. Задается неравномерный набегающий поток, длина и концевые радиусы тела вращения. Вариационная задача об определении формы тела, обладающего минимальным волновым сопротивлением, формулируется для функций на контуре, состоящем из головной ударной волны и замыкающей линии Маха. Приводятся уравнения Эйлера задачи и некоторые граничные условия.

Вариационная задача является вырожденной и количество условий, налагаемых на искомые функции, превосходит количество произволов в их определении. В статье этот факт не отмечен, хотя он делает задачу, вообще говоря, не разрешимой в классическом смысле, когда достигается двухсторонний экстремум. Решения, дающие двухсторонний экстремум, могут быть найдены лишь при частных соотношениях исходных величин. Соответствующего анализа нет, и, таким образом, нет метода определения этих частных решений. Отсутствие соображений о неразрешимости задачи в общем случае проявилось, например, в том, что при окончательном перечислении граничных условий отсутствует требование выполнения соотношений на ударной волне. Ю. Д. Шмыглевский

11746. Решение основной задачи внешней баллистики неуправляемых ракет при одном оптимальном режиме полета. Галиуллин А. С., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 4, 17—21

Для движения неуправляемой ракеты приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой число искомых функций равно числу уравнений. Свободные функции отсутствуют, поэтому рассматриваемая задача об определении минимального времени полета между двумя заданными точками не является вариационной и лишена смысла. Функции, приведенные как решение задачи, исходным уравнениям не удовлетворяют. Ю. Д. Шмыглевский

11747. Принцип наименьшего принуждения Гаусса и возможности его применения к электротехническим проблемам. Тейхман (Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges und die Möglichkeiten seiner Anwendungen auf elektrotechnische Probleme. Teichmann Horst), Arch. Elektrotechn., 1959, **44**, № 5, 275—278 (нем.)

Излагается вариационный принцип наименьшего принуждения Гаусса. Показывается его применимость к простейшим задачам электротехники. Е. Д. Гарбер

11748. Применение метода Галеркина для нахождения периодического решения дифференциальных уравнений нелинейных колебаний. Лобачева Н. К. В сб.: Механика. (МВТУ, 92). М., 1959, 49—58

Используется вариационный принцип Гамильтона для определения коэффициентов представления $q = a_0 + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t)$ при отыскании периодических функций $q(t)$ теории нелинейных колебаний. Приводятся примеры эффективного решения задач свободных и вынужденных колебаний. И. С. Аржаных

11749. Применение метода Галеркина в задачах об устойчивости течений вязкой жидкости. Коломый (Užití Galerkinovy metody v úlohách o stabilitě proudění vazké tekutiny. Kolomý Josef), Aplikace mat., 1960, 5, № 1, 40—44 (чешск.; рез. русск., англ.)

Следуя С. Г. Михлину (Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950), автор доказывает сходимость метода Галеркина в задаче о собственных значениях для уравнения $(D^2-\sigma)^3 v(x) - \mu p(x)v(x) = 0$ (1) с граничными условиями: $v(a) = v(b) = (D^2 - \sigma)v(a) = (D^2 - \sigma)v(b) = D(D^2 - \sigma)v(a) = D(D^2 - \sigma)v(b) = 0$, где $x \in [a, b]$, $p(x) \in L_2(a, b)$, $\sigma > 0$, D — оператор дифференцирования. В качестве приложения приводится задача об устойчивости течения вязкой жидкости между бесконечными вращающимися цилиндрами радиусов a и b, сводящаяся к нахождению спектра уравнения (1) при $p(x) = \sigma\left(A + \frac{B}{x^2}\right)$. Е. Д. Гарбер

11750. Методы Ритца и Трефтца в теории оболочек. Рюдигер (Die Verfahren von Ritz und Trefftz in der Theorie der Schalen. Rüdiger D), Z. angew. Math. und Mech., 1960, **40**, № 1-3, 114—123 (нем.)

Автор рассматривает вариационный принцип минимума потенциальной энергии в теории упругих оболочек и выводит системы уравнений Ритца, Трефтца и Галеркина для нахождения коэффициентов минимизирующих последовательностей. Сходимость методов не рассматривается. Е. Д. Гарбер

11751. Заметки о методе Рэлея — Ритца. Курант (Remarks about the Rayleigh — Ritz method. Courant Richard), Boundary Problems Different. Equat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960, 273—277 (англ.)

Рассматриваются некоторые общие вопросы применения прямых вариационных методов математической физики. Сущность метода Ритца описывается на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Указываются трудности практического применения метода Ритца и способы их преодоления. Оценка точности может быть произведена с помощью метода Трефтца. Улучшение сходимости достигается методом „чувствительности" Куранта (Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950). Затруднения, связанные с выбором координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, не имеют места в случае естественных граничных условий. Для широкого класса задач граничные условия $U|_\Gamma = g$ есть предельный случай естественных граничных условий для функционала $Q(\varphi) + \lambda \int_\Gamma (\varphi - g)^2 dS$ при $\lambda \to \infty$ (принцип „замораживания" граничных условий). При этом теоретические рекомендации по выбору λ для данного n отсутствуют.

Численные эксперименты, проведенные в Нью-Йоркском университете на УНИВАК, показали удовлетворительную сходимость при выборе λ из достаточно широкого интервала. Е. Д. Гарбер

См. также: 11159, 11160, 12083.

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редакторы *В. В. Немыцкий, В. К. Захаров*

11752. Одно свойство логарифмически монотонных действительных функций. Пачони (Una proprietà delle funzioni reali con flessibilità monotona. Pacioni Goffredo), Archimede, 1959, **11**, № 3, 168—172 (итал.)

Функция $u(P)$ точки P метрического пространства называется монотонной в P_0, если существует

$$\left\{\frac{du(P)}{d|P|}\right\}_{P=P_0} = \lim_{P\to P_0} \frac{u(P)-u(P_0)}{|P|-|P_0|},$$

где $|P|$ означает расстояние P от начала O; она называется монотонной на подпространстве, если для любых двух точек P_1 и P_2, $|P_1| \neq |P_2|$, этого подпространства, отношение $[u(P_2)-u(P_1)]/[|P_2|-|P_1|]$ либо всегда $\geqslant 0$, либо всегда $\leqslant 0$. Доказывается, что если $du(P)/d|P|$ не меняет знака в некотором секторе T_R сферы $|P| \leqslant R$, то $u(P)$ монотонна на T_R. Основной результат заключается в следующем: Если $v(P)$ не обращается в нуль в T_R и на каждом луче из O, лежащем в T_R, $d\ln|v(P)|/d\ln|P|$ монотонна, то $v(tP)/v(P)$ также монотонна на этом луче (в T_{Rt}, если $t>1$, и в T_R, если $0<t<1$); при этом $d\ln|v(P)|/d\ln|P|$ и $v(tP)/v(P)$ изменяются в одном и том же смысле, если $t>1$, и в противоположных смыслах, если $0<t<1$.

В. И. Левин

11753. *M*-функция: заметка о неравенствах между средними положительных чисел. Мокс (The *M*-function: a note on inequalities of the means of a set of positive numbers. Moakes A. J.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 208—210 (англ.)

Среднее $y(p)$ положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, определенное для $p \neq 0$ равенством $y^p = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_r^p$, а при $p=0$ равенством $y^n = \prod_{r=1}^{n} a_r$, является непрерывной монотонно возрастающей функцией p (если не все a_r равны между собой). Предлагается аналитическое доказательство этого факта, использующее дифференциальное исчисление. Заметка имеет методический характер.

В. И. Левин

11754. Новый вывод площадей параболической трапеции и параболического сегмента. Яглом И. М., Матем. просвещение, вып. 5, 1960, 193—199

11755. О некоторых неравенствах. Митринович (O nekim nejednakostima. Mitrinović Dragoslav S.), Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1959, № 29-32, 1—4 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Устанавливаются некоторые числовые неравенства весьма частного вида. Например, если $\sum ab=0$, то $4\left(\sum abc\right)^2 + \left(\sum a\right)^3 \sum abc < 0$.

В. В. Немыцкий

11756. Неравенство для отношения Милса. Бойд (Inequalities for Mills' ratio. Boyd A. V.), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs, 1959, **6**, № 2, 44—46 (англ.)

11757. Неравенство Шура. Баркер (Schur's inequality. Barker C. C. H.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 344, 127—128 (англ.)

Используя неравенство $\sum x(x-y)(x-z) \geqslant 0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, автор выводит некоторые тождества.

В. В. Немыцкий

11758. Об эквивалентности двух систем неравенств. Митринович (Equivalence of two sets of inequalities. Mitrinovitch D. S.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 344, 126 (англ.)

Пусть σ_k — основные симметрические функции действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порядка $k(<n)$. Устанавливается эквивалентность систем неравенств $\sigma_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и $x_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

В. В. Немыцкий

11759. Об одном способе осреднения функций. Гордон И. А., Весці АН БССР. Сер. фіз-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1959, № 2, 5—21

Дается способ получения средних функций, обладающих свойствами средних функций Соболева и в то же время, подобно средним Гюнтера, зависящих от некоторой функции распределения. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[0, l]$ и суммируема относительно определенной на том же отрезке функции ограниченной вариации $\mu(x)$. При некотором фиксированном h, $0<h<+\infty$, функция $f(x)$ продолжается на $[-h, l+h]$ нулем, а функция $\mu(x)$ продолжается следующим образом: $\mu(x)=\mu(0)$ при $x<0$ и $\mu(x)=\mu(l)$ при $x>l$. Тогда осредненная функция

$$f_{h,\mu}(x) = \frac{1}{Kh}\int_{x-h}^{x+h} \omega_h(\xi - x) f(\xi)\, d\mu(\xi),$$

где

$$\omega_h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{h^2-x^2}}, & |x|<h, \\ 0, & |x| \geqslant h, \end{cases}$$

а

$$K = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \omega_h(\xi - x)\, d\mu(\xi).$$

Доказаны следующие свойства обобщенных средних:

1. Если $\mu(x)$ монотонно возрастает на $[0, l]$, то $\varphi_{h,\mu}(x)$ имеют производную любого конечного порядка, взятую по x, и дано выражение этой производной.

2. Функции $\varphi_{h,\mu}(x)$ сильно сходятся к $\varphi(x)$ при $h\to 0$.

Пусть $f(x)$ и $\mu(x)$ — непрерывные функции, тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\mu(x+h)-\mu(x)},$$

если он существует и конечен, называется μ-производной и обозначается $\frac{df(x)}{d\mu(x)}$. Это определение обычным способом обобщается на производные любого порядка n. Функция $\omega(x)$, измеримая и суммируемая относительно функции ограниченной вариации на $[0, l]$ $\mu(x)$, называется μ-обобщенной производной n-го порядка функции $\varphi(x)$, измеримой и суммируемой относительно $\mu(x)$, если для всякой функции $\psi(x)$, непрерывной на $[0, l]$ и обладающей на $[0, l]$ непрерывными μ-производными до n-го порядка включительно и обращающимися в нуль вместе с $\psi(x)$ на концах этого отрезка, справедливо интегральное равенство

$$\int_0^l \left(\varphi(x)\frac{d^{(n)}\psi(x)}{d\mu^{(n)}(x)} + (-1)^{n+1}\psi(x)\omega(x)\right) d\mu(x) = 0.$$

Если $\mu(x)$ — линейная однородная функция и $\varphi(x)$ суммируема относительно $\mu(x)$ на $[0, l]$, то μ-производная порядка n от обобщенной средней функции $\varphi_{h,\mu}(x)$ равна средней функции от μ-обобщенной производной n-го порядка функции $\varphi(x)$.

Б. М. Гагаев

11760. Разложение положительных эрмитовых матриц. Винер, Акутович (A factorization of positive Hermitian matrices. Wiener N., Akutowicz E. J.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 1, 111—120 (англ.)

Если $H(\theta) = \| h_{jk}(\theta) \|$ — эрмитова положительно определенная матричная функция, определенная при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и такая, что $h_{jk}(\theta)$ принадлежат к $L^1(0, 2\pi)$

$$-\infty < \int_0^{\infty} \ln \det H(\theta) d\theta,$$

то $H(\theta)$ можно записать в виде

$$H(\theta) = N(\theta) N(\theta)^*,$$

где $N(\theta) = \| n_{jk}(\theta) \|$, причем $n_{jk}(\theta)$ принадлежат $L^2(0, 2\pi)$ и разлагаются в ряды Фурье вида

$$n_{jk}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Н. Я. Виленкин

11761. Об определении чисел при помощи их сумм данного порядка. Селфридж, Страус (On the determination of numbers by their sums of a fixed order. Selfridge J. L., Straus E. G.), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 4, 847—856 (англ.)

Рассматривается проблема, предложенная Л. Мозером: Пусть $\{x\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество комплексных чисел и пусть $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\binom{n}{s}}\}$ — множество сумм из s различных элементов от $\{x\}$. Каково множество $\{x\}$, которое может быть определено при помощи $\{\sigma\}$? При $s=2$ устанавливается, например, такая теорема: Если $n \neq 4k$, тогда первые n симметрических функции от $\{\sigma\}$ могут быть произвольно заданы, и они определяют $\{x\}$ единственным образом. Рассматривается также и случай произвольного s.

В. В. Немыцкий

11762. О псевдослучайных функциях. Басс, Кре (Sur les fonctions pseudo-aleatoires. Bass Jean, Krée Paul), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 15, 1083—1085 (франц.)

Рассматриваются псевдослучайные функции, т. е. ограниченные комплекснозначные функции $f(t)$, удовлетворяющие условиям:

1) $\lim\limits_{T\to 0} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$;

2) корреляционная функция

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)} f(t+h) dt$$

непрерывна, $\gamma(0) \neq 0$ и $\gamma(\infty) = 0$. В частности, доказана следующая теорема:

Пусть $\varphi(t) = At^k + A_1 t^{k-1} + \ldots + A_k$, $\psi(t) = Bt^k + B_1 t^{k-1} + \ldots + B_k$ — полиномы с действительными коэффициентами, $|A| + |B| > 0$ и $k \geqslant 2$. Пусть α и β — действительные числа. Если α, A, $B\alpha$ арифметически независимы, то $\exp 2\pi i[\varphi(\hat{t}) + \psi(\widehat{\alpha t + \beta})]$, где $\hat{t}$ обозначает целую часть числа t, — псевдослучайная функция.

K. Urbanik

11763. Равномерно плотные последовательности, тригонометрические средние, псевдослучайные функции. Басс (Suites uniformement denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. Bass Jean), Bull. Soc. math. France, 1959, 87, № 1, 1—64 (франц.)

Дается свободное изложение результатов, намеченных в цикле работ автора и его сотрудников (РЖМат, 1959, 1208; 1960, 4309, 4310, 4311, 4312; реф. 11762), посвященных построению ряда примеров так называемых псевдослучайных функций — комплексных функций $f(t)$ (где $f(t) = 0$ при $t < 0$), обладающих тем свойством, что пределы

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$\gamma_f(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t+h)}dt$$

существуют (при всех $h > 0$,) причем $Mf = 0$, а $\gamma_f(h)$ — непрерывная функция такая, что $\gamma_f(0) > 0$ и $\gamma_f(h) \to 0$ при $h \to \infty$. В §1 статьи устанавливаются некоторые общие свойства псевдослучайных функций и вводится понятие равномерно плотных последовательностей — последовательностей x_k, $k = 1, 2, \ldots$ (где $0 \leqslant x_k < 1$ при всех k) таких, что для любого сегмента L на $(0,1)$ отношение к N числа N' точек среди $x_1, x_2, \ldots, x_N$, принадлежащих к L, стремится при $N \to \infty$ к длине l сегмента L. В § 2 изучаются псевдослучайные функции вида

$$f(t) = \begin{cases} \exp[2\pi i \varphi(n)] & \text{при } n-1 \leqslant t < n,\ n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

в частности доказывается, что при $\varphi(n) = A_0 + A_1 n + \ldots + A_\nu n^\nu$ функция $f(t)$ будет псевдослучайной тогда и только тогда, когда $\nu \geqslant 2$ и среди коэффициентов $A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ хоть один иррационален. В § 3 рассматриваются псевдослучайные функции вида

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left[\frac{2\pi i}{m} \widehat{\varphi(n)}\right] & \text{при } n-1 \leqslant t < n,\ n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $\widehat{\varphi}$ означает целую часть φ, а m — некоторое целое число. Доказывается, что при $\varphi(n) = A_0 + A_1 n + \ldots + A_\nu n^\nu$, где многочлен справа удовлетворяет тем же условиям, что и выше, функция $f(t)$ будет псевдослучайной. Этот класс псевдослучайных функций (в отличие от предыдущего) принимает лишь конечное число возможных значений (а именно — значения $e^{2\pi i k/m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$). В § 4 устанавливаются условия, при которых функция $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(\alpha t + \beta)$, где f_1 и f_2 — псевдослучайные функции, а α и β — заданные положительные постоянные, также будет псевдослучайной. Исходя отсюда строятся новые широкие классы псевдослучайных функций. В § 5 изучаются псевдослучайные функции вида

$$f(t) = \begin{cases} \exp[2\pi i \varphi(n)] & \text{при } t_{n-1} \leqslant t < t_n, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $t_0 = 0$, t_1, $t_2, \ldots$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности. Полученные результаты позволяют, в частности, доказать, что функции такого вида действительно будут псевдослучайными, если $\varphi(n)$ — многочлен степени $\geqslant 2$, старший коэффициент которого иррационален, а последовательность $\{t_n\}$ получается с помощью специального построения, содержащего функциональную степень произвола. Показывается также, что в последней формуле для $f(t)$ вместо $\exp\{2\pi i \varphi(n)\}$ можно подставить вещественную функцию $\cos 2\pi\varphi(n)$ или $\sin 2\pi\varphi(n)$. Для всех построенных примеров псевдослучайных функций указываются также явные формулы, задающие соответствующую корреляционную функцию $\gamma_f(h)$.

А. М. Яглом

11764. О высших дифференциальных коэффициентах сложных скалярных и векторных функций и о некоторых их приложениях. Миколаш (Über die höheren Differentialkoeffizienten zusammengesetzter Skalar-bzw. Vektorfunktionen und einige Anwendungen derselben. Mikolás Miklós), Ann. Univ. scient. Budapest. Sec. math., 1958, 1, 49—65 (нем.)

Пусть n,p — натуральные числа. Для $k=[k_1,\dots,k_p]\in E_p$ положим $|k|=\sum_{i=1}^{p}|k_i|$. Пусть N_{np} — множество всех $\lambda=[\lambda_1,\dots,\lambda_p]$, где λ_i — целые неотрицательные числа, для которых $1\leqslant|\lambda|=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\leqslant n$; пусть f — функция, определенная в окрестности точки $u\in E_p$. Если существует полином $P(k)=\sum_{\lambda\in N_{np}}A_{\lambda_1\dots\lambda_p}k_1^{\lambda_1}\dots k_p^{\lambda_p}$ (коэффициенты A_λ которого зависят только от u) такой, что для функции ε, определенной соотношением $f(u+k)-f(u)=P(k)+|k|^n\varepsilon(k)$, $\lim_{|k|\to 0}\varepsilon(k)=0$, то автор называет функцию f n раз дифференцируемой в точке u с системой $\{A_\lambda\}$ ($\lambda\in N_{np}$). Доказана следующая теорема: Пусть функции φ_i n раз дифференцируемы в точке $x\in E_r$ с системами $\{B_\mu^i\}$ ($\mu\in N_{nr}$; $i=1,\dots,p$) и пусть функция f n раз дифференцируема в точке $u=[\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)]$ с системой $\{A_\lambda\}$ ($\lambda\in N_{np}$). Образуем функцию $F(y)=f(\varphi_1(y),\dots,\varphi_p(y))$. Каждому $\lambda\in N_{np}$ и каждому $\nu\in N_{nr}$ поставим в соответствие сумму

$$S_{\lambda\nu}=\sum\prod_{s=1}^{\lambda_1}B^{(1)}_{\mu_{1s}\dots\mu_{rs}}\dots\prod_{s=|\lambda|-\lambda_p+1}^{|\lambda|}B^{(p)}_{\mu_{1s}\dots\mu_{rs}},$$

где суммируется по всем системам (матрицам) $(\mu_{ij})(i=1,\dots,r;j=1,\dots,|\lambda|)$ таким, что μ_{ij} — целые неотрицательные числа,

$$\sum_{j=1}^{|\lambda|}\mu_{ij}=\nu_i(i=1,\dots,r),$$

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}>0\,(j=1,\dots,|\lambda|).$$

(Для $|\lambda|>|\nu|$, очевидно, $S_{\lambda\nu}=0$). Тогда функция F n раз дифференцируема в точке x с системой $\{C_\nu\}$ ($\nu\in N_{nr}$), где

$$C_\nu=\sum_{\lambda\in N_{np}}A_\lambda S_{\lambda\nu}.$$

Даются примеры применения этой теоремы. Наконец, в обозначениях тензорного исчисления выводится формула для вычисления производных отображения $\psi(\varphi(x))$, где φ,ψ — отображения из E_p в E_p. J. Matík

11765. О решении неявного уравнения. Абиян, Браун (On the solution of an implicit equation. Abian Smbat, Brown Arthur B.), Illinois J. Math., 1959, 3, № 3, 374—380 (англ.)

В статье при помощи метода последовательных приближений ищется решение уравнения $g(x_1,\dots,x_n,y)=0$. На функцию g, вместо классических условий дифференцируемости и выполнения равенства $g=0$ в заданной точке, накладываются менее ограничительные условия. Кроме вопроса о существовании решения, разбирается вопрос об оценке приближения. Также устанавливается, что если функция g удовлетворяет условию Липшица на некотором множестве, то и решение $y=Y(x_1,\dots,x_n)$ уравнения $g=0$ удовлетворяет условию Липшица на этом же множестве. Приведем примеры условий, которые авторы накладывают на функцию g. Функция g определена и непрерывна в замкнутой области $|x_i-a_i|\leqslant\alpha_i$, $|y-b|\leqslant\beta$. Существуют постоянные C и D такие, что $|g(a,b)|<C\beta$ и для двух различных точек указанной области выполняется неравенство

$$0<C\leqslant\frac{g(x;u)-g(x;v)}{u-v}\leqslant D.$$

Для доказательства некоторых теорем выдвигается требование существования числа k, удовлетворяющего неравенству $0<k[D\beta+|g(x;b)|]<2\beta$. А. Н. Черкасов

11766. О проблеме Харди и Литлвуда. Лемер (On a problem of Hardy and Littlewood. Lehmer D. H.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 4, 395—396, 485 (англ.)

Дается ответ на следующий вопрос Харди и Литлвуда: Справедливо ли (или нет) предложение, что если $1\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant 0$, а последовательность $c_1, c_2,\dots$ такова, что $|c_1|, |c_2|,\dots$ является переставленной системой чисел $a_1, a_2,\dots$, то

$$\int_0^\pi|f^*(\theta)|\,d\theta\leqslant\int_0^\pi|f(\theta)|\,d\theta, \tag{1}$$

где

$$f^*(\theta)=1+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+\dots, \tag{2}$$

$$f(\theta)=1+c_1\cos\theta+c_2\cos 2\theta+\dots,$$

Автор строит пример двух функций вида (2), для которых неравенство (1) не имеет места. В добавлении дается такой же ответ на аналогичный вопрос, относящийся к случаю, когда свободный член в функциях вида (2) взят равным не 1, а 1/2.

Примечание референта. На стр. 395 (строка 18 сверху) вместо $c_2=-1/2$ должно быть $c_2=-1/2$. П. Л. Ульянов

11767. Полезная интегральная формула. Пиз (A useful integral formula. Pease Donald K.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 10, 908 (англ.)

11768. О решении интегралов типа Максвелла — Мора способом Коши — Верещагина. Лысков В. П., Сб. Н.-и. ин-т оснований. Акад. стр-ва и архитект. СССР, 1959, № 41, 4—6

11769. Асимптотическое разложение интеграла

$$\int_0^1\frac{x^2\tau^2A(\tau)+x\tau B(\tau)+C(\tau)}{\lambda x^2\tau^2+x\tau D(\tau)+E(\tau)}\,d\tau.$$

Шёнфелд (The asymptotic expansion of

$$\int_0^1\frac{x^2\tau^2A(\tau)+x\tau B(\tau)+C(\tau)}{\lambda x^2\tau^2+x\tau D(\tau)+E(\tau)}\,d\tau.$$

Schoenfeld Lowell), J. Math. and Phys., 1959, 38, № 3, 193—202 (англ.)

Основной результат статьи — вывод формулы, дающей асимптотическое представление для больших x интеграла $I(x)$, указанного в заглавии. Функции $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $E(\tau)$ непрерывны в промежутке $[0,1]$, причем каждая из них имеет представление вида $a_0+a_1\tau+{}$ $+O(\tau^{1+\varepsilon})$; λ — положительный параметр. Формула имеет следующий вид:

$$I(x)=K_0+K_1\frac{\log x}{x}+K_2\frac{1}{x}+K_3\frac{\log x}{x^2}+K_4\frac{1}{x^2}+{}$$

$$+M\frac{\log x}{x^3}+O\left(\frac{1}{\lambda^{1+\eta/2}x^{2+\eta}}\right);$$

даны выражения входящих сюда коэффициентов. Для характеристики метода предварительно дается асимптотическое представление более простого интеграла

$$J(x)=\int_0^1\frac{x\tau A(\tau)+B(\tau)}{\lambda x\tau+D(\tau)}\,d\tau,$$

именно

$$J(x)=K_0+K_1\frac{\log x}{x}+K_2\frac{1}{x}+K_3\frac{\log x}{x^2}+O\left(\frac{\log(\lambda+2)}{\lambda^2 x^2}\right).$$

А. К. Харадзе

11770. Функциональные уравнения и тета-функции. I. Белман (Functional equations and theta-functions. I. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 6, 853—854 (англ.)

11771. Представление коэффициентов Клебша — Гордана в виде конечноразностных аналогов полиномов Якоби. Рывкин В. Б., Докл. АН БССР, 1959, 3, № 5, 183—185

Получено выражение коэффициентов Клебша — Гордана для разложения кронекеровского произведения неприводимых представлений группы вращений трехмерного пространства в виде конечноразностного аналога формулы Родрига для матричных элементов неприводимых представлений. Аналогия между матричными элементами и коэффициентами Клебша — Гордана отмечалась ранее И. М. Гельфандом Н. Я. Виленкин

11772 К. Математический анализ. Спец. курс. [Для матем. специальностей физ.-матем. и механ.-матем. фак. ун-тов]. Шилов Г. Е. М., Физматгиз, 1960, 388 стр., илл., 8 р. 75 к.

11773 К. Лекции по математическому анализу. Гиццетти (Lezioni di analisi matematica. Chizzetti Aldo. Roma Libr. eredi V. Veschi, 1957. Vol. I. Ed. 1957. (Univ. studi Roma), 525 p. Vol. II., vii, 516 p.— Litogr.), Bibliogr. ital., 1957 (1959), **91**, № 680, bis, 908 (итал.)

11774 К. Основы анализа бесконечно малых. Пособие для самообразования. Изд. 3-е, переработ. Привалов И. И., Гальперн С. А., М., Физматгиз, 1959, 251 стр., илл., 4 р. 90 к.

Дается краткое изложение элементов математического анализа. Изложение материала доступно для широкого круга читателей и книгу можно использовать при самостоятельном изучении математического анализа. Содержание по главам. 1. Понятие функции. 2. Теория пределов. 3. Производная. 4. Приложения понятия производной. 5. Дифференциал. 6. Элементы интегрального исчисления. В конце каждой главы приводятся задачи и упражнения по пройденному материалу. По сравнению с предыдущим, это издание отличается, главным образом, изложением теории пределов, что повлекло за собой некоторые изменения в тексте книги. В. К. Захаров

11775 К. Курс математического анализа. Пособие для физ.-матем. фак. пед. ин-тов. Ч. 2. Фролов Н. А., М., Учпедгиз, 1959, 351 стр., илл., 6 р.

Это вторая часть учебника для студентов физико-математических факультетов пединститутов. Раздел I — Ряды. 1. Числовые ряды; 2. Функциональные ряды; 3. Степенные ряды. Раздел II — Функции нескольких переменных. 1. Дифференцирование функций нескольких переменных; 2. Кратные интегралы; 3. Применение двойных и тройных интегралов; 4. Криволинейные интегралы. Раздел III — Дифференциальные уравнения. 1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах; 2. Теоремы существования и единственности; 3. Уравнения, не разрешенные относительно производной; 4. Уравнения высших порядков; 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков; 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. В. К. Захаров

11776 К. Дифференциальное исчисление. Учебн. пособие для пед. ин-тов. Жак И. Е. М., Учпедгиз, 1960, 404 стр., илл., 7 р. 40 к.

11777 К. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (Для матем. отд. ун-тов). Т. 2. Фихтенгольц Г. М., (Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси. Унив. матем. булимлари учун кулланма сифатида рухсат этилган. Т. 2. Фихтенгольц Г. М. Тошкент, Укувпеддавнашр, 1958, 910 бет., расмли, 20 р. 25 к.) (узб.)

11778 К. Десять глав по дифференциальному и интегральному исчислению. 3-е изд. Груша (Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. 3. vyd. Hruša Karel. («Práce ČSAV. Sek. mat.-fys.-Věda všem., Sv. 19»). Praha, ČSAV, 1959, 171 s., il., 7, 30 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1959, № 14, 297 (чешск.)

11779 К. Упражнения по дифференциальному исчислению. 3-е изд. Хеймбург (Beispiele zur Differentialrechnung. 3. Aufl. Heimburg Ernst. Braunschweig — Berlin — Hamburg. Westermann, 1959, 172 S., 12.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 42, 3146 (нем.)

11780 К. Упражнения по интегральному исчислению. 3-е изд. Хеймбург (Beispiele zur Integralrechnung. 3. Aufl. Heimburg Ernst. Braunschweig — Berlin — Hamburg. Westermann, 1959, 132 S. 10.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 42, 3146 (нем.)

11781 К. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. [Учебн. пособие для студ. втузов]. Романовский П. И. М., Гостехиздат, 1957, 291 стр., илл., 5 р. 45 к.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

11782. Теория рядов. Юе Минь-и. Шусюэ тунбао, 1959, № 10, 12—15 (кит.)

11783. Об одной суммационной формуле. Янкович (O jednoj sumacionoj formuli. Janković Nadežda), Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1959, № 29-32, 11—12 (сербо-хорв.; рез. франц.)

11784. Регулярно расходящиеся монотонные ряды. Эро (Séries monotones régulièrement divergentes. Eyraud Henri), Ann. Univ. Lyon, 1956, **A**, № 19, 47—51 (франц.)

Рассматриваются ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, где $u_n>0$, $u_n\geqslant u_{n+1}$, $v_n>0$, $v_n\geqslant v_{n+1}$. Доказывается, что для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ можно построить расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ такой, что для бесконечного множества различных значений n будет выполняться неравенство $v_n<u_n$. Вводится ряд определений. Расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ называется полурасходящимся, если для него можно построить сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, для которого неравенство $u_n>v_n$ выполняется для бесконечного множества различных значений n. Все остальные расходящиеся ряды указанного вида называются полностью расходящимися. Доказывается, что для расходимости полностью ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ необходимо и достаточно выполнения условия $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\cdot v_n\neq 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ называется регулярно расходящимся, если существует предел $\lim_{n\to\infty}n\cdot v_n$, равный некоторому положительному числу. Указываются применения изложенного в теории вероятностей. Например, формулируется вытекающая из предыдущего теорема: необходимым и достаточным условием того, чтобы бесконечная последовательность испытаний определяла вероятность p события E, является регулярная расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}1/f(n)$, где $f(n)$ — число необходимых испы-

таний для n-кратного появления события E.

И. П. Макаров

11785. О некотором методе Тёплица. Влодарский (On a cartain method of Toeplitz. Włodarski L.), Ann. polon. math., 1959, 7, № 1, 41—49 (англ.)

Рассматривается матричный метод суммирования, данный при помощи преобразования последовательности в последовательность матрицей (a_{nk}) с $a_{nk}=2^{-n}e^{-n}n^{2^{-n}k}\Gamma(2^{-n}k+1)$. Устанавливается регулярность этого метода и показывается, что он суммирует геометрическую последовательность $\{a^k\}$ в точке $a=1$ к пределу 1, в точках $a>1$ действительной оси к пределу ∞, а в остальных точках комплексной плоскости к пределу 0.

Г. Ф. Кангро

11786. Расширение одной теоремы о равносильности между абсолютным риссовским и абсолютным чезаровским суммированиями. Боруэйн (An extension of a theorem on the equivalence between absolute Rieszian and absolute Cesàro summability. Borwein D.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1959, 4, № 2, 81—83 (англ.)

Пусть $\alpha>0$, $p\geqslant 1$ и q — произвольное действительное число. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ называется $|C,\alpha,q|_p$-суммируемым, если $\sum_{n=1}^{\infty}n^{pq+p-1}|C_n^{\alpha}-C_{n-1}^{\alpha}|^p<\infty$, $C_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+\alpha}{n-k}a_k$, и $|R,\alpha,q|_p$-суммируемым, если $\int_1^{\infty}w^{pq+p-1}\left|\frac{d}{dw}C_{\alpha}(w)\right|^p dw<\infty$, $C_{\alpha}(w)=w^{-\alpha}\sum_{k<w}(w-k)^{\alpha}a_k$. Доказывается, что при $\alpha>1-1/p$, $\alpha\geqslant q-1/p$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ является $|C,\alpha,q|_p$-суммируемым тогда и только тогда, когда этот ряд $|R,\alpha,q|_p$-суммируем. Частный случай $p=1$, $q=0$ рассматривал Хислоп (Hyslop J. M., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1937, 5, 46—54).

Г. Ф. Кангро

11787. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых методом Чезаро. Кангро Г., Баron С., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 4, 751—753

Рассматривается следующая проблема (множителей суммируемости): Каким условиям должна удовлетворять двойная последовательность $\{\varepsilon_{mn}\}$, чтобы для любого $C_r^{\alpha,\beta}$-суммируемого (или $C_b^{\alpha,\beta}$-суммируемого, или $C^{\alpha,\beta}$-ограниченного) ряда $\sum_{m,n}u_{mn}$ ряд $\sum_{m,n}\varepsilon_{mn}u_{mn}$ был суммируем $C^{\gamma,\delta}$ (или $C_b^{\gamma,\delta}$, или $C_r^{\gamma,\delta}$), где α,β — целые, γ, δ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $0\leqslant\gamma$, $\delta\leqslant\alpha,\beta$. Формулируются (указана схема доказательства) три однородных теоремы, приведем одну из них.

Теорема 1. Для того чтобы величины ε_{mn} были множителями суммируемости типов: а) $(C_r^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, необходимы и достаточны условия

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta}\,|\,\Delta_{mn}^{\alpha+1\,\beta+1}\varepsilon_{mn}\,|<\infty,$$

$$\sum_{m}(m+1)^{\alpha}\,|\,\Delta_{m}^{\alpha+1}\varepsilon_{mn}\,|=O[(n+1)^{\delta-\beta}],$$

$$\sum_{n}(n+1)^{\beta}\,|\,\Delta_{n}^{\beta+1}\varepsilon_{mn}\,|=O[(m+1)^{\gamma-\alpha}],$$

$$\varepsilon_{mn}=O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}].$$

Авторы отмечают, что из полученных ими результатов легко вывести соответствующие теоремы Харди, Кодзима, Гамильтона, Мура и Кангро для множителей сходимости. Библ. 8 назв.

М. П. Щеглов

11788. Согласование и гармонический анализ последовательностей. Гинан (Concordance and the harmonic analysis of sequences. Guinand A. P.), Acta math., 1959, 101 № 3-4, 235—271 (англ.)

Выделяются различные классы почти периодических последовательностей, для которых показатели Фурье также являются почти периодическими последовательностями. Это явление автор называет согласованием (concordance).

Определение. Взвешенная последовательность $\{a_n, \alpha_n\}$, в которой α_n упорядочены по величине, называется B^2-почти периодической относительно функции $A(x)$, если функция

$$\varphi(x)=\sum{}'_{0<\alpha_n<x}a_n-A(x) \qquad (1)$$

B^2-почти периодическая (штрих в сумме означает, что члены, соответствующие $\alpha_n=0$ и $\alpha_n=x$ берутся с коэффициентом $1/2$). Предположим, что $\{a_n, \alpha_n\}$ — взвешенная B^2-почти периодическая последовательность относительно Ax, A — постоянная, и пусть ряд Фурье функции (1) имеет вид

$$\sum{}'_{0<\alpha_n<x}a_n-Ax\sim c_0-i(2\pi)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'_{n\neq 0}\frac{b_n}{\beta_n}e^{i\beta_n x}, \qquad (2)$$

где β_n — дискретная последовательность.

Следующая теорема типична для работы: Пусть выполняются следующие условия: 1) $\varphi(x)=o(x)$ при $x\to\infty$; 2) для некоторой постоянной B $\sum_{0<\beta_n<t}b_n-Bt=O(t^{\delta})$, $\delta>0$; 3) ряд (2) сходится в среднем квадратичном на каждом конечном интервале к $\varphi(x)$; 4) $\sum_{\alpha_n\neq 0}\left|\frac{a_n}{\alpha_n}\right|^2<\infty$. Тогда $\{b_n, \beta_n\}$ является B^2-почти периодической последовательностью относительно функции Bx.

В работе рассмотрены многие применения взвешенных почти периодических последовательностей, в частности, к различным формулам суммирования, типа формулы Пуассона, к формулам обращения для последовательностей, к мероморфным почти периодическим функциям. В работе приведено много интересных примеров, в частности, примеров, связанных с распределением простых чисел и гипотезой Римана. Чтение работы затруднено тем, что при формулировке теорем автор ссылается на условия многих предыдущих теорем.

Б. М. Левитан

11789. Пример почленного дифференцирования бесконечного ряда. Флетт (An example on term-by-term differentiation of infinite series. Flett T. M.), Math. Gaz., 1959, 43, № 346, 278—279 (англ.)

11790. Абсолютная суммируемость рядов Радемахера. Цутикура (Absolute summability of Rademacher series. Tsuchikura Tamotsu), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 1, 49—59 (англ.)

Числовой ряд $\sum a_n$ называется $|A|_k$-суммируемым, если ряд $\sum a_n x^n$ сходится при $0\leqslant x<1$ к функции $\varphi(x)$ такой, что $\int_0^1(1-x)^{k-1}|\varphi'(x)|^k dx<\infty$. Ряд называется $|C,\alpha|_k$-суммируемым, если сходится ряд $\sum n^{k-1}|\sigma_{n-1}^{\alpha}-\sigma_n^{\alpha}|^k$, где σ_n^{α} — n-е чезаровское среднее порядка α. Для любого $k>1$ существует лакунарный ряд $\sum a_n$, суммируемый $|A|_k$, но не суммируемый $|C,1-1/k|_k$ (ряд лакунарен, если $a_n=0$ при $n\neq n_1,\ldots,\ldots,n_j,\ldots,n_{j+1}/n_j\geqslant q>1$. Если $\sum a_j\psi_j(x)$ — ряд по функциям Радемахера, то он почти всюду $|A|_k$-суммируем, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{2^n}^{2^{n+1}-1}a_j^2\right)^{k/2}$ и почти нигде

не $|A|_k$-суммируем, если этот ряд расходится.
Н. Я. Виленкин

11791. Ряды Радемахера с ограниченными суммами. Кьо (On Rademacher series with bounded sum. Keogh F. R.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 454—455 (англ.)

Пусть $f(t)=\sum a_n r_n(t)$, где $r_n(t)$ — функции Радемахера и ряд $\sum a_n^2$ сходится. Для того чтобы функция была ограничена в существенном, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum |a_n|$. Н. Я. Виленкин

11792. Ошибка Коши. А. М., Матем. просвещение, вып. 5, 1960, 228

11793. Распределение Паскаля и приближение с помощью степенных рядов Бернштейна. Мейер-Кёниг, Целлер (Pascal-Verteilung und Approximation durch Bernsteinsche Potenzreihen. Meyer-König W., Zeller K.), Z. angew. Math. und Mech. 1959, **39**, № 9-11, 380 (нем.)

11794. О некоторых биортогональных рядах. Карасева Т. М., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, **80**, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 153—165

Рассматривается система функций

$$x^l e^{i\lambda_n x}\ (0\leqslant x\leqslant 1;\ n=1,2,\ldots;\ l=0,1,\ldots,m_{n-1}),\quad (1)$$

где $\lambda_n\ (n=1,2,\ldots)$ являются нулями функции $p(\lambda)=\int_0^1 P(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt$ $(P(t)\in L_2(0,1))$ с кратностями, соответственно равными $m_n\ (n=1,2,\ldots)$. Доказывается следующее предложение: Если производная $dP(x)/dx\in L_2(0,1)$, $P(0)\neq 0$ и $P(1)\neq 0$, то система функций (1) вместе с функцией $\overline{P(1-x)}$ образует базис в пространстве $L_2(0,1)$. В формулировке этой теоремы функцию $\overline{P(1-x)}$ можно заменить на любую функцию $e^{i\lambda_0 x}$, где $\lambda_0\neq\lambda_n\ (n=1,2,\ldots)$. Теорема обобщается на случай, когда функция $P(x)$ имеет на концах отрезка (0, 1) нули одинаковой целой конечной кратности r, $P(x)$ $r+1$ раз дифференцируема и $P^{(r+1)}(x)\in L_2(0,1)$. При этих условиях доказывается, что к системе (1) можно добавить $r+1$ функций (например, функции $e^{i\lambda_{-k}x}\ (k=0,1,2,\ldots,r)$, где $\lambda_{-k}\ (k=0,1,\ldots,r)$ — произвольные различные числа, не являющиеся нулями функции $p(\lambda)$), так чтобы полученная система стала базисом пространства $L_2(0,1)$. Приводится метод построения биортогональной системы к указанному базису. Приводятся некоторые приложения перечисленных предложений. В частности, устанавливается одна теорема о полноте собственных и „присоединенных" функций граничной задачи: $y''-p(x)y+\lambda^2 y=0$ $(p(x)\in L_2(0,1))$; $y(0)=1$, $y'(0)=h$; $y'(1)=h_1 y(1)$. И. Ц. Гохберг

11795. Дуальные ряды Фурье—Бесселя. Кук, Трантер (Dual Fourier—Bessel series. Cooke J. C., Tranter C. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 3, 379—386 (англ.)

Рассматривается задача вычисления коэффициентов дуального ряда Фурье-Бесселя

$$F(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n^p J_\nu(a_n r),\quad \text{если } 0<r<1,$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(a_n r),\quad \text{если } 1<r<a,$$

где $a=a_n$ — n-й положительный корень уравнения $J_\nu(\alpha a)=0$, $|p|<-1$, $\nu>-1$, $F(r)$ — заданная функция. Доказывается, что если положить

$$a_n=\frac{1}{a_n^{1+p/2}J_{\nu+1}^2(a_n a)}\sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{\nu+2m+p/2}(a_n),$$

то коэффициенты b_m должны удовлетворять системе уравнений

$$b_s-\sum_{m=0}^{\infty} b_m L_{m,s}^{(\nu,p)}=\frac{8}{a^2}\left(s+\frac{\nu+1}{2}+\frac{p}{4}\right)E(\nu,s,p)\quad (1)$$
$$(s=0,1,2,\ldots),$$

где

$$E(\nu,s,p)=\frac{\Gamma(\nu+s+1)\,2^{-p/2}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(s+1+p/2)}\int_0^1 r^{\nu+1}(1-r^2)^{p/2}\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(-s,1+\frac{p}{2}+\nu,\nu+1,r^2\right)F(r)\,dr,$$

$$L_{m,s}^{(\nu,p)}=(-1)^{m+s+1}\frac{8\left(s+\frac{\nu+1}{2}+\frac{p}{4}\right)\sin\frac{p\pi}{2}}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^\infty \frac{K_\nu(t)\,I_{\nu+2m+1+p/2}\left(\frac{t}{a}\right)I_{\nu+2s+1+p/2}\left(\frac{t}{a}\right)}{tI_\nu(t)}\,dt.$$

Система (1) решается методом последовательных приближений. Решение имеет вид:

$$b_s=\sum_{r=0}^{\infty} b_s^{(r)},\quad \text{где}\quad b_s^{(0)}=\frac{8}{a^2}\left(s+\frac{\nu+1}{2}+\frac{p}{4}\right)E(\nu,s,p),$$

$$b_s^{(r)}\sum_{m=0}^{\infty} L_{m,s}^{(\nu,p)}\,b_m^{(r-1)}\ (s=0,1,2,\ldots,r=1,2,\ldots).$$

Величины $L_{m,s}^{(\nu,p)}$ вычисляются путем разложения в ряды по убывающим степеням a с коэффициентами, зависящими от интегралов $M_n^{(\nu)}=\int_0^\infty \frac{t^n K_\nu(t)\,dt}{I_\nu(t)}$. Приводится таблица значений $M_n^{(\nu)}$ при $\nu=\pm 1/2$, 0, 1 и $n=0,2,4,6,8,10$. В качестве примера рассматривается краевая задача для уравнения $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$ при условиях $v=1$, если $z=0$ и $0<r<1$; $\frac{\partial v}{\partial z}=0$, если $z=0$ и $1<r<a$, причем $\lim_{|z|\to\infty} v=0$.
Ю. Л. Рабинович

11796. Об одном применении цепных дробей в теории бесконечных рядов. Шалат (O jednej aplikácii reťazových zlomkov v teorii nekonečných radov. Šalát Tibor), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 3, 317—326 (чешск.; рез. русск., англ.)

Все числа, о которых идет речь в статье, вещественные. Пусть задан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (сходимость не предполагается); для $k=1,2,\ldots$ пусть задана последовательность чисел $M_k=\{c_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$. Всякому $x\in[0,1]$ поставим формально ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k(x)\,u_k$ следующим образом. Если $x=[0,n_1,n_2,\ldots]$ (цепная дробь), то положим $\varepsilon_k(x)=c_n^{(k)}$. Причем, если $x=[0,n_1,\ldots,n_m]$ рационально (>0), то $\varepsilon_k(x)=0$ для $k>m$; наконец, $\varepsilon_k(0)=0$. Пусть $\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x)\,u_k$.

I. Если $A_k=\sup_{n=1,2,\ldots}|c_n^{(k)}|$ и $\sum A_k|u_k|<+\infty$, то

$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ имеет интеграл Римана в пределах 0,1 (φ непрерывна в иррациональных точках).

II. Если, наоборот, существуют $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varepsilon_k'\}_{k=1}^{\infty}$ (ε_k, $\varepsilon_k' \in M_k$) так, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = -\infty,$$

то $\limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$, $\liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) = -\infty$ для всех $x \in [0, 1]$, за исключением множества первой категории.

Подобные результаты получил Хилл (Hill J. D., Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, 103—108). Хилл исходит из диадического разложения $x = \sum \alpha_k 2^{-k}$ и полагает $\varepsilon_k(x) = \alpha_k$. V. Jarník

11797 К. Коллоквиум по теории последовательностей, проходивший в Брюсселе 18—20 декабря 1957 г. (Colloque sur la théorie des suites tenu à Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957. (Centre belge rech. math.). Paris, Libr. Gauthier-Villars; Louvain (Belgique), Établissements Ceuterick, 1958, 167 p.) (франц.; нем. и англ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

11798. О некоторых соотношениях для многочленов Лежандра. Попов (Некои нови релации за полиномите на Legendre. Попов Благој С.), Годишен зб. филоз. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1957, **10**, 11—35 (македон.; рез. франц.)

Целью статьи является вывод некоторых новых соотношений для многочленов Лежандра. Выводятся наиболее общие формулы для нахождения производных многочленов Лежандра $P_n(x)$, а также соотношения, в которые входят определенные интегралы от произведения производных многочленов Лежандра. Кроме перечисленного выше, получена следующая формула:

$$\frac{d^r P_m(x)}{dx^r}\,\frac{d^s P_n(x)}{dx^s} = 2^r \sum_{k=0}^{m-r} \frac{A_{m-k}^{-r} A_{n-k}^{-s} A_{k,-r}}{A_{m+n-r-k}^{s}} \times$$

$$\times \frac{(m+n-r-s-2k)!}{(m+n-r+s-2k)!}\,\frac{2m+2n-2r-4k+1}{2m+2n-2r-2k+1} \times$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} r-s,\ k+r-m,\ {}^1/_2-s,\ -k, \\ n-k-s+1,\ r+k-m-n-s,\ {}^1/_2+r, \end{matrix}\ 1\right] \times$$

$$\times \frac{d^s P_{m+n-r-2k}(x)}{dx^s},$$

где

$$m-r \leqslant n-s, \quad A_s^n = \frac{({}^1/_2)s}{(n+s)!}, \quad A_{k,r} = \frac{({}^1/_2 - r)_k}{k!},$$

$$F\left[\begin{matrix} \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \\ a,\ b,\ c, \end{matrix}\ x\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k (\gamma)_k (\delta)_k}{(a)_k (b)_k (c)_k\, k!}\, x^k,$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1),$$

$$(\alpha)_0 = 1.$$

Эта формула позволяет вычислить некоторые производные многочленов Лежандра. Из резюме автора

11799. Производящие функции и присоединенные многочлены Лежандра. Брафман (Generating functions and associated Legendre polynomials. Brafman F.), Quart. J. Math., 1959, **10**, № 38, 156—160 (англ.)

Пусть $f_n(x)$ удовлетворяет формуле Родрига, т. е.

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} D_x^{(n)} \{(ax+b)^n F(x)\}, \qquad (1)$$

где a, b — постоянные, $F(x)$ — произвольное число раз дифференцируемая функция. В реферируемой работе установлено, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n f_n(x)_{p+1} F_q\left[\begin{matrix} -n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p; \\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q; \end{matrix}\ v\right] =$$

$$= (1-at)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \times$$

$$\times \left(-\frac{vt}{1-at}\right)^n f_n\left(\frac{x+bt}{1-at}\right), \qquad (2)$$

а также

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n f_n(x)_{p+2} F_q\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n,\ \alpha_1,\ \ldots,\alpha_p; \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q; \end{matrix}\ v\right] =$$

$$= (1-at)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \times$$

$$\times \left\{\frac{vt^2}{1-at^2}\right\}^n f_{2n}\left(\frac{x+bt}{1-at}\right), \qquad (3)$$

где ${}_pF_q\left[\begin{matrix} \alpha,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p; \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q; \end{matrix}\ v\right]$ — обобщенная гипергеометрическая функция, а $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$. Полагая в (1) $a=0$, $b=1$ и

$$f_n(y) = G(y)\, P_n^{(\alpha,\ -\alpha)}\{-y/\sqrt{1+y^2}\} = \frac{1}{n!} D_y^{(n)} H(y),$$

где

$$H(y) = \left\{\frac{1+y+\sqrt{1+y^2}}{1-y+\sqrt{1+y^2}}\right\}^{\alpha} \Big/ \sqrt{1+y^2},$$

$$G(y) = H(y)\,(1+y^2)^{-n/2}$$

и применяя формулы (2) и (3), автор получает соответствующие формулы для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\ -\alpha)}$.

Б. Л. Голинский

11800. Распространение интегральных свойств конических функций Мелера на функции Лежандра первого рода. Робен (Extension aux fonctions de Legendre de première espèce de résultats relatifs aux fonctions coniques de Mehler. Robin Louis), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 13, 1081—1083 (франц.)

Преобразование $n = -{}^1/_2 + ip$ переводит коническую функцию Мелера $K_p(\mu)$ в функцию Лежандра $P_n(\mu)$, причем интегральное уравнение Мелера

$$K_p(\nu) = \frac{\operatorname{ch}(\pi p)}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K_p(\mu)\, d\mu}{\mu+\nu}$$

и формула Мелера

$$\frac{1}{\mu+\nu} = \pi \int_0^{\infty} \frac{p \operatorname{sh}(\pi p)}{\operatorname{ch}^2(\pi p)} K_p(\mu) K_p(\nu)\, dp$$

переходят в уравнения

$$P_n(\nu) = -\frac{\sin \pi n}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{P_n(\mu)\, d\mu}{\mu+\nu},$$

$$\frac{i}{\mu+\nu}=-\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{(n+1/2)\cos\pi n}{\sin^2\pi n}P_n(\mu)P_n(\nu)\,dy,$$

где $n=-1/2+x+iy$, $|x|<1/2$, μ и ν не лежат на разрезе $(-\infty, -1)$. Из интегральной формулы Фурье – Мелера следует: $f(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\mu)\times$ $\times g(y-ix)\,dy$, где $g(y-ix)=(y-ix)\operatorname{th}\pi(y-ix)\times$ $\times\int_1^\infty P_n(\mu)f(\mu)\,d\mu$, причем $|x|<1/2$, а $f(\mu)$ – функция с ограниченной вариацией в интервале $1\leqslant\mu<\infty$ и такая, что $\int_1^\infty \frac{|f(\mu)|\,d\mu}{\mu^{1/2-|x|}}<\infty$. Доказывается, что функции $f(\mu)=1/(\mu+\nu)^\delta$ соответствует функция

$$g(y-ix)=$$
$$=\frac{\Gamma(\delta-1/2+x+iy)\,\Gamma(\delta-1/2-x-iy)(y-ix)\operatorname{th}\pi(y-ix)}{\Gamma(\delta)(\nu^2-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}\times$$
$$\times P_n^{-(\delta-1)}(\nu).$$

Ю. Л. Рабинович

11801. Ортогональные функции, k-е производные которых также ортогональны. Стейн (Orthogonal functions whose kth derivatives are also orthogonal. Stein F. Max), SIAM Rev., 1959, 1, № 2, 167—170 (англ.)

Доказывается теорема: Многочлены Эрмита, Якоби и Лагерра являются единственными многочленами, ортогональными относительно некоторого веса, производные любого порядка которых образуют ортогональные системы относительно весов, зависящих от порядка производных, и того же самого отрезка ортогональности, что и исходная система. Эта теорема не является новой; единственность этих систем, как указывает автор, непосредственно следует из хорошо известной теоремы, согласно которой указанные системы являются единственными системами многочленов, первые производные которых также ортогональны. Ортогональность систем, образованных производными любого порядка, была указана Паулаускасом (РЖМат, 1959, 3661). Новым результатом является легко доказываемое утверждение, что если $P_n^{(a,\,b)}(x)$ являются обобщенными многочленами Бесселя, т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению $x^2y''(x)+(ax+b)y'(x)-n(n+a-1)y(x)=0$, где n – неотрицательные целые числа, $P_n^{(a,\,b)}(x)$ образуют при интегрировании вдоль единичной окружности в комплексной плоскости ортогональную систему относительно веса $x^ae^{-b/x}$, то k-е производные их ортогональны относительно веса $x^{a+2k-2-b/x}$. Б. М. Гагаев

11802. Различные способы обозначения чисел Бернулли. Адриан (Die Bezeichnungsweise der Bernoullischen Zahlen. Adrian P.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1959, 59, № 2, 199—206 (нем.; рез. франц., итал., англ.)

11803. Новые формулы, относящиеся к числам Стирлинга. Митринович (Nouvelles formules relatives aux nombres de Stirling. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 12, 1754—1756 (франц.)

Числа Стирлинга S_n^m определены равенством $\prod_{m=0}^{n-1}(x-m)=\sum_{m=1}^{n}S_n^m x^m$ и удовлетворяют соотношению $S_{n+1}^m=S_n^{m-1}-nS_n^m$. Автор строит полиномы $P_1, \ldots, P_s$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) P_j – полином степени $j-1$ с рациональными коэффициентами; 2) для каждого натурального n $S_n^{n-j}=\binom{n}{j+1}P_j(n)$ $(j=1, \ldots, s)$; 3) для $j=1, 3, 5, 7$ $P_j(0)=P_j(1)=0$. J. Mařík

11804. О числах Стирлинга первого рода и полиномах Стирлинга. Митринович (O Stirling-ovim brojevima prve vrste i Stirling-ovim polinomima. Mitrinović Dragoslav S. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1959, № 23, 19 s.) (сербо-хорв.; рез. франц.)

Числа Стирлинга первого рода S_n^m, определяемые из формулы $\prod_{m=0}^{n-1}(x-m)\equiv\sum_{m=1}^{n}S_n^m x^m$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$S_{n+1}^m=S_n^{m-1}-nS_n^m. \qquad (1)$$

Даются решения S_n^{n-1}, S_n^{n-2}, ... уравнения в конечных разностях (1). Из резюме автора

11805. q-числа и многочлены Бернулли. Аль-Салам (q-Bernoulli numbers and polynomials. Al-Salam Waleed A.), Math. Nachr., 1959, 17, № 3-6, 239—260 (англ.)

Под q-аналогом функции $f(x)$ или полинома $P_n(x)$ будем понимать функцию $f(x, q)$ или полином $P_n(x, q)$, которые обладают свойством: $\lim_{q\to1}f(x, q)\equiv f(x)$, $\lim_{q\to1}P_n(x, q)\equiv P_n(x)$. q-аналогами классических специальных функций и полиномов занимались в разное время Джексон, Хан, Сегё, Карлиц и др. Если под q-аналогом целого положительного числа n понимать $[n]=\frac{q^n-1}{q-1}$, $0<q<1$, то q-аналогом n-факториала будет $[n]!=[n][n-1]\ldots[1]$, $[0]!=1$, а q-аналогом e^x может служить функция $e(x, q)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{[r]!}\varphi_r(q)$, где $\varphi_r(1)\equiv1$. Автор рассматривает два случая: $\varphi_r(1)\equiv1$, обозначая $e(x, q)$ в этом случае через $e(x)$, и $\varphi_r(q)=q^{\frac{1}{2}r(r-1)}$, обозначая $e(x, q)$ через $E(x)$.

Под q-аналогом бинома Ньютона автор понимает

$$[x+a]^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}a^{n-k}x^k$$

или

$$\{x+a\}^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{k(k-n)}a^{n-k}x^k,$$

где

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{[n][n-1]\ldots[n-k+1]}{[k]!},\quad\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=1.$$

В реферируемой работе рассмотрены q-аналоги чисел Бернулли, которые определяются как коэффициенты разложения

$$\frac{t}{e(t)-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{[k]!}B_k \qquad (1$$

или

$$\frac{t}{E(t)-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{[k]!}q^{\frac{1}{2}k(k-1)}b_k \qquad (1$$

(B_k и b_k — рациональные функции от q) и q-аналоги полиномов Бернулли, которые определяются как коэффициенты разложения

$$\frac{te(tx)}{e(tx)-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)\frac{t^k}{[k]!} \qquad (2)$$

или

$$\frac{tE(tx)}{E(t)-1}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x)\frac{t^k}{[k]!}q^{\frac{1}{2}k(k-1)}, \qquad (2')$$

причем

$$b_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}b_k\,x^{n-k}\,q^{k(k-n)},$$

$$B_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}B_k\,x^{n-k}.$$

Доказаны свойства q-чисел и q-полиномов Бернулли, аналогичные соответствующим свойствам классических чисел и полиномов Бернулли. Рассмотрены также q-числа Бернулли высших порядков $b_n^{(z)}$, как коэффициенты разложения (1), левая часть которого возведена в степень z (z — произвольное комплексное число), и $B_n^{(z)}(x)$, являющихся коэффициентами разложения (2), левая часть которого есть $\frac{t^z e(tx)}{(e(tx)-1)^z}$. В работе введен аддитивный оператор E, определяемый как

$$Ex^m=\sum_{r=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}x^r=[x+1]^m,$$

и доказаны:

Теорема 1: Необходимое и достаточное условие, чтобы $Ef_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}f_k(x)$, заключается в том, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ была последовательностью q-полиномов Аппеля, т. е. чтобы $D_q f_n(x)=[n]f_{n-1}(x)$, где $D_q f(x)=\frac{f(xq)-f(x)}{xq-1}$;

Теорема 2: Если

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\frac{t^n}{[n]!},$$

то $\{f_n(x)\}$ — последовательность q-полиномов Аппеля и $E_x F(x,t)=e(t)F(x,t)$. Б. Л. Голинский

11806. Некоторые q-многочлены двух переменных. Карлиц (Some q-polynomials in two variables. Carlitz Leonard), Math. Nachr., 1959, 17, № 3-6, 224—238 (англ.)

Полиномы

$$H_m(x)\equiv H_m(x,q)=\sum_{r=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}x^r, \qquad (1)$$

$$G_m(x)\equiv G_m(x,q)=\sum_{r=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}q^{r(r-m)}x^r, \qquad (2)$$

где

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}=\prod_{k=1}^{r}(1-q^{m-k+1})/1-q^k,$$

которые можно рассматривать как q-аналоги многочленов $(1+x)^m\left(\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}=\binom{m}{r}\right)$, изучались Сегё, Хаоном, Вигертом, автором и др.

В реферируемой работе изучаются двумерные аналоги полиномов (1) и (2)

$$H_{m,n}(x,y)=\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}q^{rs}x^r y^s$$

$$G_{m,n}(x,y)=\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}q^{r(r-m)+s(s-n)-2sr}x^r y^s$$

и для них установлены формулы, аналогичные тем, которые ранее были доказаны для одномерных многочленов (формула произведения, рекуррентные соотношения, производящие функции и др.). Так, например, если производящей функцией для полиномов $H_m(x)$ является $e(t)e(xt)=\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\,t^m/(q)_m$, где

$$e(t)=\prod_{r=0}^{\infty}(1-q^r t)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}t^n/(q)_n,$$

$$(q)_n=(1-q)\dots(1-q^n),\ (q_0)=1,$$

то производящей функцией для $H_{m,n}(x,y)$ будет

$$\frac{e(t)e(z)e(xt)e(yz)}{e(xyzt)}=\sum_{m,n=0}^{\infty}H_{m,n}(x,y)\frac{t^m z^n}{(q)_m(q)_n},$$

а для $G_{m,n}(x,y)$

$$\frac{e(q^{-1}xyzt)}{e(t)e(z)e(xt)e(yz)}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}q^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{t^m z^n}{(q)_m(q)_n}\times$$

$$\times G_{m,n}(x,y).$$

На основании этих формул установлена связь между двумерными и одномерными многочленами

$$H_{m,n}(x,y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\min(m,n)}(-1)^r q^{\frac{1}{2}r(r-1)}(q)_r\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}x^r y^r H_{m-r}(x)H_{n-r}(y),$$

$$G_{m,n}(x,y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\min(m,n)}q^{r(r-m-n)}(q)_r\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}x^r y^r G_{m-r}(x)G_{n-r}(y).$$

Получены следующие формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_{m,n}(-xe^{i\varphi},-ye^{-i\varphi})f(\varphi)\,d\varphi=(q^{1/2}x)_m(q^{1/2}y)_n,$$

$$\int_0^{\infty}G_{m,n}(-xt,-yt)p(t)\,dt=$$

$$=q^{-1/2}(q^{-m-1/2}x)_m(q^{-m+3/2}y)_n.$$

Рассмотрены и другие многочлены. Б. Л. Голинский

11807 Д. Об одном классе обобщенных дзета-функций. Винкамп (Über eine Klasse verallgemeinerter Zetafunktionen. Wienkamp Ruth.—Diss., Fak. allgem. Wiss. Techn. Hochschule Aachen, 1959. Heidel-

berg, 1958, 47 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, B, № 19, 1757 (нем.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

11808. О некоторых направлениях исследований в теории интегральных преобразований. Гриффит (On some aspects of integral transforms. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1959, **93**, № 1-2, 1—9 (англ.)

Краткий обзор и библиографические указания.

В. В. Немыцкий

11809. Распространение теоремы Лёвнера на интегральные операторы. Бенсон (Extensions of a theorem of Loewner on integral operators. Benson Donald C.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 2, 365—377 (англ.)

Пусть $x(t)$, $y(t)$ определены, непрерывны и действительны для всех действительных t. Пусть точка P не лежит на кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $\theta_P(t)$ — аргумент вектора, идущего из точки P в точку на кривой. $\theta_P(t)$ определяется как непрерывная функция. Будем говорить, что кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$ положительного направления, если существует постоянная $k\leqslant 0$ такая, что для каждой точки P, не лежащей на кривой, и для всех действительных чисел $\gamma, \delta\ (\gamma\leqslant\delta)$ $\theta_P(\delta)-\theta_P(\gamma)\geqslant k$. Кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$ называется слабо положительно направленной, если сказанное выше имеет место для всех P, не принадлежащих замыканию кривой.

В работе доказана теорема: Пусть $k(t)\in L(0,\infty)$ и $x(t)$ почти периодическая функция. Положим

$$y(t)=-\int_0^\infty k(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

($y(t)$ также почти периодическая) и рассмотрим кривую $x=x(t)$, $y=y(t)$. Для того чтобы эта кривая была слабо положительно направленной, необходимо и достаточно, чтобы после возможного изменения на множестве меры нуль $k(t)$ была аналитической и чтобы $k'(t)$ допускала представление $k'(t)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\mu(s)$ с неубывающей $\mu(s)$. Эта теорема является обобщением одной теоремы Левнера, который рассматривал случай периодической функции $x(t)$ с периодом, равным единице, и в интеграле (1) брал пределы от 0 до 1.

Б. М. Левитан

11810. Случайные преобразования Фурье. Хант Г. А. (Hunt G. A.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 6, 87—114

Перевод из Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **71**, 38—69

11811. Свертка. Шварц (Convolution. Schwartz L. Les cours de Sorbonne. Méthodes math. de la physique, III, Paris, 1955, 40 p.) (англ.)

Изучаются прямое произведение и произведение свертки распределений (обобщенных функций). В частности, имеются ценные примеры. Обращается внимание на отдельные семейства распределений, для которых свертки всегда определены. Эти алгебры сверток имеют приложения в физике, решении линейных дифференциальных уравнений, исчислении Хевисайда, интегральных уравнениях Вольтерра.

I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 287.

11812. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 1, 26—29

Работа посвящена асимптотике интегралов $I=I(h,x_0;f)=\frac{1}{h}\int_a^b \omega\left(\frac{x-x_0}{h}\right)f(x)\,dx$, где h — малый параметр $(h>0)$, $a<x_0<b$, функции $f(x)$ ограничена в (a,b) и имеет в точке $x=x_0$ дифференциал $n+1$-го порядка, а функция $\omega(\xi)$ абсолютно интегрируема на любом конечном интервале и допускает при $\xi\to\pm\infty$ разложение

$$\omega(\xi)=\sum_{k=1}^n q_k^+/\xi^k+\omega_n^+(\xi) \quad \text{при } \xi\to+\infty \quad \text{и}$$

$$\omega(\xi)=\sum_{k=1}^n q_k^-/\xi^k+\omega_n^-(\xi) \quad \text{при } \xi\to-\infty,$$

$$\omega_n^+(\xi)=O(1/\xi^{n+1}), \quad \omega_n^-(\xi)=O(1/\xi^{n+1}).$$

Пусть

$$f_k(x)=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0).$$

$$\Omega_k(\xi)=\xi^k\omega_k(\xi)=\begin{cases}\xi^k\omega_k^+(\xi) & \text{при } \xi>0,\\ \xi^k\omega_k^-(\xi) & \text{при } \xi<0.\end{cases}$$

$$\overline{\Omega}_k(\xi)=\xi^k\omega_{k+1}(\xi).$$

$$A_k=-(q_{k+1}^+-q_{k+1}^-)\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!};$$

$$B_k=\int_{-1}^{1}\Omega_k(\xi)\,d\xi+\int_1^\infty[\overline{\Omega}_k^+(\xi)+\overline{\Omega}_k^-(-\xi)]\,d\xi;$$

$$C_k=[B_k+q_{k+1}^+\ln(b-x_0)-q_{k+1}^-\ln(x_0-a)]\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+$$

$$+q_{k+1}^+\int_{x_0}^b\frac{f_k(x)\,dx}{(x-x_0)^{k+1}}+q_{k+1}^-\int_a^{x_0}\frac{f_k(x)\,dx}{(x-x_0)^{k+1}}-$$

$$-\sum_{s=0}^{k-1}\frac{f^{(s)}(x_0)}{s!\,(k-s)}\left[\frac{q_{k+1}^+}{(b-x_0)^{k-s}}-\frac{q_{k+1}^-}{(x_0-a)^{k-s}}\right].$$

Доказывается, что при $h\to 0$ имеет место асимптотическое разложение $I=\sum_{k=0}^n(A_k\ln h+C_k)h^k+h^n\rho(h)$, где $\lim\limits_{h\to 0}\rho(h)=0$. Если $q_k^+=q_k^-=q_k$, то все $A_k=0$, а

$$C_k=B_k\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+q_{k+1}\overline{\int_a^b\frac{f_{k-1}(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\,dx}-$$

$$-q_{k+1}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{f^{(s)}(x_0)}{s!\,(k-s)}\left[\frac{1}{(b-x_0)^{k-s}}-\frac{1}{(a-x_0)^{k-s}}\right],$$

где черта сверху означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Коэффициенты B_k могут быть записаны в виде

$$B_k=\overline{\int_{-\infty}^\infty\Omega_k(\xi)\,d\xi}=\overline{\int_{-\infty}^\infty\xi^k\omega_k(\xi)d\xi}.$$

В частности, при $k=0$ имеем

$$B_0=\int_{-\infty}^\infty\omega(\xi)\,d\xi; \quad C_0=B_0f(x_0)+q_1\overline{\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{x-x_0}}$$

Ю. Л. Рабинович

11813. Операторное исчисление и его связь с современной математикой. Микусинский (Operatorenrechnung und ihre Beziehungen zur modernen Mathematik. Mikusiński Jan), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 381—384 (нем.)

11814. Современное операторное исчисление. Берг (Moderne Operatorenrechnung. Berg Lothar),

Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 342—346 (нем.)
Обзорная статья.

11815. Асимптотические разложения функциональных трансформант. Родеро-Карраско (Desarrollos asintóticos de transformaciones funcionales. Rodero Carrasco Juliám), Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur. Madrid, 1959, 53, № 2, 269—347 (исп.)

Рассматриваются функциональные преобразования

$$f(z)=\int_0^\infty \Phi(zt)\,\alpha_1(t)\,dt \qquad (1)$$

с ядром $\Phi(\tau)$, удовлетворяющим следующим условиям: а) $\Phi(\tau)$ голоморфно в угле $|\arg\tau|\leqslant 2\delta$, б) в замкнутом угле $|\arg\tau|\leqslant\delta$ при $\tau\to\infty$ $\Phi(\tau)=o(\tau^q)$, где $q\geqslant 0$, в) в любом меньшем угле $|\arg\tau|\leqslant\delta'<\delta$ при любом $p>0$ и $\tau\to\infty$ $\Phi(\tau)=o(\tau^{-p})$ равномерно относительно $\arg\tau$, г) в углах $\delta<|\arg\tau|<2\delta$ при $\tau\to\infty$ и $0<u\leqslant 1$ $\Phi(\tau u)=o(\Phi(\tau)\tau^{q'}u^{\beta})$, где $q'\geqslant 0$, $\beta>-1$. Моменты μ_n и примитивные n-го порядка $\Phi^{-n}(\tau)$ функции $\Phi(\tau)$ выражаются интегралами:

$$\mu_n=\int_0^\infty \tau^n\Phi(\tau)\,d\tau;\quad \Phi^{-n}(\tau)=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_\tau^\infty(\tau'-\tau)^{n-1}\Phi(\tau')\,d\tau'.$$

Функция $\alpha_1(t)$ и ее производные $\alpha_1^{(n)}(t)$ подчиняются условиям:

$$|\alpha_1^{(n)}(t)|<M_n|M(t)|;\ |\alpha_1^{(n)}(t)-\alpha_1^{(n)}(0)|<M_n'|M(t)|, \qquad (2)$$

где M_n и M_n' — постоянные, а функция $M(t)$ голоморфна при $|\arg t|<\delta$ и удовлетворяют следующим условиям:

а) $|M(re^{\theta i})|<|M(r'e^{\theta i})|$, если $r<r'$;

$|M(re^{\theta i})|<|M(re^{\theta' i})|$, если $|\theta|<|\theta'|<\delta$.

б) Существует такая неотрицательная функция $\chi(\varphi)$, что вдоль луча $\arg t=\varphi_1$ при $|\varphi+\varphi_1|<\delta$, любых $\varepsilon>0$, $p>0$ и $|t|>H_1(\varepsilon,p,\varphi,n)$

$$|M[\chi(\varphi)t]|\,|\Phi^{-n}(te^{\varphi i})|<\varepsilon|t|^{-p}, \qquad (3)$$

где n — любое натуральное число. Положив

$$g(\varphi,\varphi_1;n)=\int_0^\infty |M[\chi(\varphi)te^{\varphi_1 i}]\,\Phi^{-n}(te^{(\varphi+\varphi_1)i})|\,dt, \qquad (4)$$

мы допускаем, что существует функция $g(\varphi)>0$ и постоянные C_n такие, что

$$g(\varphi,\varphi_1;n)<C_n g(\varphi+\varphi_1),\quad \text{если } |\varphi+\varphi_1|<\delta. \qquad (5)$$

При этих предположениях интеграл (1) определяет в угле

$$|\arg z+\varphi_1|<\delta \qquad (6)$$

голоморфную функцию $f(z)$. В подобласти угла (6), определяемой условиями

$$|z|\geqslant\frac{1}{\chi(\arg z)};\quad |z|\geqslant g(\arg z+\varphi_1), \qquad (7)$$

при $z\to\infty$ имеет место асимптотическое разложение $f(z)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mu_\nu}{\nu!}\frac{\alpha_1^{(\nu)}(0)}{z^{\nu+1}}$. Далее дается оценка погрешности $R_n(z)=f(z)-\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{\mu_\nu}{\nu!}\frac{\alpha_1(0)}{z^{\nu+1}}$. Подробно рассматриваются частные случаи ядер $\Phi(t)$, например, $\Phi(t)=t^{\lambda}e^{-t^{1/\alpha}}$, где $\alpha>0$. В области $|z|>g(\arg z)$ при $z\to\infty$

$$\int_0^\infty (zt)^{\lambda}e^{-(zt)^{1/\alpha}}\alpha_1(t)\,dt\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\alpha\lambda+\alpha\nu)}{\nu!}\frac{\alpha_1^{(\nu)}(0)}{z^{\nu+1}}, \qquad (8)$$

причем $|\alpha_1^{(n)}(t)|<M_n$, $|\alpha_1^{(n)}(t)-\alpha_1^{(n)}(0)|<M_n'$. Если при той же функции $\Phi(t)$ положить $M(t)=e^{kt^{1/\alpha}}$, то разложение (8) имеет место в области, определяемой условиями (7). Ю. Л. Рабинович

11816. Об одном общем преобразовании типа Гаусса. Раджагопал (A general transform — Gauss transform. Rajagopal A. K.), Proc. Indian Acad. Sci., 1959, A50, № 2, 143—148 (англ.)

Рассматриваются полиномы $p_n(x)=\frac{1}{K_n\omega(x)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\times$ $\times[(ax^2+bx+c)^n\omega(x)]$, где $\omega(x)=e^{-\int^x\frac{pt+q}{at^2+bt+c}dt}$, a, b, c, p, q — постоянные. В некотором промежутке (α,β) выполняются условия ортогональности $\int_\alpha^\beta p_n(x)\,p_m(x)\times$ $\times\omega(x)\,dx=\lambda_n\delta_{mn}$, где

$$\lambda_n=\frac{(-1)^n}{K_n}\int_\alpha^\beta\omega(x)(ax^2+bx+c)^n\frac{d^np_n(x)}{dx^n}\,dx.$$

Последовательности интегралов $\int_\alpha^\beta\omega(x)\,p_n(x)\,f(x)\,dx=$ $=T_1\{f(x)\}=f_1(n)$; $\int_\alpha^\beta p_n(x)\,f(x)\,dx=T_2[f(x)]=f_2(n)$ автор называет трансформантами Гаусса функции $f(x)$. Доказываются теоремы:

(А, а). Если $\lim\limits_{x\to\alpha,\,\beta}[(ax^2+bx+c)\omega(x)f(x)]=$ $=\lim\limits_{x\to\alpha,\,\beta}[(ax^2+bx+c)\omega(x)f'(x)]=0$, то

$$T_1\left\{\frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)f'(x)]\right\}=n[(n+1)a-p]f_1(n).$$

(А, б). Если

$$\lim_{x\to\alpha,\,\beta}[(ax^2+bx+c)f(x)]=\lim_{x\to\alpha,\,\beta}[(ax^2+bx+c)f'(x)]=0,$$

то

$$T_2\left\{\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)f'(x)+(px+q)f(x)]\right\}=$$

$$=(px+q)f(x)\rho_n(x)|_\alpha^\beta+n[(n+1)a-p]f_2(n).$$

(Б). Если $f(x)$ — функция с ограниченной вариацией и удовлетворяет условию $f_1(0)=\int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)\,dx=0$, то $T_1\{R^{-1}[f(x)]\}=\frac{T_1\{f(x)\}}{n[(n+1)a-p]}$, где $R^{-1}[f(x)]=$ $=\int_0^x\frac{ds}{(as^2+bs+c)\omega(s)}\int_a^s\omega(t)f(t)\,dt+C$.

Ю. Л. Рабинович

11817 К. Введение в практическое использование преобразования Лапласа. Дёч (Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace. Doetsch Gustav. Trad. de l'allem. Paris, Gauthier—Villars, 1959, viii, 199 p., 3500 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 39, 983 (франц.)

Перевод с немецкого (РЖМат, 1959, 3926 К).

11818 К. **Уравнение теплопроводности и преобразование Вейерштрасса. Уиддер** (The heat equation and the Weierstrass transform. Widder D. V. Proc. Conf. different. equations. College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 227—234) (англ.)

Изложение свойств преобразования Вейерштрасса с ядром $(4\pi)^{-1/2} e^{-(x-y)^2/4}$ и его отношение к уравнению теплопроводности. Более детальное изложение дается Хиршманом и Уиддером (РЖМат, 1956, 8125 К).

R. P. Boas

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 304.

11819 К. **Операционное исчисление. 5-е английское изд. Микусинский** (Operational calculus. 5th English ed. Mikusinski Jan. Transl. from the 2nd Polish ed. London, Pergamon Press; Warsaw, P. W. N., 1959, 495 pp., ill., 5 £), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 516, 10 (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11820. **Разложение волновых функций многоэлектронных систем в ряды Фока. Ермолаев А. М.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 22, 48—64 (рез. англ.)

Рассматриваются разложения волновых функций многоэлектронных систем в ряды вида

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{p(n)} a_{np}(\Omega)\, r^n \ln^p r,$$

где $a_{np}(\Omega)$ — конечные непрерывные однозначные функции на поверхности гиперсферы, удовлетворяющие некоторым условиям четности. Для коэффициентов $a_{np}(\Omega)$ получена бесконечная система уравнений Пуассона, допускающая рекуррентное решение. Для многих атомных систем разложение их волновых функций в окрестности особой точки уравнения Шрёдингера, которая отвечает одновременному столкновению всех частиц системы, может быть найдена в виде ряда указанного типа. Этот результат можно считать обобщением теоремы о разложении решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности регулярной особой точки.

Н. Я. Виленкин

11821. **Синтез четырехзвенных механизмов на основании гармонического анализа. Богдан Р. К., Пелекуди Хр.** Rev. mec. appl. (RPR), 1959, 4, № 4, 643—649

Перевод с румынского из Studii şi certetări mec. apl. Acad. RPR, 1959, 10, № 1 (РЖМех, 1960, 8487).

11822. **Приближенный метод для вычисления продуктов модуляции. Экстром** (An approximate method of computing modulation products. Ekstrom Joel L.), IRE Nat. Convent. Rec., 1959, 7, № 4, 183—188 (англ.)

Исследование выпрямления тока, состоящего из конечной суммы синусоидальных токов с несоизмеримыми частотами, приводит к рассмотрению интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ibx}}{x^{k+1}} \prod_{r=0}^{N} J_{m_r}(p_r x)\, dx,$$

которые называются продуктами модуляции. Здесь p_r и b — заданные числа, m_r и k — целые неотрицательные, причем k предполагается таким, что интеграл сходится. Автор отмечает известные частные случаи, когда интеграл вычисляется в явной форме, и предлагает для его приближенного вычисления при $N \geqslant 2$ следующий способ: исходя из степенных рядов для функций Бесселя $J_m(2x)$, надо их заменить на функции вида $\frac{x^m}{m!} e^{-\frac{x^2}{m+1}} - \frac{x^{m+4}}{2(m+1)(m+2)!} e^{-\frac{(3m+5)x^2}{3(m+1)(m+3)}}$, после чего интеграл вычислить не трудно. Приведенный численный пример дает значение интеграла с погрешностью 10%.

Э. Я. Риекстыньш

11823. **Анализ периодических явлений без интеграции. Лагасс, Лакост** (L'analyse sans intégration des phénomènes périodiques. Lagasse J., Lacoste R.) Rev. gén. électr., 1959, 68, № 11, 629—633 (франц.)

Рассматриваются методы разложения в ряды Фурье, применение которых позволяет вычислять коэффициенты Фурье, не прибегая к интегрированию.

В. В. Немыцкий

См. также: 11349, 11462, 11463, 11539, 11553, 11615—11617, 11826, 11829, 11869, 11947.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

11824. **Определение суммы и произведения на скаляр в терминах расстояния. Фреше** (Définitions de la somme et du produit par scalaire en termes de distance. Fréchet Maurice), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1958, 75, № 3, 223—255 (франц.)

Автор показывает, что для определения линейного нормированного пространства необязательно a priori определять действия сложения и умножения на скаляр. Эти действия можно определить, исходя из метрики пространства. Рассмотрены примеры. Указаны возможные применения к теории вероятностей.

Примечание референта. Аналогичные построения проводились С. Мазуром и С. Уламом (C. r. Acad. sci., 1932, 194, 946—948). Ими доказана теорема: В метрическом пространстве невозможно определить действия сложения и умножения на число двумя разными способами так, чтобы в обоих случаях оно превратилось в линейное нормированное пространство с одним и тем же нулевым элементом.

М. И. Кадец

11825. **Топологические пирамиды. Приложения к анализу. Бастиани** (Pyramides topologiques. Applications à l'analyse. Bastiani Andrée), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 2, 175—178 (франц.)

Пусть семейство (e_ι) $(\iota \in I)$ элементов векторного топологического пространства E и тотальное семейство $(\omega_\iota)(\iota \in I)$ элементов сопряженного пространства образуют биортогональную систему ($\langle e_\iota, \omega_\iota \rangle = 1$, $\langle e_\iota, \omega_j \rangle = 0$, $\iota \neq j$). Пусть E' — векторное подпространство, порожденное векторами (e_ι), S' — выпуклый конус, порожденный (e_ι) (симплициальная пирамида в E'), S — множество точек $x \in E$ таких, что $\langle x, \omega_\iota \rangle \geqslant 0$ для любого $\iota \in I$. Устанавливается, что если $C = H \cap S$ и $C' = H \cap S'$, где H — замкнутое подпространство конечной коразмерности, то C есть топологическая пирамида (замыкание пирамиды C'); более того, если C_1 и C_1' — пересечения какого-либо конечного семейства полупространств соответственно с C и C', то C_1 — топологическая пирамида и $C_1 = \overline{C}_1'$.

Как следствие отсюда формулируется обобщение одной теоремы Розенблюма (Rosenbloom, Bull. Soc., math. France, 1951—1952); указываются также некоторые другие приложения. С. Н. Крачковский

11826. Ряды Фурье. Шварц (Séries de Fourier. Schwartz L. Sorbonne, Paris, 1955, 32 p.) (англ.)

Ряды Фурье периодических функций и обобщенных функций, поточечная сходимость и сходимость в смысле обобщенных функций рядов Фурье, гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом и его полнота (доказательство через свертку обобщенных функций), полиномы Бернулли. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 287—288.

11827. Теоремы об аппроксимации для сдвигов функций. Эдуардс (Approximation theorems for translates. Edwards R. E.), Proc. London Math. Soc., 1959, 9, № 35, 321—342 (англ.)

Пусть $w(x)$ — непрерывная на $R=(-\infty,+\infty)$ функция; $w(x)\neq 0$ для всех $x\in R$. Обозначим через $C(w)$ банахово пространство всех комплексных непрерывных на R функций f таких, что существует предел $L(f)=\lim_{|x|\to\infty} f(x)/w(x)$, с нормой $\|f\|=\sup|f(x)/w(x)|$.

В первой части работы характеризуется линейное подпространство T_f пространства $C(w)$, порожденное функцией $f\in C(w)$ такой, что $f_a\in C(w)$ для всех $a\in R$, где $f_a(x)=f(x+a)$ $(x\in R)$, и функциями $f_a(a\in R)$. Предполагается, что $w(x)=O(e^{\varepsilon|x|})$ $(|x|\to\infty)$ для каждого $\varepsilon>0$ и что существует целое число k такое, что $|w(x)|\geqslant M(1+|x|)^k$, где $M>0$ может зависеть от k; пусть $k(w)$ обозначает наибольший из этих k (возможно и $k(w)=+\infty$). Доказывается:

Теорема 1. Пусть $k(w)\geqslant 0$, $f_a\in C(w)$ для всех $a\in R$ и для некоторого целого числа p $\|f_a\|=O[(1+|a|)^p]$, f определяет умеренную (tempered) обобщенную функцию, порядок преобразования Фурье $\hat{f}$ обобщенной функции f не превосходит $k(w)$, и носитель $\hat{f}$ совпадает с R. Тогда: 1) если $L(f)\neq 0$, то $T_f=C(w)$; 2) если $L(f)=0$, то $T_f=\{g\in C(w)\mid L(g)=0\}$. Доказательство использует известное следствие из теоремы Хана-Банаха и технику преобразования Фурье умеренных обобщенных функций.

Исследуется также и случай $k(w)<0$ (теорема 2). Во второй части работы рассматривается определенная на $R_+=(0,\infty)$ функция $f(x)=x^\alpha P(x)e^{-x}$, где α — комплексное число, а $P(x)=\sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ $(c_0\neq 0,\ c_n\neq 0$, $P(x)\neq 0$ для $x>0)$, и обозначается через $C(f)$ пространство всех непрерывных на R_+ функций g таких, что существуют пределы $\lim_{x\to+\infty} g(x)/f(x)$ и $\lim_{x\to 0+} g(x)/f(x)$. Исследуется приближение функций $g\in C(f)$ функциями вида $f(ax)$, где a пробегает некоторое множество A, являющееся множеством единственности для класса голоморфных на $\mathrm{Re}\,s>1$, ограниченные и непрерывные на $\mathrm{Re}\,s\geqslant 1$ функций (теорема 3). В конце работы даются некоторые применения к расширениям Карамата.

Опечатки: на стр. 325, в строках 16 и 11 снизу, вместо W следует читать w. I. Singer, S. Zaidman

11828. Новые формулы о перестановочных операторах второго порядка. Тоскано (Nuove formule sugli operatori permutabili di secondo ordine. Toscano Letterio. Matematiche, 1955, 10, 37—43) (итал.)

Если A и X удовлетворяют условию $AX-XA=1$, то автор пишет соотношение $(AX^{2-u}A)^n=(AX^{1-u})^n\times X^{un}(X^{1-u}A)^n$, где u — целое, а n — целое положительное число. Он использует это соотношение при $A=d/dx$, $X=x$ или $A=-x$, $X=d/dx$, чтобы получить тождества для функций, определенных как производные, главным образом полиномов Лагерра и Якоби. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 7, 716.

11829. Функциональный анализ и общая теория линейных преобразований. Орлич (Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen. Orlicz H. W.), Colloq. théorie suites. Bruxelles, 1957. Paris — Louvain, 1958, 131—147 (нем.)

В статье, имеющей обзорный характер, показывается на простых примерах, как известные общие понятия и теоремы линейного функционального анализа находят применения при изучении матричных методов суммирования числовых последовательностей. Нужные из функционального анализа понятия и теоремы коротко напоминаются. Большое внимание уделяется теории пространств Сакса (РЖМат, 1956, 8135), особенно полезной при изучении вопросов, связанных с ограниченными последовательностями в поле суммирования матричного метода. Рассматриваются проблемы трех типов, допускающие применений методов функционального анализа.

Применения первого типа опираются на известной теореме Банаха и Штейнгауса о сходимости последовательности линейных функционалов и на вычислении норм линейных функционалов. Изящным примером применения теории пространств Сакса является доказательство известной теоремы Шура, согласно которой для того чтобы матричный метод $A=(a_{n\nu})$ суммировал все ограниченные последовательности, необходимо выполнение условия $\lim_{n\to\infty}\sum_\nu |a_{n\nu}-a_\nu|=0$, где $a_\nu=\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}$.

Теоремы о совместности матричных методов суммирования составляют применения второго типа. Приводятся основные теоремы Мазура и Орлича о совместности данного метода с более сильными методами (РЖМат, 1956, 4607).

Применения третьего типа составляют разные вопросы о структуре полей суммирования, в частности теоремы о неравносильности методов суммирования, опирающиеся на принципе равносильности норм. Передоказывается теорема Катнера (Kuttner B., J. London Math. Soc, 1946, 21, 118 — 122) о несуществовании матричного метода, поле суммирования которого совпадало бы с полем сильного суммирования порядка α $(0<\alpha<1)$ метода арифметических средних. Излагается также краткое доказательство одной теоремы неравносильности Брудно (Брудно А. Л., Матем. сб., 1945, 16, 191 — 247).

В заключение приводится одна (пока не опубликованная) попытка классификации методов суммирования, принадлежащая Мазуру. Г. Ф. Кангро

11830. Об однозначной разрешимости и решении бесконечных систем линейных уравнений. Грибанов Ю. И., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 6, 1211—1213

Рассматриваются бесконечные системы линейных уравнений

$$x_m-\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n=h_m \quad (m=1,2,\ldots), \qquad (1)$$

где $\{h_m\}$ — элемент из данного банахова пространства числовых последовательностей l. Находятся необходимые и достаточные условия существования единственного решения $\{x_n\}\subset l$ при различных предположениях относительно матрицы $\left(a_{mn}\right)_{m,n=1}^{\infty}$. Эти предположения — некоторые модификации понятия вполне непрерывности матричного оператора $A=\left(a_{m,n}\right)_{m,n=1}^{\infty}$. Указываются способы решения системы (1). Ю. А. Казьмин

11831. О проекциях сепарабельных подпространств пространства (m) на (c). Мак-Вильямс (On projections of separable subspaces of (m) onto (c).

(McWilliams R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 6, 872—876 (англ.)

Основной результат: Если B — сепарабельное подпространство пространства (m), содержащее (c) в качестве собственного подпространства, то существует оператор проектирования P пространства B на (c) такой, что $\|P\| \leqslant 3$. Построен пример сепарабельного подпространства $B \supset (c)$, для которого норма каждой проекции на (c) не менее трех. М. И. Кадец

11832. Свойство расширения в комплексных банаховых пространствах. Хасуми (The extension property of complex Banach spaces. Hasumi Morisuke), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 2, 135—142 (англ.)

Говорят, что линейное нормированное пространство B обладает свойством расширения, если для любого нормированного пространства D каждое линейное отображение φ подпространства $D_1 \subset D$ в B может быть расширено на D с сохранением нормы. В частности, одномерное пространство обладает свойством расширения (теорема Хана — Банаха). Автор доказывает, что комплексное линейное нормированное проотранство обладает свойством расширения в том и только в том случае, когда оно изоморфно алгебраически и с сохранением нормы пространству всех комплекснозначных непрерывных функций $C(X)$, определенных на стоуновском пространстве X. М. И. Кадец

11833. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам. Кадец М. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 51—57

Пространство Банаха называется локально равномерно выпуклым, если для любых его элементов x и x_n из равенств $\|x_n\| = \|x\| = 1$ $(n = 1,2,3,\ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Доказана теорема: Любое сепарабельное пространство Банаха изоморфно некоторому локально равномерно выпуклому пространству. Д. П. Мильман

11834. Некоторые новые результаты о гладкости и округленности в нормированных линейных пространствах. Кли (Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces. Klee Victor), Math. Ann., 1959, 139, № 1, 51—63 (англ.)

Пусть E — хаусдорфово линейное пространство, C — выпуклое множество в E, F — линейное множество линейных функционалов на E; рассматриваются случаи, когда $F = E^*$ (пространство всех непрерывных линейных функционалов на E), $F = EC^*$ (пространство всех линейных функционалов на E, сужение которых на C непрерывно), $F = E^\#$ (пространство всех линейных функционалов на E). F-гиперплоскостью называется множество вида $f_r^{-1} = \{x \in E : fx = r\}$, где $f \in F$ $(f \neq 0)$, r — число; гиперплоскость $H = f^{-1}r$ называется опорной для C в точке $p \in C \cap H$, если C лежит по одну сторону от H и не содержится в H. Множество C F-гладко в точке p, если все F-гиперплоскости, опорные для C в точке p, имеют одно и то же пересечение с аффинным расширением C; множество C F-округлено в точке p, если всякая F-гиперплоскость, опорная для C в точке p, пересекает C только в p. Множество C называется F-гладким (F-округленным), если оно F-гладко (соответственно F-округлено) в каждой своей точке. Линейное нормированное пространство E называется F-гладким (F-округленным), если его замкнутый единичный шар обладает этим свойством. Пусть $p \in C$ и J — объединение всех линий L, для которых p является внутренней точкой множества $L \cap C$; говорят, что p окружена C, если J плотно в аффинном расширении C.

Основным содержанием раздела 1 является доказательство следующей аппроксимационной теоремы: Пусть C — ограниченное замкнутое выпуклое множество в сепарабельном банаховом пространстве E, p — точка, окруженная C, и $0 < \varepsilon < 1$; тогда существует EC^* — гладкий, $E^\#$ — округленный замкнутый выпуклый гомеоморф K множества C такой, что $p + \varepsilon(c - p) \subset K \subset C$. Кроме того, доказываются две теоремы, усиливающие результат Дея о перенормировке пространства (РЖМат, 1957, 8003) и одну теорему Мазура о гладкости выпуклого множества (Mazur S., Studia Math., 1933, 4, 70 — 84).

В разделе 2 рассматривается пространство K всевозможных непустых компактных выпуклых множеств $X, Y, \ldots$ из произвольного бесконечномерного банахова пространства E; метрика (хаусдорфова) в K определяется как бо́льшая из нижних граней чисел ε таких, что X находится в ε-окрестности Y, а Y — в ε-окрестности X. Пусть R (соответственно φ) — множество всех E^*-округленных (соответственно E^*-гладких) элементов из K. Доказывается, что K есть полное метрическое пространство и что множества R и φ образуют плотные G_δ в K. Как следствие отсюда устанавливается, что почти всякое (в смысле категории) $X \in K$ есть замыкание своих экстремальных точек.

Раздел 3 посвящен вопросу о том, в какой мере свойства гладкости и округленности нормированного линейного пространства E переносятся на фактор-пространство E/L. Доказывается, например, что если подпространство L рефлексивно, то из округленности гладкости E вытекают эти же свойства для E/L.

С. Н. Крачковский

11835. Биортогональные системы и рефлексивность банаховых пространств. Пták (Biorthogonal systems and reflexivity of Banach spaces. Pták Vlastimil), Чехосл. мат. ж., 1959, 9, № 3, 319—326 (англ.; рез. русск.)

Изучаются признаки рефлексивности банахова пространства E, связанные со свойствами биортогональных систем в E. Пусть $S = (e_i, f_j)$ $(e_i \in E;\ f_j \in E';\ i,j = 1,2,\ldots)$ — биортогональная система; она называется ограниченной, если существует число μ такое, что $|e_i| < \mu$, $|f_i| < \mu$ для любых i и j. Пусть $A(S)$ — замкнутое подпространство пространства E, порожденное последовательностью $e_1, e_2, \ldots$, $B_1(S)$ — сильно замкнутое подпространство пространства E', порожденное последовательностью $f_1, f_2, \ldots$, $B(S)$ — слабое замыкание $B_1(S)$ в E'. Доказываются следующие теоремы:

1. E рефлексивно в том и только том случае, когда для любой ограниченной биортогональной системы (e_i, f_j) последовательность $e_1 + \ldots + e_n$ неограничена.

2. E рефлексивно в том и только том случае, когда для любой ограниченной биортогональной системы (e_i, f_j) последовательность $f_1 + \ldots + f_n$ неограничена.

3. Следующие три условия эквивалентны: 1) E не рефлексивно; 2) существуют ограниченная биортогональная система (e_i, f_j) и число $\omega > 0$ такие, что для любой монотонной последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, стремящейся к 0, ряд $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ сходится и $|x| < \omega |\alpha_1|$; 3) существует ограниченная биортогональная система $S = (e_i, f_j)$, обладающая тем свойством, что если рассматривать ее как биортогональную систему в пространстве $E/B(S)$ (с нормой $\|x\|$), то найдется число $\eta > 0$ такое, что $\left\| \sum_1^\infty \lambda_i e_i \right\| \geqslant \eta \sum_1^\infty \lambda_i$ для любой последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_1^\infty \lambda_i < \infty$.

Основная идея доказательства одна и та же для всех трех теорем, и их доказательство ведется одновременно; используемый метод развит в одной из предыдущих работ автора (РЖМат, 1955, 4545).

С. Н. Крачковский

11836. Относительно чебышевских множеств. Константинеску Флорин, Докл. АН СССР, 1960, 130, № 1, 21—22

Делается попытка распространить на неограниченные множества теорему 2 Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина (РЖМат, 1958, 10017), характеризующую класс ограниченных чебышевских множеств в банаховом пространстве X_n.

Примечание референта. В статье (РЖМат, 1960, 4236) Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин указали на ошибочность своей теоремы 2. Там же ими дана характеристика всех чебышевских множеств в X_n (без предположения об ограниченности). В. Н. Никольский

11837. О расширении линейных функционалов. Зингер (Sur l'extension des fonctionnelles linéaires. Singer Ivan), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 2, 99—106 (франц.)

Пусть E — пространство Банаха, M — подпространство E, E^* и M^* — сопряженные соответственно к E и M пространства. Вместе с данным множеством $\Phi \subset M^*$ автор рассматривает множество $F_\Phi \subset E^*$ всех расширений функционалов φ из Φ до функционалов f из E^* таких, что $\|\varphi\| = \|f\|$. Доказывается, что некоторые свойства сохраняются при переходе от Φ к F_Φ и обратно. Например, Φ выпукло, φ слабо замкнуто, Φ является экстремальным множеством (в смысле A. Ghika; РЖМат, 1957, 600) для сферы S_{M^*} в M^* тогда и только тогда, когда φ обладает соответствующим свойством. Если φ является экстремальной точкой сферы S_{M^*}, то множество $F_{\{\varphi\}}$ содержит по крайней мере одну экстремальную точку сферы S_{E^*}, но может содержать и неэкстремальные точки.

Примечание референта. Доказательство предложения „если F_Φ слабо замкнуто, то Φ слабозамкнуто" (теорема 2) не корректно. Автор предполагает, что единичная сфера в E^* слабо замкнута в смысле сходимости последовательностей. В случае нерефлексивных или несепарабельных пространств E, это вообще говоря, неверно. Референту неизвестно, верна ли в общем случае теорема 2, а также теорема 3 (касающаяся регулярной выпуклости). С. Bessaga

11838. Некоторые замечания о пространствах Сакса. Орлич, Птак (Some remarks on Saks spaces. Orlicz W., Pták V.), Studia math., 1957, **16**, № 1, 56—68 (англ.)

Г. М. Фихтенгольц (Матем. сб., 1938, **4**, 193 — 214 и 214 — 226) исследовал свойства семейств дистрибутивных функционалов и операций непрерывных в обобщенном смысле и установил ряд основных результатов.

Реферируемая работа, как и ей предшествующие (Orlicz W., Studia math., 1950, **11**, 237 — 272; РЖМат, 1956, 8135), посвящена дальнейшему изучению этого же вопроса с помощью устанавливаемых авторами свойств пространств Сакса.

Пусть $X = \{x\}$ — линейное нормированное пространство и $\|\ \|$ — его норма (B-норма). В этом пространстве вводится другая „звездная" B-норма или, более обще, F-норма $\|\ \|^*$, последняя, вообще говоря, не однородна, но непрерывна относительно умножения на вещественные числа. Предполагается, что норма $\|\ \|$ не слабее нормы $\|\ \|^*$ ($\|x\|^* \leqslant \|x\|$). Пусть $X_s(\omega)$ — единичная сфера X_s пространства X, $X_s = X_x(\|x\| \leqslant 1)$, в метрике $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|^*$, а $X(\omega)$ — само пространство X в новой метрике. Если пространство $X_s(\omega)$ — полно, то оно называется пространством Сакса. Пусть Y, $Y(\omega)$, $Y_s(\omega)$ — сопряженные пространства (пространства дистрибутивных и непрерывных функционалов) к пространствам X, $X(\omega)$, $X_s(\omega)$ соответственно.

В § 1 исследуются взаимосвязи между „звездными" нормами пространств Сакса и, например, следующими свойствами: A. Пусть $U(x)$ — дистрибутивная операция из пространства X в пространство Банаха Z и для каждого линейного функционала $\eta \in Z^*$ функционал $\eta[U(x)] \in Y_s(\omega)$, тогда операция U непрерывна на $X_s(\omega)$. $\sum_1$: Для каждого $x_0 \in X_s$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|x\|^* < \delta$, $x \in X_s$, существуют $x_1, x_2 \in X_s$ такие, что $x = x_1 - x_2$ и $\|x_0 - x_1\|^* < \varepsilon$, $\|x_0 - x_2\|^* < \varepsilon$. $\sum_{1g}$: Для каждого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X_s(\omega)$ существует линейное сепарабельное подпространство X_0' пространства $X(\omega)$ такое, что $X_{0s}'(\omega) = X_s X_0'$ обладает свойством $\sum_1$. Устанавливаются теоремы:

1.1. Пространство $Y_s(\omega)$ замкнуто в Y. Не для всякого замкнутого подпространства $Y_0 \subset Y$ существует такая „звездная" норма, что $Y_s(\omega) = Y_0$

1.2. Пусть пространство Сакса $X_s(\omega_0)$, порожденное B-нормой $\|\ \|_0^*$, обладает свойством A и $Y_s(\omega) \subset Y_s(\omega_0)$; тогда норма $\|\ \|_0^*$ не слабее нормы $\|\ \|^*$, породившей $X_s(\omega)$.

1.3. Пусть пространство Сакса $X_s(\omega)$ обладает свойством $\sum_{1g}$, тогда оно обладает свойством A.

1.4. Если все „звездные" B-нормы, вводимые в пространство X, таковы, что соответствующие им пространства $X_s(\omega)$ будут пространствами Сакса с одним и тем же сопряженным пространством $Y_s(\omega)$, то среди этих норм существует не более одной B-нормы (с точностью до эквивалентности норм на X_s), в которой $X_s(\omega)$ обладает свойством $\sum_{1g}$ или $\sum_2$ (по поводу определения этого свойства см. первую цит. работу Орлича).

В § 2 указывается общий метод введения „звездных" норм в пространство X: Пусть Y_0 — тотальное множество линейных функционалов, замкнутое в Y, а $B \subset Y_0$ — его базис, т. е. множество функционалов с нормой, не большей единицы, линейная оболочка которого плотна в Y_0; тогда $\|x\|^* = \sup_{y \in B} |y(x)|$. Устанавливается ряд свойств этой нормы, например:

2.1. Если B — компактно, то $X_s(\omega)$ будет пространством Сакса тогда и только тогда, когда оно компактно.

В заключение рассматриваются различные „звездные" нормы и свойства соответствующих $X_s(\omega)$ в пространствах: ограниченных последовательностей элементов банахова пространства, m, l, $L^p(p > 1)$, M^* и в пространстве ограниченных и непрерывных функций на открытом промежутке. И. А. Эзрохи

11839. Пространства непрерывных функций. I. (M_0-пространства). Семадени, Збиевский (Spaces of continuous functions. I. (M_0-spaces). Semadeni Z., Zbijewski P.), Studia math., 1957, **16**, № 2, 130—141 (англ.)

Статья развивает результаты М. Крейна и С. Крейна (Матем. сб., 1943, **13**, № 1, 1 — 38) и С. Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, **42**, 994 — 1024), относящиеся к представлению банаховой структуры посредством непрерывных функций на некотором бикомпакте. Рассматривается пространство непрерывных функций на σ-бикомпакте $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, которое является пространством типа B_0^* (Mazur S., Orlicz W., Studia math., 1948, **10**, 184 — 208; РЖМат, 1955, 1376). Линейная структура X называется M_0-пространством, если она есть B_0^*-пространство при B-псевдонормах, удовлетворяющих условиям: 1) $\|x + y\| = \|x - y\|$, если $x \wedge y = 0$ и 2) $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ для положительных элементов. Полное M_0^*-пространство называется M_0-пространством. Приводится ряд примеров M_0^*-прост-

ран ·тв. Пусть Ω — σ-бикомпактное хаусдорфово пространство и $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$, где Ω_n — бикомпакт. Пространство $C_0(\Omega)$ непрерывных функций, определенных на Ω, есть M_0^*-пространство с псевдонормами $\|x\|_n=\max_{\Omega_n}|x(t)|$ и единицей $e(t)\equiv 1$. Доказана следующая теорема: Для любого M_0-пространства X с единицей существует σ-бикомпакт $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ такой, что X линейно и структурно изоморфно пространству $C_0(\Omega)$ непрерывных функций на Ω, и если $x\to x(t)$ при этом изоморфизме, то $\max_{i=1,2,\ldots,n}\|x\|_i=\max_{t\in\Omega_n}|x(t)|$. Дается обобщение теоремы Какутани относительно общего вида линейных функционалов в M-пространствах: каждый линейный функционал, определенный на M_0-пространстве $X=C_0(\Omega)$, может быть представлен в виде $\varphi(x)=\int_{\Omega}x(t)\,d\mu$, где μ — σ-аддитивная, с конечным изменением функция множества, определенная для борелевских подмножеств Ω и равная нулю вне некоторого Ω_n. Исследуется вопрос о слабой сходимости в $C_0(\Omega)$; доказывается обобщенная теорема Дини: Если $x_m\in X$, $x_m\geqslant x_{m+1}$ для $m=1,2,\ldots$ и x_m слабо сходится к x_0, то x_m сильно сходится к x_0, т. е. $\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|_n=0$ для $n=1,2,\ldots$ Затем приводится ряд теорем о топологической единственности Ω. Если между элементами пространства $X=C_0(\Omega)$ непрерывных функций на локально бикомпактном и σ-бикомпактном хаусдорфовом пространстве Ω и пространства $Y=C_0(\Phi)$ может быть установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее соотношение порядка, то $\Omega\underset{\text{top}}{=}\Phi$. Доказывается, что кольцо $C_0(\Omega)$ непрерывных функций определяет Ω единственным образом с точностью до гомеоморфизма (обобщение теоремы И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова).

Теорема 8. Пусть $X=C_0(\Omega)$ может быть однозначно отображено в $Y=C_0(\Phi)$ так, что если $x_1\to y_1$ и $x_2\to y_2$, то $\max_{t\in\Omega_n}|x_1(t)-x_2(t)|=\max_{t\in\Omega_n}|y_1(t)-y_2(t)|$ для любого n (псевдорасстояния сохраняются). Тогда $\Omega\underset{\text{top}}{=}\Phi$. Далее, для того чтобы пространство $C_0(\Omega)$ (Ω — локально и σ-бикомпактно) было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы Ω было метризуемым (или, что эквивалентно, удовлетворяло второй аксиоме счетности). В заключение приводится теорема 10: Если $X=C_0(\Omega)$ есть прямое произведение структур X_1 и X_2, то Ω есть сумма двух открыто-замкнутых подмножеств Ω_1 и Ω_2 таких, что $X_1=C_0(\Omega_1)$ и $X_2=C_0(\Omega_2)$. Г. И. Домрачева

11840. Пространства непрерывных функций. II (О линейных мультипликативных функционалах в некоторых хаусдорфовых классах). Семадени (Spaces of cotinuous functions. II (On multiplicative linear functionals over some Hausdorff classes). Semadeni Z.), Studia math., 1957, 16, № 2, 193—199 (англ.)

Часть I см. реф. 11839.

Обобщаются результаты С. Мазура, относящиеся к введению обобщенного предела ограниченной последовательности (Mazur S., Colloq. math., 1951, 2, 173—175). Дается построение обобщенных пределов для некоторых классов функций при этом используется реализация абстрактных -пространств посредством непрерывных функций, данная Какутани (M-пространство — KB-пространство с нормой, удовлетворяющей условию $\|x\vee y\|=\max(\|x\|,\|y\|)$ для положительных элементов). Рассматривается пространство X ограниченных функций, определенных на топологическом пространстве E, эквивалентные в некотором обобщенном смысле функции отождествляются; в нем вводится частичное упорядочение и норма, при этом X есть M-пространство. Приводится ряд теорем, в которых при некоторых дополнительных предположениях относительно E (E должно удовлетворять первой аксиоме счетности в точке $t_0\in E$) доказывается, что каждому $x\in X$ соответствует обобщенный предел $\lim_{t\to t_0}x(t)=\xi_{t_0}(x)$, где $\xi\in\Omega$ — множество всех линейных функционалов, заданных на X и удовлетворяющих условиям: $\|\xi\|=1$, $\xi(x)\geqslant 0$ для $x\geqslant 0$, $\xi(x)\cdot\xi(y)=0$, если $x\wedge y=0$. Этот предел удовлетворяет тем же условиям, что и предел Мазура. В частности, обобщенный предел определяется в каждой точке пространства E для функций, интегрируемых по Риману в интервале $[0,1]=E$ (функции, совпадающие почти всюду, отождествляются), для ограниченных бэровских функций, определенных на полном метрическом пространстве E (две функции, значения которых отличаются лишь на множестве первой категории, считаются тождественными). Далее полученные результаты применяются к вопросам о существовании некоторых мультипликативных мер и продолжении линейных функционалов. Сначала рассматривается пространство X ограниченных последовательностей $x=\{x_1,x_2,\ldots\}$ с нормой $\|x\|=\sup_n|x_n|$, упорядочением $x\leqslant y$, если $x_n\leqslant y_n$ для $n=1,2,\ldots$, и единицей $e=\{1,1,\ldots\}$. Каждый функционал $\xi_n(x)=x_n$ принадлежит Ω (Ω определено выше). Любая предельная точка ξ_0 последовательности $\{\xi_n\}$ есть предел Мазура и наоборот. Для подмножества S счетного изолированного множества N и $\xi\in\Omega$ полагают $m_\xi(S)=\xi(\chi_S)$, где χ_S — характеристическая функция множества S. Мера $m_\xi(S)$ — аддитивная и мультипликативная функция множества, определенная для всех подмножеств N. Обратно, каждой мере такого рода соответствует мультипликативный функционал $\xi(x)=\int_N x\,dm_\xi$. Эти рассуждения обобщаются на случай, когда X — пространство ограниченных бэровских функций, заданных на полном метрическом пространстве E. Пусть $C(\Omega)$ — реализация пространства X посредством непрерывных функций на Ω. Справедлива теорема: Для линейных функционалов в пространстве $C(\Omega)$ непрерывных функций, заданных на нульмерном компакте Ω, следующие условия эквивалентны: 1) $\xi\in\Omega$ т. е. $\xi(x)=x(t_0)$ для фиксированного $t_0\in\Omega$; 2) ξ — мультипликативный функционал и $\xi\neq 0$; 3) мера $m_\xi\neq 0$ всюду и $m_\xi(A\cap B)=m_\xi(A)\cdot m_\xi(B)$ для открыто-замкнутых множеств A, $B\subset\Omega$; 4) $m_\xi(\Omega)=1$, $m_\xi\geqslant 0$ и $m_\xi(A)\cdot m_\xi(B)=0$, если $A\cap B=0$. Аналогично построению обобщенного предела можно в каждой точке $t\in[0,1]$ построить обобщенный предел слева ξ_t и справа η_t в пространстве X интегрируемых по Риману функций. Пусть X_0 — подпространство пространства X непрерывных функций на $[0,1]$, функционалы ξ_t и η_t равны на X_0, тогда: 1) продолжение линейного функционала с сохранением нормы с M-подпространства X_0 на M-пространство X не обязательно единственно (даже если X_0 и X имеют одну и ту же единицу); 2) если $X_0=C(\Omega_0)$ есть M-подпространство $X=C(\Omega)$, то не обязательно $\Omega_0\underset{\text{top}}{\subset}\Omega$, даже если каждый функционал $\xi\in\Omega_0$ имеет продолжение $\bar{\xi}\in\Omega$. Г. И. Домрачева

11841. О равномерно ограниченной коммутативной группе линейных преобразований в гильбертовом пространстве. Ито (On the uniformly bounded commutative group of linear transformations in the Hilbert space. Ito Takasi), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1956, Ser. I., 13, 68—70 (англ.)

Предположения: G — множество линейных преобразований; G содержит вместе с A и B $AB=BA$; при некоторых фиксированных $0<a\leqslant b$ каждое A из G удовлетворяет условию $a\|f\|\leqslant\|Af\|\leqslant b\|f\|$ для каждого f из гильбертова пространства.

Теорема. Существует такое $S = S^*$, $a \leqslant S \leqslant b$, что SAS^{-1} изометрично для каждого A из G. Если некоторое преобразование A имеет правый обратный, то $S^{-1}AS$ для этого преобразования является унитарным. Это справедливо для каждого A, если G есть коммутативная группа равномерно ограниченных линейных преобразований. Эта теорема обобщает результат Б. Надя, который доказал ее для однопараметрических групп.

Доказательство. Воспользуемся слабой топологией для ограниченных линейных преобразований. Пусть K — выпуклое замыкание множества всех A^*A (здесь A пробегает все G). Тогда $a^2 \leqslant P \leqslant b^2$ для каждого $P \in K$. Используем координатное представление $P = \{(Px, y); xy$ пробегают все гильбертово пространство.

Теорема Тихонова показывает, что K есть компактное хаусдорфово пространство. Нетрудно убедиться, что для каждого A из G K отображается в себя непрерывно отображением $A(P) = A^*PA$. Далее, применение теоремы Маркгофа — Какутани о неподвижной точке показывает, что существует по крайней мере одно P_0 в K, удовлетворяющее условию $A^*P_0A = P_0$ для всех A из G. Выберем положительно определенное S, удовлетворяющее условиям $S^2 = P_0$. Тогда для каждого $A \in G$ $A^*SSA = SS$, откуда $(SAS^{-1})^*(SAS^{-1}) = 1$, что означает, что SAS^{-1} изометрично.

Референт отмечает, что более общие теоремы были получены Диксмье (Dixmier, Acta scient. math. Szeged., 1950, 12, A, 213—227) и Кэйдисоном (Kadison, Amer. J., Math., 1955, 77, № 1, 600—620), использовавшими другие методы. Это указывает на возможность усиления теоремы о неподвижной точке. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 222.

11842. О тензорном произведении гильбертовых пространств. Вала (Sur le produit tensoriel des espaces hilbertiens. Vala Klaus. Suomalais. tiedeakat. toimituks. 1959, Sar. AI, № 267, 17 p., ill.) (франц.)

В § 1 вводится тензорное произведение H' гильбертовых (не обязательно сепарабельных) пространств $H_1, \ldots, H_n$: $H' = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$. Метрика в H' задается с помощью скалярного произведения

$$G(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mid y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) = (x_1 \mid y_1) \ldots (x_n \mid y_n), \quad x_i, y_i \in H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где через $(x_i \mid y_i)$ обозначено скалярное произведение в H_i. В этой метрике пространство H', вообще говоря, не полно, но может быть обычным образом пополнено до полного гильбертова пространства H. Из сильной (соответственно слабой) сходимости n последовательностей $\{x_k^\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, n)$ к x_k вытекает сильная (соответственно слабая) сходимость последовательности $\{x_1^\nu \otimes \ldots \otimes x_n^\nu\}$ к $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ (предложение 1).

§ 2 посвящен тензорному произведению ограниченных линейных преобразований T_i, действующих в пространствах H_i соответственно. По определению

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = T_1x_1 \otimes \ldots \otimes Tx_n.$$

При этом, если ограниченные линейные преобразования T_i в H_i $(i = 1, \ldots, n)$ все являются самосопряженными, нормальными, унитарными или проектирующими, то линейное преобразование $T_1 \otimes \ldots \otimes T_n$ в H также является самосопряженным, нормальным, унитарным или проектирующим соответственно (предложение 2). В § 3 рассматривается тензорное произведение неограниченных линейных преобразований T_i в H_i с плотными областями определения D_{T_i} $(i = 1, \ldots, n)$. При этом оказывается, что $T_1^* \otimes \ldots \otimes T_n^* \subseteq (T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)^*$ (предложение 3), а в случае замкнутости операторов T_i в H_i $(i = 1, \ldots, n)$ оператор $T_1 \otimes \ldots \otimes T_n$ в H допускает замыкание (предложение 4).

Естественным образом переносятся на тензорные произведения операторов соответствующие спектральные разложения ограниченных (§ 2) и неограниченных (§ 3) операторов. Наконец, в § 4 рассматривается метризация H' с помощью произвольной эрмитово-билинейной дефинитной формы $Q(x \mid y)$. Основной результат формулируется в виде теоремы: Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — гильбертовы пространства, $H' = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$, а Q — дефинитная эрмитово-билинейная форма на $H' \times H'$. Если: а) $P = P_1 \otimes \ldots \otimes P_n$ — симметрическое по отношению к Q линейное преобразование для любых проекторов P_i в H_i, или б) $U = U_1 \otimes \ldots \otimes U_n$ — изометрическое по отношению к Q линейное преобразование для любых унитарных операторов U_i в H_i, то $Q = \lambda G$, где G есть билинейная форма (1), λ — действительное число.

И. С. Иохвидов

11843. Задача Коши и сингулярные интегральные операторы. Ямагути (Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière. Yamaguti Masaya), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1959, A-Math., 32, № 1, 121—151 (франц.)

Применяя обобщенные сингулярные интегральные операторы, введенные Кальдероном и Зигмундом (РЖМат, 1959, 1648; используются определения и обозначения этой работы) и соответствующим образом обобщенные, автор переносит результат А. Лакс (РЖМат, 1959, 5835) об условиях существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными на случай любого числа независимых переменных. Рассматривается пространство 0_0 операторов, отображающих $L_2(R_n)$ в себя и имеющих вид

$$H[u] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(x) \int \exp(2\pi i x\xi)\, \hat{h}_r(\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi;$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$; при этом $\sup_x |(\partial/\partial x)^\alpha a_r(x)| \underset{r \to \infty}{\to} 0$ быстрее любой степени r при каждом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, а $\sup_{|\xi| \geqslant 1} |\xi|^{|\alpha|} |(\partial/\partial\xi)^\alpha \hat{h}_r(\xi)|$ при $r \to \infty$ имеет рост не выше степенного; $\wedge$ обозначает преобразование Фурье. Далее, ограниченный оператор K, $L_2(R_n) \to L_2(R_n)$ принадлежит $\mathfrak{A}_1$, если для любого целого $p > 0$ существуют константа M_p и оператор $H_p \in 0_0$, для которых при всех $u \in D^\infty$ (пространство функций, интегрируемых в квадрате вместе со всеми производными) $\| \Lambda^r (K - H_p) \Lambda^s [u] \| \leqslant M_p \| u \|$; $r + s \leqslant p$. Подробно изучаются свойства таких операторов; центральные результаты таковы: если $K \in \mathfrak{A}_1$, то и $\Lambda K - K\Lambda \in \mathfrak{A}_1$; если $H \in \mathfrak{A}_1$, $K \in \mathfrak{A}_1$, то и $HK \in \mathfrak{A}_1$, т. е. $\mathfrak{A}_1$ представляет собой алгебру.

Полученные результаты применяются к уравнению

$$L[u] \equiv \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - \sum_{|\nu| < m} A^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_0} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} u = v,$$

где коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям гладкости. Кроме того, предполагается, что все корни уравнения

$$P_m(\lambda) \equiv \lambda^m - \sum_{|\nu| = m} A^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}(t, x) \lambda^{\nu_0} \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_n^{\nu_n} = 0$$

вещественны, и если при некоторых t_0, x_0, ξ_0 $(|\xi_0| = 1)$ два корня λ_p и λ_q различны, то и при остальных t, x, ξ $(0 \leqslant t \leqslant t_0, |\xi| = 1)$ будет $\inf_{t,x,\xi} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$ (т. е. кратность корней уравнения $P_m(\lambda) = 0$ сохраняется). Формулируется условие, которое оказывается достаточным для существования и единственности решения задачи Коши при нулевом начальном условии (поставленном при $t = 0$). Это условие вполне аналогично условию Лакс (см. указанный реф.), однако оператор $\partial_t = \partial/\partial t - \lambda_i(t, x)\, \partial/\partial x$ надо заменить на $\partial_t = \partial/\partial t - \sqrt{-1} H_i \Lambda$, где H_i и Λ — операторы, введенные Кальдероном и Зигмундом. Для случая уравнения с постоянными коэффициентами указанное условие является также необхо-

димым для корректной разрешимости задачи. А. Д. Мышкис

11844. О замыкании некоторых дифференциальных операторов. Дашниц Л. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 44—47

Пусть $l(y)$ — формально самосопряженное обыкновенное дифференциальное выражение порядка $2n$ на конечном отрезке $[a, b]$. Рассматриваются дифференциальные операторы, порождаемые в пространстве $L_2(a, b)$ выражением $l(y)$ и граничными условиями, содержащими производные, порядок которых может превышать $2n-1$. Оператор L задан на линейном многообразии Ω_L тех функций $f(x) \in L_2(a, b)$, которые удовлетворяют условиям: а) $f^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$; б) $f^{(m)}(x) \in L_2(a, b)$; в) $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$. При этом предполагается, что $m > 2n$. Для $m = 2n$ соответствующий оператор обозначается через L_0. Область определения $\Omega_{\widetilde{L}}$ оператора $\widetilde{L}$ состоит из функций $f(x) \in L_2(a, b)$, которые удовлетворяют условиям а), б) и граничным условиям

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^{m} \beta_{jk} f^{(k-1)}(b) = 0 \qquad (1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ m > 2n).$$

Определение. Граничное условие

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_k f^{(k-1)}(b) = 0$$

называется редуцированным граничным условием системы (1), если оно получается из неё в результате исключения производных порядка $\geqslant 2n$. Совокупность всех линейно независимых редуцированных граничных условий системы (1) называется полной редуцированной системой граничных условий оператора $\widetilde{L}$.

Доказывается теорема: Замыкание $\overline{\widetilde{L}}$ оператора $\widetilde{L}$ определяется равенством $\overline{\widetilde{L}} f = l(f)$ $(f \in \Omega_{\overline{\widetilde{L}}})$, где $\Omega_{\overline{\widetilde{L}}}$ есть совокупность всех тех функций $f(x) \in \Omega_{L_0^*}$, которые удовлетворяют полной редуцированной системе граничных условий оператора $\widetilde{L}$.

Примечание референта. Известно, что оператор L_0 является замыканием оператора L_0', заданного на линейном многообразии всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, которые вместе со всеми своими производными обращаются в нуль в обоих концах отрезка $[a, b]$. Отсюда сразу следует справедливость соотношения $\overline{\widetilde{L}} = L_0$, которое играет основную роль в доказательстве теоремы. А. В. Штраус

11845. О самосопряженности разностных операторов с операторными коэффициентами. Тарнопольский (Про самоспряженість різницевих операторів з операторними кофіцієнтами. Тарнопольський В. Г.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 11, 1189—1192 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается разностный оператор, порожденный выражением $L[u]_j = A_{j-1}u_{j-1} + B_j u_j + A_j u_{j+1}$, где u_j — последовательность элементов пространства Гильберта H, а A_j и B_j — некоторые ограниченные операторы, действующие в H. Находятся достаточные условия самосопряженности рассматриваемого оператора. Эти условия являются обобщением результатов в классической степенной проблеме моментов, а также в матричной проблеме моментов. Л. А. Сахнович

11846. О максимальной спектральности. Ито (On the maximal spectrality. Ito Takasi. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1956, Ser I., **13**, 71—73) (англ.)

Согласно Накано, спектральность есть функция $E(A)$, определенная для счетно-аддитивного семейства подмножеств A некоторого фиксированного множества Ω. Значениями $E(A)$ являются операторы проектирования в гильбертово пространство, удовлетворяющими естественным условиям аддитивности. Даются определения максимальной и дискретной спектральностей. Автор доказывает, что для сепарабельного гильбертова пространства спектральность является максимальной тогда и только тогда, когда она дискретна. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 222.

11847. Возмущение непрерывного спектра неограниченными операторами. I. Курода (Perturbation of continuous spectra by unbounded operators. I. Kuroda Shige Toshi), J. Math. Soc. Japan, 1959, **11**, № 3, 247—262 (англ.)

Обобщение результатов Розенблума (РЖМат, 1958, 5877) и Като (РЖМат, 1959, 8210, 8211) на случай неограниченных возмущений. $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, H_0 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, V — симметричный оператор, $D(V) \supset D(H_0)$ и $H = H_0 + V$ — самосопряженный на $D(H_0)$. Подпространства M_0 и M — абсолютно непрерывные части $\mathfrak{H}$ относительно H_0 и H соответственно (определения см. РЖМат, 1959, 8210). P_0 и P — проекторы соответственно на M_0 и M. Сильный предел (если он существует) оператора $e^{itH}e^{-itH_0}P_0$ при $t \to \pm\infty$ обозначается $W_\pm(H, H_0)$. Аналогично определяется $W_\pm(H_0, H)$. Если существуют оба оператора $W_\pm$, то, (см. Kuroda ST Nuovo cimento 1959, 12 431—454) $W_+(H, H_0)$ — частично изометрический оператор с начальной областью M_0 и конечной областью M, $W_+(H_0, H) = W_+(H, H_0)^*$ и $HPW_+(H, H_0) = W_+(H, H_0)H_0P_0$. Аналогичное утверждение верно для оператор в W_-.

Основной результат:

Теорема 1. Если на $D(H_0)$ при некоторых $0 < a <$ и $b \geqslant 0$ выполнено неравенство $\|Vu\| \leqslant a\|H_0u\| + b\|u\|$ и оператор $|V|^{1/2}(H_0 - \xi_0)^{-1}$ при каком-либо ξ_0 из резольвентного множества H_0 имеет конечную абсолютную норму, то $H = H_0 + V$ — самосопряженный оператор, пределы $W_\pm(H, H_0)$ и $W_\pm(H_0, H)$ существуют (здесь $|V| = (V^*V)^{1/2}$).

Доказательство основано на предельном переходе от случая конечномерного возмущения V. В связи с этим § 3 для этого случая излагается простое доказательство теоремы 1, данное Като в работе, опубликованной лишь на японском языке. Более раннее доказательство см. РЖМат, 1959, 8210). Другие результаты работы касаются непрерывности операторов $W_\pm(H, H_0)$ и оператора рассеяния $S = W_+(H, H_0)^* W_-(H, H_0)$ по аргументам H и H_0. Отмечается, что приложения доказанных теорем к квантовой теории рассеяния рассмотрены в цитированной выше работе автора. М. Ш. Бирман

11848. О спектре операторов Шредингера и Дирака. Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 2, 239—241

Доказанные в заметке теоремы о дискретном спектре операторов Шредингера и Дирака являются в известном смысле окончательными. Для оператора Шредингера $M_\alpha u = -\Delta u(x_1, \ldots, x_m) + \alpha p(x_1, \ldots, x_m)u$ установлено:

1) Для того чтобы спектр сгущения был $(0, \infty)$ и, значит, левее 0 оператор имел лишь дискретный спектр (т. е. собственные значения конечной кратности) достаточно (при $|p(x)| < C$) „интегрального" стремления $p(x)$ к 0, точнее: $\int_D |p(x)|\,dx \to 0$ по любому кубу D фиксированного размера при устремлении его в ∞. Обратное также верно, если отрицательный спектр дискретен при всех $\alpha > 0$ и $p(x) < 0$ при больших $|x|$.

2) Для того чтобы дискретный спектр M_α был бес

конечным, достаточно, чтобы $\sup_R R^{2-m}\int_{|x|<R}|p(x)|dx=\infty$ и $p(x)<0$ при больших x. Если $p=p(|x|)=p(r)\leqslant 0$, $m\geqslant 3$, то для конечности числа точек дискретного спектра при всех α необходимо и достаточно, чтобы $r\int_r^\infty |p(r)|\,dr\to 0$ при $r\to\infty$.

3) Автор замечает, что число собственных значений $\lambda_k<0$ задачи $-y''-p(x)y=\lambda y$; $y(0)=0$ равно числу собственных значений $\alpha_k<1$ для задачи $-y''-\alpha p(x)y=0$. Отсюда получены разные оценки для полного числа отрицательных собственных значений $s(0)$ и их числа $s(\varepsilon)$ левее $-\varepsilon^2$. Например:

$$s(\varepsilon)<\int_0^\infty t\,(p(t)-\varepsilon^2)^+dt;\quad s(\varepsilon)<\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\infty (1-e^{-2\varepsilon t})p^+(t)\,dt$$

($f^+=\max(f,0)$). Оценки получены и в многомерном случае. Э. Э. Шноль

11849. О максимальности исчезающих алгебр. Саймон (On the maximality of vanishing algebras. Simon Arthur B.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 3, 613—616 (англ.)

G — локально компактная абелева группа, μ — мера Хара в G; $L^1(G)$ — нормированное кольцо суммируемых по мере μ функций, со свертыванием в качестве операции умножения. L_S — множество, состоящее из функций $\in L^1(G)$, носители которых лежат в $S\subset G$. Если L_S — алгебра, то автор называет ее исчезающей алгеброй. Доказывается, что если S — измеримая подполугруппа группы G, то исчезающая алгебра L_S может являться максимальной собственной замкнутой подалгеброй $L^1(G)$ лишь в случае, когда G изоморфна вещественной оси или ее дискретной подгруппе; образом S при этом изоморфизме служит неотрицательная часть образа G.

М. З. Соломяк

11850. Об инволюциях линейных операторов. Луценко И. Е., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 99—103

Рассматривается оператор инволюции J, определенный в гильбертовом пространстве H и обладающий свойствами: $(Jf, Jg)=\overline{(f, g)}$, $J^2f=f$, где $f, g\in H$. Этот оператор соответствует переходу к комплексно-сопряженной функции в $L^2[a, b]$. Изометрический оператор называется J-изометрическим, если $J\vee J=V^{-1}$. Стоун (Stone M. H., Linear transformation in Hilbert space, 1932) показал, что такие операторы имеют равные индексы дефекта. В работе М. С. Лившица (Матем. сб., 1950, 26 (68), 2) доказано, что для любого простого изометрического оператора с индексом дефекта (1, 1) существует такая инволюция J, что он будет J-изометрическим. Автор находит необходимые и достаточные условия J-изометричности операторов с индексом дефекта (n, n) $(n<\infty)$. Эти условия формулируются в терминах характеристической матрицы-функции (Лившиц М. С., Матем. сб., 1946, 19 (61) 2). Формулируется теорема: Если оператор V J-изометричен, то среди его характеристических матриц-функций имеются симметричные. Обратно, если среди характеристических матриц-функций изометрического оператора есть хоть одна симметрическая, то оператор V J-изометричен. Отсюда вытекает существование изометрических операторов с равными индексами дефекта (n, n) $(n>1)$, не являющегося J-изометрическим ни при каком J. Аналогичные результаты получены для J-вещественных симметрических операторов. Л. А. Сахнович

11851. Об экстраполировании положительно определенных функций из конечного интервала. Акутович (On extrapolating a positive definite function from a finite interval. Akutowicz Edwin J.), Math. scand., 1959, **7**, № 1, 157—169 (англ.)

Рассматриваются положительно определенные функции $F(t)$, заданные на конечном интервале $(-A, A)$ (функция $F(t)$ называется положительно определенной в $(-A, A)$, если из неравенства $0\leqslant t_j, t_k\leqslant A$ следует $\sum_{j,k} F(t_j-t_k)z_j\bar{z}_k\geqslant 0$ для произвольных комплексных z). М. Г. Крейн показал, что такая функция $F(t)$ может быть экстраполирована на всю ось с сохранением положительной определенности. Автор естественным образом строит по функции $F(t)$ некоторое функциональное гильбертово пространство H и рассматривает оператор T, который является оператором умножения на независимую переменную на плотном в H множестве. После этого доказывается, что экстраполяция единственна тогда и только тогда, когда оператор T является самосопряженным. Изучается также неопределенный случай. Л. А. Сахнович

11852. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков. Мацаев В. И., Докл. АН СССР, 1960, **30**, № 3, 499—502

Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения $y^{(n)}+q(x)y=\lambda^n y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0, \lambda)=1$, $y^{(k)}(0, \lambda)=0$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, а $\omega(x, \lambda)$ — решение простейшего уравнения $\omega^{(n)}=\lambda^n\omega$, удовлетворяющее тем же начальным условиям. При $n=2$ имеет место известная формула

$$y(x, \lambda)=\omega(x, \lambda)+\int_0^x \omega(t, \lambda)\,k(x, t)\,dt. \qquad (1)$$

чРеферентом эта формула была распространена на случай $n>2$, причем коэффициент $q(x)$ предполагается аналитическим. Автор статьи показывает, что это предположение является существенным, так как справедлива теорема: Если

$$q(x)=\begin{cases} q_0(x) & 0\leqslant x\leqslant \delta,\\ 0 & x>\delta,\end{cases}$$

где $q_0(x)\not\equiv 0$ — целая функция, δ — некоторое положительное число, то представление (1) невозможно при значениях x, превосходящих некоторое N_δ, зависящее от порядка уравнения и числа δ. Доказательство проведено для $n=4$ и в этом случае $N_\delta=2\delta$.

Л. А. Сахнович

11853. О векторной проблеме моментов. Зайдман (Sur le problème vectoriel des moments. Zaidman Samuel), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 3, 436—438 (франц.)

Пусть X — банахово пространство. Вектор-функция $\alpha(t)\in X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ принадлежит классу $V_f^{[0, 1]}(X)$, если для каждого $x'\in X'$ (X' — сопряженное пространство) скалярная функция $\langle x', \alpha(t)\rangle$ имеет ограниченное изменение на $[0, 1]$. Рассматриваются также классы $V_G^{[0, 1]}(X)$ и $V_S^{[0, 1]}(X)$ вектор-функций $\alpha(t)$ ограниченной сильной вариации в смысле Гельфанда и Сирвинта соответственно, т. е. таких, что множества

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i[\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)],\quad \varepsilon_i=\pm 1,\quad 0=t_0<t_1<\ldots<t_{n+1}=1$$

относительно компактны или слабо компактны в X соответственно. Исследуется вопрос о представлении заданной последовательности $(\mu_n)\subset X$ в виде

$$\mu_n=\int_0^1 t^n d\alpha(t)\quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где $\alpha(t)$ принадлежит тому или иному из перечисленных классов. Утверждается, что полученное Берджессом (РЖМат, 1955, 4537) необходимое и достаточное условие существования представления (1) с $\alpha(t)\in V_f^{[0, 1]}(X)$

сохраняет силу, если заменить требование рефлексивности X более слабым условием слабой (секвенциальной) полноты. В пространстве $X \equiv C[0, 1]$ условие Берджесса уже не является достаточным для осуществления представления (1) с $\alpha(t) \in V_f^{[0, 1]}(X)$ (теорема 2).

Теорема 3. Если X — произвольное банахово пространство, то для существования представления (1) с $\alpha(t) \in V_G^{[0, 1]}(X)$ (соответственно $V_S^{[0, 1]}(X)$) необходимо и достаточно, чтобы множество элементов

$$\left\{\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_{n, m} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} \Delta^{n-m} \mu_m\right\},$$

$$\varepsilon_{n, m} = \pm 1,\ n = 0, 1, \ldots, 0 \leqslant m \leqslant n,$$

было относительно компактным (соответственно слабо компактным) в X. Приводится еще ряд результатов о представлениях вида $\mu_n = \int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt$, где $\varphi(t) \in L^\infty \times$ $\times ([0, 1]; X)$. Доказательства отсутствуют.

И. С. Иохвидов

11854. Классификация алгебр. Раджагопалан (Classification of algebras. Rajagopalan M.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), 22, № 3, 109—116 (англ.)

Рассматриваются алгебры с единицей, отличающиеся от гильбертовых алгебр лишь тем, что условие $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ заменяется условием непрерывности левого и правого умножения. Для таких алгебр получаются результаты, известные для гильбертовых алгебр (см., например, РЖМат, 1957, 4989 К), в частности, показывается их конечномерность.

Примечание референта. Непрерывность левого и правого умножения эквивалентна условию $\|xy\| \leqslant K\,\|x\| \cdot \|y\|$. После введения в алгебре новой нормы $\|x\|^* = K\,\|x\|$ она превращается в гильбертову и, таким образом, реферируемая работа новых результатов не содержит.

Ю. Л. Далецкий

11855. Новая топология для алгебр Неймана. Шилдс (A new topology for von Neumann algebras. Shields Paul C.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 4, 267—269 (англ.)

Предлагается новая топология $\mu(\mathfrak{A}, X)$ для алгебры Неймана $\mathfrak{A}$. В отличие от топологий, обычно применяемых в теории алгебр Неймана (сильная, слабая, σ-сильная, σ-слабая) все следующие отображения непрерывны в μ-топологии: $a \to ab$, $a \to ba$, $(a, b) \to ab$ $a \to a^*(a, b \in \mathfrak{A})$. Множество функционалов на $\mathfrak{A}$, непрерывных в μ-топологии совпадает с множеством функционалов, непрерывных в σ-слабой топологии. В качестве приложений приведены более простые доказательства некоторых известных теорем (в частности теоремы Капланского о плотности). Известно, что каждая алгебра Неймана $\mathfrak{A}$ (рассматриваемая как нормированное пространство) является сопряженной к некоторому банахову пространству X. Определим в X операторы R_a и L_a $(a \in \mathfrak{A})$ равенствами $(R_a x)(b) = x(ba)$, $(L_a x)(b) = x(ab)$ $(x \in X, a, b \in \mathfrak{A})$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим множество элементов $a \in \mathfrak{A} : \|R_a x\| < 1$, $\|L_a x\| < 1$. Все эти множества и их пересечения в конечном числе образуют базис окрестностей нуля топологии $\mu(\mathfrak{A}, X)$. Г. И. Кац

11856. Об одной проблеме, поставленной Макки. Гишарде (Sur un problème posé par G. W. Mackey. Guichardet Alain), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 6, 962—963 (франц.)

Пусть A — сепарабельная $*$-алгебра, π — $*$-представление A в гильбертовом пространстве H, $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана (т. е. слабо замкнутая самосопряженная алгебра), порожденная алгеброй $\pi(A)$. Известно, что если коммутант $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть абелева алгебра, то разложение $H = \int_Z^{\oplus} H(\zeta) d\nu(\zeta)$ (Z — локально компактное пространство со счетной базой, ν — положительная мера на Z), в котором $\mathfrak{A}'$ состоит из всех диагонализируемых операторов, определяет разложение $\pi(x) = \int_Z^{\oplus} \pi_\zeta(x) d\nu(\zeta)$, в котором почти все π_ζ неприводимы. Автор доказывает, что существует множество $Z' \subset Z$ дополнением ν-меры нуль такое, что для любых $\zeta, \zeta' \in Z'$, $\zeta \neq \zeta'$ π_ζ и $\pi_{\zeta'}$ не эквивалентны. Этим дается ответ на вопрос, поставленный Макки (РЖМат, 1959, 4903).

М. А. Наймарк

11857. Представление марковских полугрупп и их инфинитезимальные образующие. Нелсон (Representation of a Markovian semigroup and its infinitesimal generator. Nelson Edward), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 6, 977—987 (англ.)

Работа содержит изучение полугрупп операторов на некоторых банаховых алгебрах функций в духе работ Феллера (W. Feller) о полугруппах. Пусть $C(X)$ — алгебра Банаха непрерывных функций на некотором локально компактном отделимом пространстве, аннулирующихся на бесконечности, и P^t, $0 \leqslant t < \infty$, семейство линейных преобразований пространства $C(X)$ в себя такое, что $P^t f \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$, $P^{t+s} f = P^t P^s f$, $\|P^t f\| \leqslant \|f\|$ (субмарковская (sub-Markowian) полугруппа в терминологии автора). Для каждого $x \in X$ имеет место представление $P^t f(x) = \int_X f(y) p^t(x, dy)$, причем $p^t(x, X) \leqslant 1$. Если $p^t(x, X) = 1$ для любой $x \in X$, то P^t есть марковская полугруппа. Автор сводит изучение субмарковской полугруппы на $C(X)$ к изучению некоторых марковских полугрупп на $\widetilde{C}(X)$ — прямой сумме $C(X)$ и действительной оси. $\widetilde{C}(X)$ есть пространство непрерывных функций, определенных на некотором компактном отделимом пространстве. Пусть V — множество всех $f \in C(X)$ таких, что $\|P^t f - f\| \to 0$ при $t \to 0$; V — замкнутое линейное подпространство пространства $C(X)$, инвариантное относительно P^t, но не есть, вообще говоря, подалгебра $C(X)$. Показывается, что множество A всех $f \in C(X)$ таких, что f и $f^2 \in V$, есть замкнутая подалгебра пространства $C(X)$, которая, вообще говоря, не инвариантна относительно P^t.

Вторая часть работы содержит основной результат, касающийся инфинитезимальных образующих A полугруппы P^t, которая предполагается без ограничения общности марковской, определенной на некотором $C(X)$, где X — отделимое компактное пространство. Пусть D — область определения инфинитезимального оператора A, которая плотна в V, определенном выше. Так как A — замкнутый линейный оператор, D является пространством Банаха с нормой $\|f\|_D = \|f\| + \|Af\|$. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество таких f, что $fg \in D$, при $g \in D$; $\mathfrak{M} \subset D$, $\mathfrak{M}$ — полупростая регулярная банахова алгебра с нормой $\|f\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{g \in D,\, g \neq 0} \|fg\|_D / \|g\|_D$, и каждый линейный мультипликативный функционал на $\mathfrak{M}$ записывается в виде $f \to f(x)$ при $x \in X$ (но, вообще говоря, эти x определены не однозначно, так как вообще $\mathfrak{M}$ не разделяет точки из X). Для $x \in X$ пусть $S_x = \{f, f \in \mathfrak{M}, f(x) = 0\}$, S_x — максимальный идеал в $\mathfrak{M}$. Пусть S_x^k — идеал, образованный произведением $f_1 \ldots f_k$ сомножителей $f_1, f_2, \ldots, f_k$ в S_x. Функции из S_x^k могут рассматриваться, как имеющие нуль порядка k в x. Основные теоре

мы работы дают представление инфинитезимальных образующих в каждой точке $x\in X$ для функций, достаточно регулярных (в $\mathfrak{M}$) и имеющих в x нуль порядка 3, 2 или 1. Например, как следствие теорем 26I и 26J Лумиса, показывается, что для каждого $x\in X$ существует единственная, регулярная борелевская мера $a(x)$, определенная на пространстве максимальных идеалов S_x подалгебры Банаха W_x, такая, что

$$Ah(x)=\int_{W_x} h(w)a(x,dw)$$

для каждой $h\in S_x^3$. Работа заканчивается некоторыми примерами. S. Zaidman

11858. Мультипликативные функционалы на полугруппах непрерывных функций. Бэр, Юд (Multiplicative functionals on semigroups of continuous functions. Bear H. S., Yood Bertram), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 736—741 (англ.)

$\mathfrak{X}$ — компактное хаусдорфово пространство; $C(\mathfrak{X})$ — мультипликативная полугруппа непрерывных вещественных функций на $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ — мультипликативная полугруппа всех мультипликативных положительных функционалов на $C(\mathfrak{X})$, непрерывных в топологии равномерной сходимости. Каждый функционал $F\in\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ допускает однозначное представление вида

$$F(f)=\prod |f(x_t)|^{a_t},$$

где $\{x_t\}$ — счетное замкнутое множество в $\mathfrak{X}$ (обозначаемое в дальнейшем через $D(F)$); $a_t>0$, $\sum a_t<\infty$.

Установлено, что структура $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ как полугруппы определяет пространство $\mathfrak{X}$, если последнее удовлетворяет первой аксиоме счетности, и исследована структура одного класса изоморфизмов между $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$. Идеал $I\subset\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ авторы называют P-идеалом, если для любых $F_1,F_2\in I$ найдутся $G\in I$ и $H_1,H_2\in\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ такие, что $F_1=GH_1$, $F_2=GH_2$. Множество максимальных P-идеалов совпадает со множеством идеалов вида

$$I_x=\{F\in\mathfrak{F}(\mathfrak{X}):x\in D(F)\}.$$

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ — два компактных хаусдорфовых пространства. Следующие утверждения эквивалентны: 1) Существует полугрупповой изоморфизм $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$ на $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$. 2) Существует полугрупповой гомоморфизм σ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$ на $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$ такой, что $D(F_1)=D(F_2)$, если $\sigma(F_1)=\sigma(F_2)$. 3) Существует полугрупповой гомоморфизм σ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$ на $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$ такой, что для любого максимального P-идеала N из $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$, $\sigma^{-1}(N)$ содержится в некотором максимальном P-идеале полугруппы $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$. 4) Существует взаимно однозначное отображение ψ $\mathfrak{X}_1$ на $\mathfrak{X}_2$ такое, что для любого счетного множества $Q\subset\mathfrak{X}_1$, $\psi(Q)$ замкнуто тогда и только тогда, когда Q замкнуто. Далее устанавливается, что гомоморфизм σ, удовлетворяющий условию 2 теоремы, удовлетворяет одновременно и условию 3, и обратно; если к тому же σ секвенциально непрерывен (то есть, из $F_n(f)\to F(f)$ для всех $f\in C(\mathfrak{X}_1)$ вытекает $\sigma(F_n)(g)\to\sigma(F)(g)$ для всех $g\in C(\mathfrak{X}_2)$), то σ — изоморфизм.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ — компактные хаусдорфовы пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, и σ — секвенциально непрерывный изоморфизм $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$ на $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_2)$. Тогда существует полугрупповой изоморфизм $s:C(\mathfrak{X}_2)\to C(\mathfrak{X}_1)$ такой, что $\sigma(F)(g)=F(s(g))$ для всех $F\in\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_1)$, $g\in C(\mathfrak{X}_2)$. Обратно, всякий изоморфизм σ такой формы секвенциально непрерывен. М. З. Соломяк

11859. Теорема о частичном упорядочении, порождаемом некоторой полугруппой преобразований. Лёвнер (A theorem on the partial order derived from a certain transformation semigroup. Loewner Charles), Math. Z., 1959, **72**, № 1, 53—60 (англ.)

Пусть Γ — полугруппа преобразований множества D в себя. Если Γ содержит тождественное преобразование и если из существования двух преобразований $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ таких, что $\gamma_1 x=y$ и $\gamma_2 y=x$ $(x,y\in D)$, вытекает равенство $x=y$, то в D следующим образом можно ввести частичное упорядочение: $x<y$, если существует $\gamma\in\Gamma$ такое, что $\gamma x=y$. Такое упорядочение исследуется для случая, когда D — многообразие $\sum_{i=0}^{n}u_i=1$ в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1}; γ — операция, порождаемая системой $du/dt=A(t)u$ $(t\in[a,b])$ по формуле $\gamma u(a)=u(b)$; система такова, что 1) матрица $A(t)=\|a_{ij}(t)\|$ симметрична; 2) при $i\neq j$ $a_{ij}(t)\geqslant 0$; 3) $\sum_{\rho=0}^{n}a_{i\rho}(t)=0$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Полугруппа Γ представляет собой замыкание (по норме матриц) множества всех таких операций γ.

Решается вопрос: какие точки следуют, в смысле введенного упорядочения, за точкой $e=(1,0,\ldots,0)$? Доказано, что множество этих точек — многогранник, который и построен в работе. М. З. Соломяк

11860. О матрицах, порождающих ограниченные полугруппы. Крейсс (Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzeugen. Kreiss Heinz-Otto), Math. scand., 1959, **7**, № 1, 71—80 (нем.)

Пусть F — семейство квадратных матриц A порядка n, с комплексными элементами. Выясняются условия, которым должны удовлетворять матрицы семейства для того, чтобы порождаемые ими полугруппы были равномерно ограничены. Доказывается теорема. Следующие утверждения эквивалентны: 1) для всех $A\in F$ и всех $t\geqslant 0$ $\|\exp At\|<C_1$; 2) для всех $A\in F$ и всех s с $\mathrm{Re}\,s>0$ $\|(A-Is)^{-1}\|<C_2/\mathrm{Re}\,s$; 3) для каждой матрицы $A\in F$ существует такая матрица S, что

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix}\varkappa_1 & b_{12}\ldots b_{1n}\\ & \varkappa_2\ldots b_{2n}\\ & \ldots\ldots\\ 0 & \varkappa_n\end{pmatrix},$$

причем $0\geqslant\mathrm{Re}\,\varkappa_1\geqslant\mathrm{Re}\,\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{Re}\,\varkappa_n$; $\max(\|S\|,\|S^{-1}\|)<C_{21}$; $|b_{ij}|<C_{22}|\mathrm{Re}\,\varkappa_i|$; постоянные C_{21} и C_{22} — одни и те же для всех $A\in F$; 4) для каждой матрицы $A\in F$ существует такая положительно определенная эрмитова матрица H, что собственные числа матрицы $HA+A^*H$ неположительны; при этом $\max(\|H\|,\|H^{-1}\|)<C_4$ для всех $A\in F$. М. З. Соломяк

11861. Теория неподвижных точек и ее применения в анализе. Лере (La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Leray Jean. Rend. Sem. Math., Univ. e Politec. Torino, 1955—1956, **15**, 65—74) (англ.)

Перепечатано без изменений из Proc. Internat. Congress Math. Cambridge, Mass., 1950, т. II; Amer. Math. Soc. Translat., Providence. R. I., 1952, 202—208. E. Begle

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 9, 747.

11862. Об инволюциях в пространстве Банаха. Альтман (On involution in Banach spaces. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 1, 33—36 (англ.; рез. русск.)

Пусть X — банахово пространство, Q — единичный шар в X: $Q=\{x:x\in X,\|x\|\leqslant 1\}$, S — граница шара Q. Пусть F — вполне непрерывный оператор, определенный на сфере S, отображающий S в X. Пусть U — инволюция сферы S в себя (т. е. $U(U(x))=x$), U — непрерывна, не имеет неподвижных точек и для почти всех натуральных n образ каждой n-мерной сферы при инволюции U содержится также в некоторой n-мерной сфере. Доказывается теорема: пусть отображение $f(x)=x-F(x)$

сферы S таково, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in S$ и пусть выполняется условие

$$f(U(x))/\|f(U(x))\| \neq f(x)/\|f(x)\| \text{ для всех } x \in S. \quad (1^*)$$

Тогда степень отображения f в смысле Лерея-Шаудера нечетна.

Пусть, F — вполне непрерывный оператор, определенный на шаре $Q, F(Q) \subset X$, не имеющий неподвижных точек на сфере S; доказывается, что при выполнении условия (1*) отображение $f(x) = x - F(x)$, а значит и $F(x)$ имеет неподвижную точку на шаре Q, т. е. существует точка $x_0 \in Q$ такая, что $F(x_0) = x_0$. Отмечается, что при $U(x) = -x$ из результатов автора получается результат М. А. Красносельского об антиподах для банаховых пространств, обобщающий соответствующую теорему Борсука. Л. Д. Кудрявцев

11863. О наилучшей аппроксимации абстрактных непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве. Зингер (Sur la meilleure approximation des fonctions abstraites continues à valeurs dans un espace de Banach. Singer Ivan), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 245—262 (франц.)

Через Q обозначается хаусдорфово бикомпактное пространство, $C(Q,E)$ — пространство всех абстрактных сильно непрерывных функций $x(q)$, $q \in Q$, со значениями в действительном банаховом пространстве E и с нормой $\|x(q)\|_C = \max_{q \in Q} \|x(q)\|_E$. Положим далее

$$p(q) = p_a(q) = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k(q),$$

где $x_1(q), \ldots, x_N(q)$ — линейно независимые функции, принадлежащие $C(Q,E)$, a_k — действительные числа. Полином $p_0(q)$ называется полиномом наилучшего приближения функции $x(q)$, если

$$\|x(q) - p_0(q)\|_C = \inf_a \|x(q) - p_a(q)\|_C = \inf_a \max_{q \in Q} \|x(q) - p_a(q)\|_E.$$

Впервые подобная постановка задачи наилучшего приближения была предложена в работе С. И. Зуховицкого и С. Б. Стечкина (РЖМат, 1957, 641), где были получены теоремы об условиях единственности полинома наилучшего приближения, а также о числе точек максимального уклонения. В реферируемой статье автор распространяет результаты своих прежних работ (РЖМат, 1957, 4173; 1958, 3081, 7925) на рассматриваемый случай, и доказывает теоремы, из которых вновь следуют теоремы Зуховицкого и Стечкина. Указываются также характеристические свойства полиномов наилучшего приближения. Приведем одну из таких теорем (теорема 3, 1). Для того чтобы полином $p_0(q)$ наименее уклонялся от функции $x(q)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $h \leqslant N+1$ точек $q_1, \ldots, q_h \in Q$, h экстремальных точек $f_1, \ldots, f_h$ единичной сферы S_{E^*} пространства E^* и h отличных от нуля чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, $\sum_1^h |\lambda_j| = 1$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda_j f_j[x_k(q_j)] = 0,$$

$k = 1, \ldots, N$, и

$$f_j[p_0(q_j) - x(q_j)] = (\operatorname{sign} \lambda_j) \|p_0(q) - x(q)\|_C,$$

$j = 1, \ldots, h$. В. Н. Никольский

11864. Общая схема приближенных методов анализа. Линь Цзюнь (Lin Chün), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9, № 4, 413—431 (кит.)

Статья представляет собой полное изложение ранее опубликованной заметки автора с обобщением некоторых результатов (РЖМат, 1959, 600). Ши Чжун-цы

11865. Равномерная сходимость сетей функций Хелмберг (Uniform convergence of nets of functions. Helmberg Gilbert), Proc. Koninkl nederl. akad. wet., 1959, A62, № 4, 419—427 (англ.)

Пусть X — непустое множество, $F(X)$ — частично упорядоченное множество комплексных функций на X ($f_1 < f_2$, если $|f_1(x)| \leqslant |f_2(x)|$ для любого $x \in X$). Непустое множество $N \subset F(X)$ называется нуль-сетью, если: 1) из $f_1 \in N$, $f_2 \in N$ следует существование $f_3 \in N$ такого, что $f_3 < f_1$, $f_3 < f_2$; 2) $\inf_{f \in N} |f(x)| = 0$ для любого $x \in X$. Говорят, что нуль-сеть сходится равномерно, если для любого $\delta > 0$ существует $f_\delta \in N$ такое, что $|f_\delta(x)| < \delta$, каково бы ни было $x \in X$. Множество $S \subset F(X)$ называется z-замкнутым, если каждая нуль-сеть из S сходится равномерно. Устанавливаются следующие теоремы (первая из них есть известная теорема Дини), связывающие z-замкнутость множеств функций на X со свойствами топологии в X:

1. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Множество $K(X)$ всех вещественных неотрицательных непрерывных функций на X с компактным носителем z-замкнуто.

2. Пусть S — множество вещественных неотрицательных функций на X таких, что из $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ следует: 1) $af_1 \in S$ для любого $a > 0$, 2) $f_1^n \in S$ для любого целого $n > 0$, 3) $\min(f_1, f_2) \in S$ и $\max(f_1, f_2) \in S$. Пусть T — слабейшая из топологий в X, для которой S становится множеством полунепрерывных сверху функций. Тогда компактность T эквивалентна z-замкнутости S.

3. Пусть S — вещественная алгебра вещественных функций на X, содержащая постоянные, а также $|f|$, как только $f \in S$. Пусть T — слабейшая из топологий в X, для которой S становится алгеброй непрерывных функций. Тогда компактность T эквивалентна z-замкнутости S.

4. Пусть S — комплексная алгебра комплексных функций на X, содержащая постоянные, а также $\bar{f}$ и $|f|$, как только $f \in S$. Пусть T — слабейшая топология, для которой S становится алгеброй непрерывных функций на X. Тогда компактность T эквивалентна z-замкнутости S.

5. Вполне регулярное пространство X компактно в том и только в том случае, когда множество $C(X)$ всех комплексных непрерывных функций на X z-замкнуто.

6. Пусть X вполне регулярно, S — сегмент в $U_+(X)$ или в $R_+(X)$ такой, что если $f \in S$, то $af \in S$ для любого $a > 0$, и $f^n \in S$ для любого целого $n > 0$. Тогда множество S z-замкнуто в том и только том случае, когда все функции из S исчезают на ∞ (здесь $U_+(X)$ (соответственно $R_+(X)$) означает множество всех вещественных неотрицательных непрерывных (соответственно полунепрерывных сверху) функций на X; непустое множество S называется сегментом в $G \subset F(X)$, если из $f \in S$, $g \in G$ и $g < f$ следует $g \in S$; функция $f \in F(X)$ называется исчезающей на ∞, если при любом $\delta > 0$ множество $A' = \{x : |f(x)| > \delta\}$ содержится в некотором компактном множестве из X).

7. Для вполне регулярного пространства X объединение всех z-замкнутых сегментов из $C(X)$ совпадает с множеством $C_\infty(X)$ всех комплексных непрерывных функций на X, исчезающих на ∞.

8. Пусть X — вполне регулярно. Пространство X локально компактно в том и только в том случае, когда для любого $x \in X$ существует z-замкнутый сегмент $S(x)$ в $C(X)$, который содержит функцию f такую, что $f(x) \neq 0$. Пространство X компактно в том и только том случае, когда в $C(X)$ существует z-замкнутый сегмент, содержащий отличную от нуля постоянную. С. Н. Крачковский

11866. Мера Винера и ее приложения к приближенным методам. 1. Сульдин А. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 145—158

Работа, по-видимому, является первой попыткой применить идеи интегрирования в функциональных пространствах к приближенным методам (см. также Cameron R. H., Martin W. T., Amer. J. Math., 1944, 66, № 2, 281—298). Ставится следующая задача: дан линейный функционал над пространством непрерывных функций; найти наилучшую аппроксимацию в смысле среднеквадратического по мере Винера посредством функционалов заданного класса. В частности, пусть дан функционал $f(x)=\int_0^1 q(t)\,x(t)\,dt$, $x(t)\in C_0[0,1]$, т. е. $x(t)$ — непрерывная функция на $[0,1]$ и $x(0)=0$. Указать для фиксированного $n>0$ такие C_l и t_l, что

$$V(x)=\int_{C_0[0,1]}\left[f(x)-\sum_{l=1}^{n}C_l x(t_l)\right]^2 d_w(x)=\min_{C_l,\,t_l};$$

w — мера Винера в $C_0[0,1]$. Подобная постановка вопроса, помимо общего интереса, может оказаться полезной при массовой аппроксимации функционалов, например, при вычислении интегралов в вычислительной машине, когда нас интересует малость „средней“ (по различным функциям, которые интегрируются) погрешности вычислений. Для некоторых случаев решение этой задачи удается получить в окончательном виде. Так, если $q(t)\equiv 1$, то $V(x)$ выражается явно через C_l, t_l и проблема сводится к решению обычной экстремальной задачи. Соответствующая наилучшая квадратурная формула $\int_0^1 x\,dt(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}x\left(\frac{2k}{2n+1}\right)$. В § 1 работы выводятся несложным путем выражения для интегралов по мере Винера от некоторых функционалов (Общими методами эти формулы получены Камероном и Мартином). В § 2 поставленная проблема решается для случая функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\,dt$. Изучается также вопрос о разыскании наилучшей квадратурной формулы среди формул, дающих точное значение интеграла для полиномов степени не выше m. § 3 посвящен исследованию функционала $\int_0^1 q(t)\,x(t)\,dt$. Результаты применяются, например, к приближенному вычислению коэффициентов Фурье. В отличие от приведенной выше формулы полученные здесь результаты несколько отличаются от известных в гармоническом анализе формул.

А. М. Вершик

11867. Матрица плотности в квантовой механике многоэлектронных систем. I. Обобщенные базисные функции. Факторизация и физическая интерпретация матриц плотности. Мак-Уини (The density matrix in many-electron quantum mechanics. I. Generalized product functions. Factorization and physical interpretation of the density matrices. McWeeny R.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A253**, № 1273, 242—259 (англ.)

Для описания системы N электронов в качестве базисных функций обычно используются антисимметризованные произведения N одноэлектронных волновых функций. В реферируемой статье развивается приближенный метод для описания многоэлектронных систем такого рода, в которых все N электронов естественным образом распределяются в группы ($N=N_A+N_B+\ldots$) так, что каждая группа приближенно обладает своей (антисимметричной) „групповой волновой функцией“ $\Phi_{Aa}(1,2,\ldots,N_A)$, где индекс a нумерует частные состояния этой группы. Такого рода ситуация возникает, например, когда каждая из групп электронов связана с некоторой группой ядер, достаточно разделенной пространственно от других таких групп. При этом „групповые волновые функции“ можно считать приближенно удовлетворяющими следующим условиям ортогональности:

$$\int \Phi^*_{Aa}(1,i,j,\ldots)\,\Phi_{Bb}(1,k,l,\ldots)\,d\tau_1=\delta_{AB}\delta_{ab},\quad (Aa\neq Bb). \tag{1}$$

Метод заключается в том, что в качестве базисных функций для описания всей системы используются функции типа

$$\Phi_{Aa,Bb,\ldots}(1,2,\ldots,N)=$$
$$=M\Sigma_P(-1)^P P\Phi_{Aa}(1,\ldots,N_A)\,\Phi_{Bb}(N_A+1,\ldots$$
$$\ldots,N_A+N_B)\ldots, \tag{2}$$

где M — нормирующий множитель и суммирование производится по всем перестановкам, кроме тех, которые оставляют каждый электрон в его исходной группе. Волновая функция системы представляется в виде

$$\Psi(1,\ldots,N)=\Sigma_{a,b,\ldots}C_{ab\ldots}\Phi_{Aa,Bb\ldots}(1,\ldots,N). \tag{3}$$

Система (2) не является полной, если допускаются не все разделения $N=N_A+N_B+\ldots$, но представление (3) предполагается достаточным для приближенного описания систем рассматриваемого типа. В рамках данного приближения развивается формализм матрицы плотности, определяемой обычным образом. Показано, что матрица плотности всей системы может быть выражена через матрицы плотности отдельных электронных групп. Этот формализм применяется затем для вычисления энергии системы. При этом используется метод возмущений. В качестве первого приближения берется состояние $\Psi=\Phi_{Aa_0,Bb_0,\ldots}$, в котором все группы находятся в основных состояниях a_0, b_0, ... Вклад возбужденных состояний оценивается методом возмущений. Энергия представляется в виде суммы нескольких членов, имеющих простой физический смысл, причем каждый из них выражается в терминах матриц плотности отдельных групп. Все исследование производится в общем виде, без дополнительных предположений о „групповых волновых функциях“, кроме условия (1).

П. И. Фомин

11868. Критические параметры реакторов в теории переноса. Биркхофф (Reactor criticality in transport theory. Birkhoff Garrett), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 4, 567—569 (англ.)

В терминах теории переноса нейтронов (Davison B., Neutron Transport Theory, Oxford, 1957) показывается зависимость концепции критического распределения нейтронов, эффективного коэффициента размножения и функции значения (importance function) от положительности случайного процесса, связанного с возможными результатами последовательных столкновений выделяющихся нейтронов с ядрами в реакторе. Используется терминология теории банаховых структур. В. Н. Судаков

11869. Эквивалентные функции: гибриды и функции Ванье. Олтман (Equivalent functions: hybrids and Wannier functions. Altmann S. L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 197—206 (англ.)

Пусть G — какая-либо подгруппа группы симметрии кристалла или молекулы. Совокупность функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\ldots$ автор называет эквивалентной, если она инвариантна относительно G. Полагая, что G — абелева группа, автор, исходя из какого-либо ее представления, строит эквивалентную совокупность взаимно ортогональных функций. Автор замечает, что таким образом можно получить известные функции Ванье (Wannier G.,

Phys. Rev., 1937, **52**, 191) для кристаллов, если должным образом выбрать исходные функции представления. Таким же образом можно получить введенные Паулингом (Pauling L., Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., 1928, **14**, 358) гибридные функции для атомов и молекул и Лёвдином (Lowdin P. O., Phys. Rev., 1950, **78**, 365) — эквивалентные орбитальные функции.

Г. Я. Любарский

См. также: 11266, 11413, 11762, 11763, 11784, 12189.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

11870. Задача разорения с численными таблицами. Сэикэ, Оданака (On ruin problem with numerical tables. Seike T., Odanaka T.), J. Operat. Res. Soc. Japan, 1957, **1**, № 2, 77—89 (англ.)

Рассматривается хорошо известная задача „разорения игрока" (см., например, Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, гл. XIV, §2, 3). Метод и полученные формулы те же, что у Феллера, только предположено, что возможный выигрыш равен $+C$ и $-C$ с вероятностями p и q соответственно. Анализируется зависимость величины вероятности проигрыша q_z, математического ожидания выигрыша $E(G)$, математического ожидания продолжительности игры D_z от вероятности успеха p, величины ставки при каждом испытании C, общего капитала игроков a и начальной точки игры z. Приведены таблицы численных значений q_z, $E(G)$, D_z при $a=10$, $c=z$, $p=0{,}5\,(0{,}01)\,0{,}4$; $0{,}4\,(0{,}1)\,0{,}1$; $z=1\,(1)\,10$. Показано, как вычисляются аналогичные таблицы для любых a, p, z, c.

В. И. Бабкин

11871. Суммирование изотропных случайных векторов в n-мерном пространстве. Мараваль-Касесновес (La adición de vectores aleatorios isotropos en un espacio de n dimensiones. Maravall Casesnoves Dario), Trab. estadíst., 1958, **9**, № 3, 183—202 (исп.; рез. англ.)

Изотропным называется такое распределение n-мерных непрерывных случайных векторов, плотности которых обладают свойством сферической симметрии, т. е. является функцией расстояния от центра O. Подробно исследуется двумерный случай и приводится обобщение на многомерный случай. Работа частично пересекается с работой Дейкера (РЖМат, 1956, 8971), которая, по-видимому, была неизвестна автору.

W. Richter

11872. О расстоянии между двумя законами распределения. Фреше (Sur la distance de deux lois de probabilité. Fréchet Maurice), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 3, 183—198 (франц.)

Леви предложил следующее определение расстояния между двумя функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$: расстояние между F и G равно нижней грани расстояния $\rho(X, Y)$ между случайными величинами X и Y, двумерная функция распределения $H(x, y)$ которых подчинена требованию, чтобы X и Y имели соответственно функции распределения F и G. Это определение зависит от определения расстояния между случайными величинами с известным совместным распределением, причем неясно, всегда ли расстояние между неравными функциями распределения будет >0. Сначала в работе подробно исследуется случай, когда $\rho^2(X, Y)=M(X-Y)^2$, и доказывается, что если F и G непрерывны, строго монотонны и удовлетворяют некоторым условиям регулярности при $x\to\pm\infty$, то расстояние между ними равно $\sqrt{\int_0^1 [F^{-1}(t)-G^{-1}(t)]^2\,dt}$ (F^{-1} и G^{-1} — функции, обратные F и G). Затем предлагается новое определение расстояния между F и G, отличающееся от определения Леви тем, что вместо нижней грани по всем допустимым $H(x, y)$ берется одно единственное двумерное распределение $H_1(x, y)=\inf[F(x), G(y)]$.

Это расстояние 1) при любом выборе $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам расстояния, 2) совпадает с расстоянием Леви при $\rho^2(X, Y)=M(X-Y)^2$, 3) для непрерывных строго монотонных F и G равно $\rho(F^{-1}(T), G^{-1}(T))$, где T — случайная величина с равномерным распределением на (0, 1).

А. А. Юшкевич

11873. Исследование ряда зависимых случайных величин. I. II. Уэно, Сугаку, 1956, 8, № 2, 63—94 (японск.)

Автор показывает, что методы исследования последовательностей независимых случайных величин непригодны в случае зависимых величин, и ищет нужный метод. В § 1 автор обсуждает определение независимости и пытается ему придать количественное обоснование (вводится мера отклонения от независимости) на основе простой цепи Маркова. В § 2 доказываются основные леммы. В §§ 4, 5, 6 в терминах меры отклонения от независимости разбираются: закон больших чисел, закон «нуль-один», проблемы сходимости бесконечных рядов и существования предельных распределений для зависимых величин.

Ling Chang Wen

11874. К некоторым теоремам о пуассоновском распределении. Банерджи (On some theorems on Poisson distribution. Banerjee D. P.), Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1959, **A28**, № 1, 30—33 (англ.)

В I части доказывается, что распределение числа частиц, попадающих за время t в объект величины S, площадь проекции которого на плоскость, перпендикулярную к направлению потока частиц, есть a, задается функцией $P(x, t)=e^{-m}m^x/x!$, где m — среднее число частиц, попадающих за время t на площадь a. Во II части отыскиваются моменты многомерного пуассоновского распределения.

В. А. Маковский

11875. О марковских цепях. 1. Кавамура (On Markov chains. I. Kawamura Tomoo), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs, 1957, **4**, № 4, 111—124 (англ.)

Рассматривается однородная по времени цепь Маркова $x_n(\omega)$ с переходными вероятностями за один шаг p_{ij} и набор некоторых чисел $t_{ij}>0$. Изучается асимптотика при $n\to\infty$ величин:

$$t_{jk}^{(n)}=\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}}(t_{jj_1}+t_{j_1j_2}+\ldots+t_{j_{n-1}k})\times$$
$$\times p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}k},$$
$$s_{jk}^{(n)}=\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\neq k}(t_{jj_1}+t_{j_1j_2}+\ldots+t_{j_{n-1}k})\times$$
$$\times p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}k},$$
$$f_{jk}^{(n)}=\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\neq k}p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}k}.$$

Доказывается, что если $\sum_n f_{jj}^{(n)} < 1$, то ряды $\sum_n s_{jj}^{(n)}$ и $\sum_n t_{jj}^{(n)}$ сходятся или расходятся одновременно. Аналогичным свойством обладают ряды $\sum_{n=1}^{\infty} nf_{jj}^{(n)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} np_{jj}^{(n)}$. Если j-е состояние апериодично, возвратно и $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{jj}^{(n)} < \infty$, то $(n \to \infty)$ $t_{jj}^{(n)}/n \to m_j/\mu_j^2$, где $m_j = \sum_n s_{jj}^{(n)}$. Если, кроме того, $M_j = \sum_n n(n-1) \times \times f_{jj}^{(n)} < \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \left[t_{jj}^{(n)} - m_j\mu_j^{-2}(n+1)\right] = \mu_j^{-3} \times \times (m_jM_j - \mu_jM'_j)$, где $M'_j = \sum_{n=1}^{\infty} ns_{jj}^{(n)}$.

Автор приводит также ряд других асимптотических формул. Следует отметить большое количество опечаток в работе. Наиболее существенные из опечаток: вместо aperiodic в формулировке теоремы 4 следует читать periodic, вместо $(mM - M')$ в последней строке стр. 121 следует читать $(mM - \mu M')$. М. Г. Шур

11876. Суммирование случайного числа случайных величин и стохастический процесс образования потомства от одного прадеда. **Маравалль-Касесновес** (La adición de variables aleatorias en número aleatorio y el proceso estocastico de la descendencia de un mismo progenitor. Maravall Casesnoves Dario), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, 18, № 5-6, 214—243 (исп.)

Первая часть: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — одинаково распределенные независимые случайные величины, а n — случайная величина, которая принимает только неотрицательные целые значения. В довольно полной и прозрачной форме рассматривается поведение сумм $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. В частности, строятся любопытные примеры для различных распределений величин ξ_i и n; даются характеристические функции (х. ф.) $\rho(t)$ суммы α. Исследуются предельные случаи, когда отдельные параметры распределений стремятся к 0 или к $+\infty$. Приведем хотя бы такой результат: Пусть распределение n имеет х. ф. $ae^{it}/(1 - be^{it})$, где $a + b = 1$, и пусть ξ_1 следует закону Коши. Тогда $\rho(t) = ae^{-|t|}/(1 - be^{-|t|})$. Для $a \to 0$ распределение величины α/a стремится к распределению с х. ф. $1/(1 + |t|)$. Среднее арифметическое n слагаемых с этой последней х. ф. имеет для больших n распределение, близкое к распределению Коши.

Вторая часть: В качестве применения развитой общей теории рассматривается стохастический процесс $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, где ξ_1 — случайное число индивидов первого поколения, происходящих от одного индивида (пусть $m = E\xi_1$), ξ_n — число потомков в n-м поколении от одного индивида. Тогда $E\xi_n = m^n$, $D^2\xi_n = m^{n-1} \times \times ((m^n - 1)/(m - 1))\, D^2\xi_1$. Строятся примеры. Исследуется вероятность того, что потомство исчезает после n шагов. W. Richter

11877. Эффективный пример гауссовой функции. **Урбаник** (An effective example of a Gaussian function. Urbanik K.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 6, 343—349 (англ.; рез. русск.)

Измеримое в смысле Лебега подмножество E положительной полупрямой относительно измеримо, если существует предел $|E|_R = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |E| \{t: 0 \leqslant t \leqslant T\}|$, где $|A|$ — лебегова мера множества A. Для любой функции $f(t)$ и любого интервала $I = \{t: a \leqslant t < b\}$ введем обозначения $f^*(I) = f(b) - f(a)$, $I + t = \{u + t: u \in I\}$. Непрерывную функцию $f(t)$, определенную на положительной полупрямой, назовем, следуя Г. Штейнхаузу, гауссовой функцией, если для любой системы непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_k$ и любой системы действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ множество $\bigcap_{j=1}^{k} \{t: f^*(I_j + t) < x_j\}$ относительно измеримо и

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} \{t: f^*(I_j + t) < x_j\} \right|_R = \prod_{j=1}^{k} \Phi\left(\frac{x_j}{\sqrt{|I_j|}}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Известно, что почти все реализации нормированных броуновских процессов суть гауссовы функции. В статье излагается эффективный метод построения гауссовых функций. Резюме автора

11878. Несколько замечаний о случайных мерах. **Скороход** (Декілька зауважень про випадкові міри. **Скороход А. В.**), Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ., вып. I, 105—114 (укр., рез. русск.)

Пусть X — некоторое множество и S — σ-алгебра подмножеств из X. На X задана случайная мера (с. м.) μ, если для каждого $A \in S$ определена случайная величина $\mu(A)$, так что какова бы ни была последовательность попарно непересекающихся множеств $A_k \in S$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сходится по вероятности к $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Если X — метрическое пространство и мера любого одноточечного множества равна нулю, то с. м. μ называется регулярной. С. м. μ называется нормальной, если совместное распределение $\mu(A_1), \mu(A_2), \ldots, \mu(A_k)$ для любых $A_1, A_2, \ldots, A_k$ нормально. Каждая нормальная мера полностью определяется заданием двух функций множества $m(A) = M\mu(A)$ и $\sigma^2(A) = M\mu^2(A)$. С. м. μ называется марковской, если для любой монотонно возрастающей последовательности множеств C_t величины $\mu(C_t)$ образуют цепь Маркова. Рассматриваются примеры марковских мер, представляющие интерес в математической статистике. Доказывается, что для каждой регулярной нормальной марковской меры с $M\mu(A) = 0$ существует на S такая числовая мера $\lambda(A)$ и такие постоянные a и b, что $\sigma^2(A) = a\lambda(A) + b\lambda^2(A)$. Относительно марковских мер, принимающих целые неотрицательные значения, доказывается следующее утверждение, представляющее обобщение закона Пуассона: если существует числовая мера $m(A)$ такая, что $m(X) = 1$ и

$$\lim_{m(A)\to 0} P\{\mu(A) = 1\}/m(A) = 1,$$

$$\lim_{m(A)\to 0} P\{\mu(A) > 1\}/m(A) = 0,$$

то существует непрерывная при $|z| \leqslant 1$ и аналитическая при $|z| < 1$ функция $\varphi(z)$ такая, что для любых попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$

$$P\{\mu(A_1) = k_1,\ \mu(A_2) = k_2, \ldots, \mu(A_r) = k_r\} = \frac{m^{k_1}(A_1)}{k_1!} \frac{m^{k_2}(A_2)}{k_2!} \cdots \frac{m^{k_r}(A_r)}{k_r!} \times \times \varphi^{(k_1+k_2+\cdots+k_r)}\left(1 - m\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right)\right),$$

где $\varphi^{(k)}(z)$ — производная порядка k функции $\varphi(z)$. В заключение указываются некоторые нерешенные проблемы из теории марковских с. м. (описание класса всех марковских мер; описание всех марковских процессов, являющихся функциями распределения марковской меры на прямой; асимптотические теоремы для марковских мер и др.). М. И. Ядренко

11879. О непрерывности ковариации случайных функций второго порядка. Салес-Вальес (Sobre la continuidad de la covarianza de las funciones aleatorias de segundo orden. Sales Vallés Francisco de A.), Collect. math., 1959, **11**, № 1, 69—75 (исп.)

Для комплексных случайных величин с математическим ожиданием 0 определяется „угловое" расстояние $d(X, Y) = \sqrt{1 - \mathrm{Re}\, E(X\bar{Y})/\sigma_X\sigma_Y}$. Доказываются некоторые интересные свойства функции $d(X, Y)$ по сравнению с обычным L_2-расстоянием $\| X - Y \| = \sqrt{E|X-Y|^2}$ („угловая" сходимость последовательности случайных величин). Новое понятие применяется для вывода некоторых теорем о корреляционной функции $\Gamma(t, t')$ случайной функции, стационарной в широком смысле.

W. Richter

11880. Резольвенты, переходные функции и строго марковские процессы. Рей (Resolvents, transition functions, and strongly Markovian processes. Ray Daniel), Ann. Math., 1959, **70**, № 1, 43—72 (англ.)

Автор отправляется от понятия резольвенты марковского процесса, определяя ее как семейство R_λ, $\lambda > 0$, линейных операторов в банаховом пространстве измеримых ограниченных функций на фазовом пространстве X, положительных, непрерывных относительно монотонной сходимости и таких, что $R_\lambda 1 = 1/\lambda$ и $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

Доказывается, что если X — компактное хаусдорфово пространство, C — множество непрерывных вещественных функций на X и R_λ — резольвента на C такая, что $R_\lambda C \subset C$ и множество $R_\lambda f$, $f \geqslant 0$, разделяет точки X, то в пространстве B всех бэровских функций на X существует единственная непрерывная справа при $t > 0$ полугруппа T_t такая, что $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt$. Условие $T_t f(x) \to f(x)$ для любого $f \subset C$ выделяет в X множество $X \setminus X_0$ точек стохастической непрерывности полугруппы T_t. Для всякого начального распределения, сосредоточенного вне X_0, существует марковский процесс с полугруппой T_t, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. Этот процесс автоматически оказывается строго марковским и траектории его целиком лежат в $X \setminus X_0$ (это последнее свойство, а также непрерывность справа при $t = 0$ нарушаются, если начальное распределение имеет на X_0 положительную массу). Доказательство опирается на свойства полумартингалов и теорему Стона — Вейерштрасса. Попутно автором доказан новый критерий строгой марковости.

С помощью этих результатов автор получает частичное решение задачи о построении по данному марковскому процессу стохастически эквивалентного ему строго марковского процесса. Для этого фазовое пространство X процесса пополняется по некоторой равномерной структуре до компакта $\bar{X}$. При этом резольвента R_λ исходного процесса продолжается в резольвенту $\bar{R}_\lambda$ в пространстве всех непрерывных функций на $\bar{X}$ так, что выполняются сформулированные выше условия, обеспечивающие существование на $\bar{X}$ строго марковского процесса с резольвентой $\bar{R}_\lambda$.

В приложении к работе указываются способы сведения задачи в несепарабельном C к сепарабельному случаю.

И. В. Гирсанов

11881. О непрерывности переходных функций. Остин, Блументал, Чейкон (On continuity of transition functions. Austin D. G., Blumenthal R. M., Chacon R. V.), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 533—541 (англ.)

Пусть $P_t(x, A)$ ($t > 0$, $x \in X$, $A \subset F$) — однородная переходная функция на пространстве (X, F), удовлетворяющая обычным условиям. Исследуется непрерывность $P_t(x, A)$ по t при отказе от предположения $\lim_{t\to 0} P_t(x, x) = 1$. Приведем некоторые из результатов.

Теорема 1.1. Пусть $P_t(x, A)$ — $I \times F$-измерима по (t, x) при всех A, где I — измеримые по Лебегу множества на $(0, +\infty)$. Тогда для непрерывности $P_s(x, A)$ при данном x и любом A необходимо и достаточно существования на F конечной меры μ, относительно которой меры $P_t(x, A)$ абсолютно непрерывны при всех t и данном x.

Теорема 2.1. Пусть мера μ из теоремы 1.1. существует, $f(t, y)$ — плотность меры $P_t(x, A)$ по μ, F^μ — пополнение σ-алгебры F по мере μ, $\varepsilon > 0$, x фиксировано. Тогда для равномерной при $A \in F$ и $t \geqslant \varepsilon$ непрерывности функции $P_t(x, A)$ необходимо и достаточно, чтобы плотность $f(t, y)$ можно было выбрать измеримой по (t, y) относительно $I \times F^\mu$.

Теорема 2.2. Для существования $I \times F^\mu$-измеримой плотности из теоремы 2.1 достаточно, чтобы F имело счетную базу и t-функция $P_t(x, A)$ при каждом A была измерима по Лебегу.

Теорема 2.3. Если $P_t(x, A)$ непрерывна справа по t при фиксированном x и всех A, то при каждом $\varepsilon > 0$, $P_t(x, A)$ равномерно непрерывна по всем $t \geqslant \varepsilon$, $A \in F$.

Теорема 3.2. Если при данном x и всех A t-функция $P_t(x, A)$ измерима по Лебегу и предел $\lim_{t\to 0} (1/t) \int_0^t P_t(x, A)\, dt$ существует, и либо F имеет счетную базу, либо при каждом A (t, x)-функция $P_t(x, A)$ $I \times F$-измерима, то $P_t(x, A)$ непрерывна по t при всех A.

А. А. Юшкевич

11882. Замечания об инвариантных функциях марковских процессов. Урбаник (Remarks on invariant functions in Markov processes. Urbanik K.), Colloq. math., 1958, **5**, № 2, 223—230 (англ.)

Пусть $\omega(t)$ — однородная цепь Маркова со ступенчатыми выборочными функциями и непрерывной по t функцией вероятностей перехода $p(t, x, y)$; X — множество состояний; $\Omega(X)$ — множество траекторий цепи. Как показал Леви (Lévy P., Ann. scient. École norm. supér., 1951, 68, 327—381), для такого процесса существует предельное распределение вероятностей $Q(x) = \lim_{t\to\infty} P\{\omega : \omega(t) = x\}$. Пусть T_τ ($-\infty < \tau < \infty$) — группа операторов сдвига для $\omega(t)$. Функция $f(\omega)$, определенная на $\Omega(X)$ и принимающая действительные значения, называется инвариантной функцией процесса $\omega(t)$, если для всякого борелевского множества U множество $\{\omega : f(\omega) \in U\}$ инвариантно относительно всех T_τ. Если $\sum_{x\in X} Q(x) = 1$, то для всякой инвариантной функции рассматриваемого процесса существует такое множество A, что мощность его не превосходит мощности множества X и $P\{\omega : f(\omega) \in A\} = 1$. Пусть X_0 — конечное или счетное множество и $q(x)$ ($x \in X_0$) — последовательность неотрицательных действительных чисел такая, что $\sum_{x\in X_0} q(x) < 1$. Тогда существует цепь Маркова $\omega(t)$ со множеством значений $X \supset X_0$, для которой

$$Q(x) = \begin{cases} q(x), & \text{если } y \in X_0, \\ 0, & \text{если } x \in X - X_0 \end{cases}$$

и существует инвариантная функция $f(\omega)$, принимающая в существенном несчетное множество значений (т. е. для всякого счетного множества A $P\{\omega : f(\omega) \in A\} < 1$).

А. А. Темпельман

11883. Непрерывные одномерные марковские процессы и аддитивные функционалы от них. Волкон-

ский В. А., Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 208—211 (рез. англ.)

Доказывается, что инфинитезимальный оператор непрерывного однородного феллеровского процесса, регулярного на интервале (r_1, r_2), получается сужением области определения оператора $\mathfrak{A}[f(x) = D_v[D_u f(x) - \int f(x)\, dm(x)]$ с помощью некоторых граничных условий (функция m связана с возможностью обрыва процесса во внутренней точке). Для вывода этого результата автор доказывает, что при широких предположениях для непрерывного однородного обрывающегося марковского процесса X существует такой же необрывающийся процесс Y, подпроцессом которого является X. Окончательный результат выводится с помощью теоремы об общем виде аддитивного функционала от процесса, которая имеет и самостоятельный интерес.

И. В. Гирсан в

11884. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации. Добрушин Р. Л., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 474—477

Сообщение $\{W\}$ задается как пара измеримых пространств (X, S_X) $(\widetilde{X}, S_{\widetilde{X}})$ и множество W распределений $P_{\xi\widetilde{\xi}}$ в $X \times \widetilde{X}$ с общим распределением p_ξ, индуцируемым в X. Энтропия сообщения W: $H(W) = \inf_{P_{\xi\widetilde{\xi}} \in W} I(\xi, \widetilde{\xi})$.

Канал связи $\{Q, V\}$ задается как пара измеримых пространств (Y, S_Y), $(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$, переходная функция $Q(y, A)$, $y \in Y$, $A \in S_{\widetilde{Y}}$ и множество V распределений в $Y \times \widetilde{Y}$. Пропускная способность канала $C(Q, V) = \sup I(\eta, \widetilde{\eta})$, где $p_{\eta\widetilde{\eta}} \in V$, и с вероятностью 1 $P(\widetilde{\eta} \in A \mid \eta) = Q(\eta, A)$ при всех $A \in S_{\widetilde{Y}}$. Сообщение $\{W\}$ можно передать по каналу $\{Q, V\}$, если существуют случайные величины ξ, η, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\xi}$, принимающие значения, соответственно, в X, Y, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ такие, что: 1) ξ, η, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\xi}$ образуют цепь Маркова, 2) $p_{\xi\widetilde{\xi}} \in W$, 3) $P(\xi \neq \widetilde{\xi}) = 0$. Последовательность пар случайных величин (ξ^t, η^t) автор называет информационно устойчивой, если п.в. $\lim_{t\to\infty} \frac{i_{\xi^t\eta^t}(\xi^t, \eta^t)}{I(\xi^t, \eta^t)} = 1$ или если при всех достаточно больших t мера $p_{\xi^t\eta^t}(\cdot)$ сингулярна относительно $p_{\xi^t} \times p_{\eta^t}(\cdot)$ (здесь $I(\xi, \eta)$ и $i_{\xi\eta}(x, y)$ — соответственно, информация и информационная плотность пары (ξ, η)). При некоторых ограничениях типа информационной устойчивости на канал $\{Q^t, V^t\}$ и на последовательность сообщений $\{W^t\}$ из того, что $\lim_{t\to\infty} H(W^t) = \infty$, $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H(W^t)}{C(Q^t, V^t)} < 1$, следует, что при всех достаточно больших t сообщение $\{W^t\}$ может быть передано по каналу $\{Q^t, V^t\}$.

А. А. Темпельман

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

11885. Таблицы случайных наблюдений из типовых распределений. Кенуй (Tables of random observations from standard distributions. Quenouille M. H.), Biometrika, 1959, 46, № 1-2, 178—202 (англ.)

Приведены таблицы случайных наблюдений из восьми типовых распределений, наиболее часто встречающихся при проведении расчетов методом Монте-Карло. Каждое из рассматриваемых распределений имеет средним нуль и вторым моментом единицу. Таблицы случайных чисел насчитывают тысячу чисел каждого типа распределения. В таблицы включены случайные числа со следующими распределениями: 1) нормальное, 2) прямоугольное: $f(x)\,dx = (1/2\sqrt{3})\,dx$; $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$, 3) логарифмически нормальное, 4) экспоненциальное, 5) двустороннее экспоненциальное: $f(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right) dx$ $(-\infty \leqslant x < \infty)$. При составлении таблиц использована трансформация наблюдений нормально распределенных (0, 1) случайных чисел.

В. А. Михайлов

11886. Сколько групп случайных чисел будут полезны, когда производится частная выборка? Джонс (How many of a group of random numbers will be usable selecting a particular sample? Jones Howard L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, № 285, 102—122 (англ.)

При образовании выборки из конечной совокупности с помощью случайных чисел некоторые числа отбрасываются ввиду несоответствия рассматриваемой серии чисел в совокупности или ввиду того, что они дублируют предшествующую выборку. Число случайных чисел, оставшееся полезным, является поэтому случайным, имеющим вероятностное распределение. В статье получено это распределение и даются формулы для факториальных моментов разностей между оставшимися полезными числами и объемом совокупности. Рассматриваются приближения кумулятивного распределения числа полезных случайных чисел биномиальным и пуассоновским распределениями. Приводятся таблицы сравнений кумулятивных распределений (точное и приближенных) для случая оценки числа различных членов в повторной выборке и для случая оценки числа полезных случайных чисел в частной выборке. Указывается, что рассматриваемый здесь вопрос встречается и в задачах массового обслуживания. Приведены числовые примеры в качестве иллюстрации.

М. К. Камалов

11887. Таблицы для плотности распределения размаха в нормальных выборках. Сибуя, Года (Tables of the probability density function of range in normal samples. Sibuya Masaaki, Toda Hideo), Ann. Inst. Statist. Math., 1957, 8, № 3, 155—165 (англ.)

Плотность распределения размаха в выборке объема n из генеральной совокупности с плотностью $\varphi(x)$ (и функцией распределения Φ) записывается в виде $f_n(\omega) = n(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\varphi(x, \omega)] \exp[(n-2)\,\psi(x, \omega)]\,dx$, где $\varphi(x, \omega) = \log\varphi\left(x + \frac{\omega}{2}\right) + \log\varphi\left(x - \frac{\omega}{2}\right)$, $\psi(x, \omega) = \log\left[\Phi\left(x + \frac{\omega}{2}\right) - \Phi\left(x - \frac{\omega}{2}\right)\right]$. Если $\Phi(x)$ — симметричное унимодальное распределение, то выражение для $f_n(\omega)$ имеет единственный максимум в $x = 0$ и быстро уменьшается при $|x|$ увеличивающемся. Если $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, то $f_n(\omega)$ разлагается по полиномам Эрмита с аргументом $2\varphi(\omega/2)\{\Phi(\omega/2) - \Phi(-\omega/2)\}$. В работе приведены таблицы значений $f_n(\omega)$ для n, изменяющегося от 3 до 20 для $\omega = 0;\ 0{,}05;\ 0{,}10;\ 0{,}15; \ldots, 7{,}65$. Каждое значение вычислено с четырьмя десятичными знаками.

В. И. Бабкин

11888. Границы вторых моментов широты выборки. Моригути (Bounds for second moments of the sample range. Moriguti Sigeiti), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1954, 3, № 3, 57—64 (англ.)

Рассматриваются симметричные генеральные совокупности с конечной дисперсией σ^2. Пусть R обозначает широту выборки. Находятся: 1) наименьшая верхняя граница математического ожидания R^2/σ^2; 2) наи-

большая нижняя граница коэффициента изменчивости R; 3) наибольшая нижняя граница дисперсии R/σ.

Л. Н. Куцев

11889. Достаточные статистики наименьшей размерности. Баранкин, Кац (Sufficient statistics of minimal dimension. Barankin Edward W., Katz Melvin, Jr), Sankhya, Санкия, Indian J. Statist., 1959, 21, № 3-4, 217—246 (англ.)

Пусть $M=\{\mu_\theta : \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностных мер на измеримых по Лебегу подмножествах открытого множества Ω в n-мерном евклидовом пространстве $E^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\}$. Множество параметров $\Theta=\{\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_\nu)\}$ является открытым множеством в ν-мерном евклидовом пространстве E^ν. Предполагается, что все μ_θ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега и соответствующие плотности $p(x,\theta)$ положительны и имеют непрерывные производные $\partial p/\partial x_i$, $\partial p/\partial\theta_j$, $\partial^2 p/\partial x_i\partial\theta_l$.

Функция T на Ω называется евклидовой размерности r в точке x^0, если существует окрестность точки x^0 такая, что T отображает ее в r-мерное евклидово пространство. Пусть T евклидова размерности r в точке $x^0\in\Omega$ и $T(x)=(h_1(x),\ldots,h_r(x))$ в некоторой окрестности x^0. Тогда T называется регулярной в x^0, если функции $h_l(x)$ непрерывно дифференцируемы и матрица $I(x)=\|\partial h_l/\partial x_j\|$ имеет ранг r в точке x^0. Пусть $x\in\Omega$; $j_1,\ldots,j_n$ — натуральные числа $\leqslant\nu$; $\theta^{(1)},\ldots,\theta^{(n)}\in\Theta$; $L(x;j_1,\ldots,j_n;\ \theta^{(1)},\ldots,\theta^{(n)})=\|(\partial^2\log p/\partial x_i\partial\theta_{j_k})_{x,\theta(k)}\|$, $i,k=1,\ldots,n$. Положим $\rho_1(x)=\max\limits_{L\in Lx}(\text{ранг } L)$, $\rho(x^0)=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\max\limits_{x\in S_{x^0;\alpha}}\rho_1(x)$, где L_x — класс матриц $L(x;\ldots)$ при фиксированном x, а $S_{x^0,\alpha}$ — сфера радиуса α с центром в x^0.

Доказываются следующие утверждения. Если T — достаточная (относительно M) статистика, являющаяся евклидовой размерности r в x^0 и регулярной в x^0, то $r\geqslant\rho(x^0)$. Назовем точку x Ω регулярной (относительно M), если $\rho(x)=\rho_1(x)$. Если x^0 — регулярная точка, то существует достаточная статистика, являющаяся евклидовой размерности $\rho(x^0)$ в x^0 и регулярной в x^0; существует достаточная статистика T^*, которая для почти всех регулярных точек x^0 является евклидовой размерности $\rho(x^0)$ в x^0 и регулярной в x^0. T^* является локально функционально минимальной в почти всех регулярных точках. Приводятся два иллюстративных примера. Библ. 1 назв.

Л. Я. Савельев

11890. Доверительные пределы для среднего нормальной совокупности с известным коэффициентом вариации. Уэйлер (Confidence limits for the mean of a normal population with known coefficient of variation. Weiler H.), Austral. J. Appl. Sci., 1958, 9, № 4, 321—325 (англ.)

Рассматривается выборка $x_1, x_2,\ldots,x_n$ из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с неизвестным средним μ и дисперсией σ^2, но известным коэффициентом вариации $k=\sigma/\mu$. Тогда с вероятностью α выполнено неравенство $\bar{x}/(1+A)\leqslant\mu\leqslant\bar{x}/(1-A)$, где $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx$ и $A=Tk/\sqrt{n}$. Эффективность построенного таким образом доверительного интервала сравнивается с эффективностью доверительных интервалов, построенных для случаев: 1) μ неизвестно, σ известна; 2) μ и σ неизвестны.

Е. А. Баваров

11891. Оценка будущего на основе прошлого в испытаниях на долговечность. Уолш (Estimating future from past in life testing. Walsh John E.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 432—441 (англ.)

Пусть θ_p — единственная p-процентная точка непрерывного распределения $F(x)$, а x_r — r-я величина в вариационном ряду наблюдений объема n из этой совокупности. В статье рассматривается оценка θ_p на основе $x_{r(1)}, x_{r(2)},\ldots,x_{r(m)}$, где $r(i)$ могут иметь отклонения друг от друга порядка $O(\sqrt{n+1})$. Кроме этого, дается оценка некоторого x_R на основе известных $x_{r(1)}, x_{r(2)},\ldots,x_{r(m)}$. Оценки будущего из данных прошлого могут быть применены в тестах на долговечность, когда значения θ_p и x_R лежат в области, где выборочные данные не наблюдаются.

П. А. Строганов

11892. Приложения одного представления матрицы Уишарта. Вейсман (Applications of a certain representation of the Wishart matrix. Wijsman Robert A.), Ann. Math. Statistics, 1959, 30, № 2, 597—601 (англ.)

Матрицей Уишарта называется $p\times p$-матрица $A=XX'$, где X — $p\times n$-матрица ($p\leqslant n$) с независимыми столбцами, распределенными по p-мерному нормальному закону со средними 0 и дисперсионной матрицей $\sum$. Используется разложение

$$A=CTT'C', \qquad (1)$$

где $p\times p$-матрица C такова, что $CC'=\sum$, а T — треугольная матрица с независимыми элементами, из которых диагональные распределены по закону χ с определенным числом степеней свободы, а недиагональные — по закону $N(0,1)$. С помощью (1) автор более простым путем, чем обычно: 1) находит диагональные элементы A^{-1} при $\sum=I_p$; 2) получает распределение некоторых функций от полного (при $p=2$) и сводного выборочных коэффициентов корреляции; 3) строит критерий для проверки гипотезы о том, что $\sum=\sigma^2 I_2$ ($p=2$, σ^2 неизвестно).

С. С. Кислицын

11893. Метод вычисления двумерной нормальной вероятности с применением к оценке ошибок при проверке и измерениях. Оуэн, Уизен (A method of computing bivariate normal probabilities with an application to handling errors in testing and measuring. Owen D. B., Wiesen J. M.), Bell System Techn. J., 1959, 38, № 2, 553—572 (англ.)

Рассматриваются двумерная нормальная вероятность

$$M(h,k,\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\int_h^\infty\int_k^\infty\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}\right)\right]dxdy=$$

$$=P(x>h,\ y>k)$$

и одномерная $G(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{h}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$, где h и k — постоянные, а ρ — коэффициент корреляции между x и y. Приводятся выражения $P(x<h,\ y<k)$, $P(x<h,\ y>k)$ и $P(x>h,\ y<k)$ через $G(h)$, $G(k)$, $M(h,k,\rho)$ и $M(-h,-k,\rho)$, а $M(h,k,\rho)$ выражается через $M(h,0,\rho)$. Даются номограммы $M(h,0,\rho)$ для различных положительных и отрицательных значений ρ и h. На числовых примерах иллюстрируется вопрос о нахождении значений $M(h,k,\rho)$ из этих номограмм. Далее рассматривается вопрос о построении контрольных границ в контроле качества продукции, когда признаки подчиняются двумерному нормальному

закону. Показаны способы вычисления контрольных границ с помощью функции $M(h, k, \rho)$ и $G(h)$ с учетом потерь потребителя и производителя от приема недоброкачественной продукции или от отвержения доброкачественной. Кроме того, даются специальные критерии для определения границы спецификации при различных допущениях о потерях. М. К. Камалов

11894. Алгебраическая теория расчета критериев значимости для размерности многомерных нормальных систем. Байнет, Уотсон (Algebraic theory of the computing routine for tests of significance on the dimensionality of normalmultivariate systems. Binet F. E., Watson G. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 1, 70—78 (англ.)

Прежде чем отнести выборку к одной из совокупностей с многомерными нормальными распределениями, обычно применяют предварительно критерии значимости для определения структурных соотношений этих совокупностей. Существуют два различных метода, данные Фишером и (в основном) Уилксом. Дается простое алгебраическое доказательство идентичности статистик, полученных этими двумя методами. Указываются условия, при которых метод Фишера требует меньших вычислений. Для иллюстрации различия между двумя методами несколько хорошо известных принципов и процедур формулируются в более подходящей форме. Резюме авторов

11895. Проблема классификации как проблема двух решений. Кудо (The classificatory problem viewed as a two-decision problem. Kudo Akio), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1959, **A 13**, № 2, 96—125 (англ.)

Пусть имеются две совокупности Π_1 и Π_2 векторов с многомерными функциями распределения $F(Y, \theta_1)$ и $F(Y, \theta_2)$ из некоторого семейства $\{F(Y, \theta), \theta \in \Omega\}$. Значения параметров θ_1, θ_2 неизвестны. Пусть $X^{(1)}=(X_1^{(1)},\ldots,X_{n_1}^{(1)})$ и $X^{(2)}=(X_1^{(2)},\ldots,X_{n_2}^{(2)})$ — выборки, полученные из Π_1 и Π_2 соответственно. Требуется решить, из какой совокупности Π_1 или Π_2 получено наблюденное значение Y. Рассматриваются случаи, когда Π_1 и Π_2 имеют гауссовское распределение с неизвестными средними M_1 и M_2 и известной или неизвестной одной и той же матрицей ковариаций Σ. Изучаются решающие функции, инвариантные относительно некоторых групп преобразований. Дается ряд необходимых и достаточных условий для того, чтобы решения были инвариантными относительно данной группы преобразований. В предположении, что матрица ковариаций известна, дается оптимальная решающая функции, дающая максимальную для рассматриваемого класса вероятность правильного решения. Пусть $\overline{\varphi}_i(Y;\ X_1^{(1)}, X^{(2)})$ — вероятность решения, что $Y \in \Pi_i$ $(i=1,2)$. $\overline{\varphi}_1(Y;\ X^{(1)}, X^{(2)})=1$, если

$$(1+(1/n_1))^{-1}(Y-\overline{X}^{(1)})'\sum{}^{-1}(Y-\overline{X}^{(1)}) <$$

$$< (1+(1/n_2))^{-1}(Y-\overline{X}^{(2)})'\sum{}^{-1}(Y-\overline{X}^{(2)});$$

$\overline{\varphi}_2(Y; X^{(1)}, X^{(2)})=1$ в противном случае. Здесь $\overline{X}^{(i)}$ — векторы выборочных средних. Обозначим $P(i, j; M_1, M_2, \Sigma; \varphi)$, а также $P(i, j; \Delta, \Sigma; \varphi)$ $(\Delta = M_1 - M_2)$ вероятность решения, что $Y \in \Pi_i$, когда $Y \in \Pi_j$ при использовании функции φ.

Теорема. Для любой решающей функции

$$\varphi(Y;\ \overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}) = (\varphi_1(Y;\ \overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}),\ \varphi_2(Y;\ \overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)})),$$

удовлетворяющей условиям: $\varphi(Y;\ \overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}) = \varphi(Y+b,\ \overline{X}^{(1)}+b,\ \overline{X}^{(2)}+b)$ для любого вектора b;

$$P(1, 1;\ (1+(1/n_2))^{-1/2}\Delta,\ \Sigma,\ \varphi) =$$

$$= P(2, 2;\ (1+(1/n_1))^{-1/2}\Delta,\ \Sigma;\ \varphi)$$

для всех Δ; $P(i, j; \Delta, \Sigma; \varphi)$ зависит только от $\Delta'\Sigma^{-1}\Delta$, имеет место соотношение

$$P(i, i; M_1, M_2, \Sigma; \overline{\varphi}) \geqslant P(i, i; M_1; M_2, \Sigma; \varphi)$$

$$(i=1, 2)$$

при любых M_1, M_2 и Σ. Подробно рассматривается одномерный случай. Библ. 16 назв. Л. Я. Савельев

11896. Замечание о φ/φ_{max}. Кьюртон (Note on φ/φ_{max}. Cureton Edward E.), Psychometrika, 1959, **24**, № 1, 89—91 (англ.)

Коэффициент корреляции двух событий X и Y $\varphi=(p_{12}-p_1p_2)/\sqrt{p_1q_1p_2q_2}$, где $p_1=1-q_1=P\{X\}$, $p_2=1-q_2=P\{Y\}$, $p_{12}=P\{XY\}$, может достигать значений ± 1 только при $p_1=p_2=0{,}5$. Предлагается статистика φ/φ_{max}, где φ_{max} — максимальное значение φ при данных p_1 и p_2, которая может достигать значений ± 1 при любых p_1 и p_2. Д. М. Чибисов

11897. Заметка о нулевых и совпадающих значениях в знаковых ранговых процедурах Уилкоксона. Пратт (Remarks on zeros and ties in the Wilcoxon signed rank procedures. Pratt John W.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, **54**, № 287, 655—667 (англ.)

При использовании критерия Уилкоксона (Wilcoxon E., Biometrics, 1945, 1) для проверки нуль-гипотезы о симметричности распределения относительно среднего возникают трудности, если в выборке имеются нули и совпадающие значения. В статье предлагаются пути преодоления этих трудностей. П. А. Строганов

11898. Одно предложение в теории непараметрической статистики. Тейлер (O propoziţie din teoria statisticii neparametrice. Theiler G.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, **9**, № 2, 481—490 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $S_m(x)$ и $T_n(y)$ — эмпирические функции распределения независимых случайных величин X и Y с одинаковым распределением $F(x)$. Автор показывает, что $\lim P\{-\beta(m) < S_m(x) - T_n(x) < \alpha(m)\} = \lim P\{-\beta(m) < F(x) - T_n(x) < \alpha(m)\}$ при $m \to \infty$, где $\alpha(m) \to \alpha$, $\beta(m) \to \beta$ $(\beta > 0,\ \alpha > 0)$, и дополняет эту теорему, допуская, что пределы α, β могут быть бесконечны. Эти предложения доказываются с помощью равенств, из которых приводим одно: $\lim_{m\to\infty} P\{\xi \mid \inf[S_m(x) - T_n(x)] < -\beta(m)\} = P\{\xi \mid \inf[F(x) - T_n(x) < -\beta\}$, где $\xi = (x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ и $\xi_1 = (y_1, \ldots, y_n)$, и служат для асимптотической оценки разности $S_m(x) - T_n(x)$. O. Onicescu

11899. Общие теоремы, относящиеся к критерию Уилкоксона для симметрии. Эден, Бенар (General theorems on Wilcoxon's test for symmetry. Eeden Constance van, Benard A. Rap., Statist. Afd., Math. Centr. Amsterdam., 1956, № S 209 (VP 10), 23 pp.) (англ.)

Авторы исследуют состоятельность критерия, комбинируют его с двухвыборочным критерием Уилкоксона и обобщают его, заменяя ранговые числа общими весами. H. Wold

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 682.

11900. О некоторых новых достижениях в статистике. Ханнан (Some recent advances in statistics. Hannan E. J.), Econ. Rec., 1957, **33**, № 6, 337—352 (англ.)

Популярная статья, рассчитанная на читателей-экономистов, о методах статистического анализа временных рядов. Большое внимание уделяется вопросу о приложимости тех или иных математических допущений к конкретным экономическим временным рядам; все математические доказательства и даже точные

формулировки математического характера опущены. Статья содержит следующие разделы: 1) Стохастические процессы, 2) Спектральная плотность, 3) Процессы авторегрессивного типа, 4) Многомерные процессы, 5) Уравнение регрессии, 6) Системы уравнений регрессии. Библ. 26 назв., включает некоторое число работ экономического содержания и довольно много работ последнего десятилетия по статистическому исследованию стационарных процессов. А. М. Яглом

11901. Современные тенденции в анализе временных рядов. Гренандер (Modern trends in time series analysis. Grenander Ulf), Sankhyā, Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1-2, 149—158 (англ.)

Обзорная статья о применениях математической статистики к анализу временных рядов, встречающихся в прикладных задачах. Статья не содержит никаких математических доказательств и почти не содержит точных формулировок результатов; вместо этого дается обсуждение общих вопросов, связанных с постановкой статистических задач в области анализа временных рядов с практическим применением математических результатов. Отмечаются три подхода к анализу временных рядов, характерные для трех разных периодов развития математической статистики: а) использование моделей, предполагающих взаимную независимость отклонений временного ряда от среднего в различные моменты времени, б) использование более общих конечно-параметрических моделей типа «схемы авторегрессивного процесса конечного порядка» и в) использование результатов, относящихся к произвольным (или почти произвольным) стационарным случайным процессам. Подчеркивается важность контроля с помощью соответствующих критериев согласия при использовании любого из этих подходов. Формулируются общие задачи статистической теории случайных процессов, которые автор считает наиболее важными для приложений. Библ. 19 назв. А. М. Яглом

11902. Рациональный выбор решающих функций. Чернов (Rational selection of decision functions. Chernoff Herman), Econometrica, 1954, 22, № 4, 422—443 (англ.)

Обсуждаются и сравниваются различные определения оптимальной решающей функции: минимаксное решение; его модификация, полученная вычитанием наименьшего для каждого решения риска; байесовское решение. Предлагается новое определение оптимальной процедуры, не использующее понятия априорного распределения. Пусть $Q=(S, D, u)$ — статистическая игра. Здесь S — множество состояний природы, D — множество решений статистика, $u=u(s, d)$ — функция выигрыша. Q называется проблемой. Непустое множество G проблем называется общей проблемой. Общая проблема G называется рационально разрешимой $C(Q)$, если существует класс множеств $C(Q)$ решений проблем Q из G, удовлетворяющий данной системе постулатов. Предполагается, что S и D конечны и $|u|<1$. Доказываются следующие утверждения. Пусть $Q_i=(S_i, D_i, u_i)$, $i=1, \ldots$, из G изоморфны в смысле теории игр и удовлетворяют условию: $D_1\subset D_2$, $u_1(s, d)=u_2(s, d)$ при $d\in D$, $s\in S$. $D^*=\{\xi\}$ — множество вероятностных мер на D.

Теорема 1. Если общая проблема G рационально разрешима $C(Q)$ и 1) $Q=(S, D^*, u)\in G$, $\ldots$) $\xi_0\in C(Q)$, $\xi_0=p\xi_1+(1-p)\xi_2 (0<p<1)$, то ξ_1, ξ_2 также являются элементами $C(Q)$.

Теорема 2. Если $Q_i=(S, D, u_i)$, $i=1, \ldots$, — элементы рационально разрешимой $C(Q)$ общей проблемы G и $u_2(s, d)=u_1(s, d)+u_0(s)$ при $s\in S$, $d\in D$ и если существует $p (0<p<1)$ такое, что $Q_3=(S, D, u_3=pu_2)$ является элементом G и $pu_0/(1-p)$ — функция выигрыша, то $C(Q_1)=C(Q_2)$. Обозначим G_n класс, содержащий все проблемы $Q=(S, D^*, u)$, где S состоит из n элементов, и все проблемы, изоморфные им.

Теорема 3. G_n рационально разрешима $C(Q)=\{d: d\in D, d$ максимизирует $(1/n)\sum_{s\in S} u(s, d)\}$.

Класс $C(Q)$ единственный. Рассматриваются варианты некоторых постулатов. Библ. 11 назв. Л. Я. Савельев

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

11903. Замечание об основной теореме теории игр. У Вэнь-цзюнь (A remark on the fundamental theorem in the theory of games. Wu Wen-tsün), Sci. Rec., 1959, 3, № 6, 229—233 (англ.)

Пусть R — замкнутый упорядоченный интервал и $\lambda\in R$. Обозначим через $\bar{R}_\lambda^+$, $\bar{R}_\lambda^-$ подмножества R, состоящие из тех z, для которых соответственно $z\geqslant\lambda$, $z<\lambda$. Отображение f декартова произведения пространств $X\times Y$ в R ($f(x, y)=f_x(y)=f_y(x)$) называется сильно связным в X, если выполняются следующие два условия:

(P_1) для любых $a, b\in X$ существует такое непрерывное отображение h замкнутого интервала $[a, b]$ в X, что $h(a)=a$, $h(b)=b$, а для любых $y\in Y$ и $\lambda\in R$ множество $h^{-1}f_y^{-1}(\bar{R}_\lambda^+)$ либо пусто, либо связно.

(P_2) для каждого конечного множества $x_1, \ldots, x_R\in X$ и любого $\lambda\in R$ множество $f_{x_1}^{-1}(R_\lambda^-)\cap\ldots\cap f_{x_k}^{-1}(R_\lambda^-)$ либо пусто, либо связно.

Теорема. Пусть пространство Y компактно и сепарабельно, а пространство X линейно связно. Если при этом отображение f произведения $X\times Y$ в R сильно связно в X, а все функции вида f_x и f_y непрерывны, то $\inf_y \sup_x f(x, y)=\sup_x \inf_y f(x, y)$.

Эта теорема обобщает многие старые результаты (см., например, РЖМат, 1955, 1371 и 1959, 10245). Н. Н. Воробьев

11904. Конечный итеративный алгорифм для решения некоторых игр и родственных систем линейных уравнений. Брейтуэйт (A terminating iterative algorithm for solving certain games and related sets of linear equations. Braithwaite R. B.), Naval Res. Logist. Quart., 1959, 6, № 1, 63—74 (англ.)

Дается конечный итеративный алгорифм для решения вполне смешанных матричных игр с некоторыми диагональными свойствами. Отличие его от итеративного метода Брауна — Робинсон (Robinson Julia, Ann. Math., 1951, 54, 296—301) состоит в том, что один из игроков на каждом шаге выбирает стратегию, наилучшую против последней стратегии, употребленной противником. Е. Б. Яновская

11905. Игры четырех лиц — конечные решения на поверхности куба. Милс (The four person game—finite solutions on the face of the cube. Mills W. H.), Ann. Math. Studies, 1959, 4, № 40, 125—143 (англ.)

Рассматриваются нулевые игры 4 лиц, соответствующие поверхности основного куба. Доказывается, что кроме игр, соответствующих вершинам куба и имеющих конечное решение, состоящее из 3 или 4 точек (Neumann J., Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton, 1944), конечное решение имеют только игры, соответствующие одной из диагоналей каждой грани. Это решение состоит из семи точек. О. Н. Бондарева

11906. Кооперативные игры трех лиц. Сакагути (Three-person cooperative games. Sakaguchi Minoru), J. Operat. Res. Soc. Japan, 1958, 1, № 3, 105—113 (англ.)

Рассматривается кооперативная игра трех лиц с ненулевой суммой. Ищется распределение выигрыша

удовлетворяющее двум условиям: 1) каждый игрок получает не меньше, чем он получил бы, если бы не было объединения игроков, 2) каждый игрок обладает стратегиями угрозы, т. е. такими, что, играя ее, он теряет (по сравнению с искомым распределением) не больше, чем остальные игроки. С помощью введения точек равновесия r-го порядка (РЖМат, 1956, 4709) находятся распределения выигрыша, удовлетворяющие одному из условий. О. Н. Бондарева

11907. Простые решения. Герк, Исбелл (Simple solutions. Gurk H. M., Isbell J. R.), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 247—265 (англ.)

Авторы продолжают изучение псевдоосновных решений, начатое Исбеллом (РЖМат, 1956, 4707), вводя для них новый термин «простые решения». Это такие решения игр n лиц, в которых i-й игрок получает или некоторую постоянную $x_i \geqslant 0$, или 0 в любом разделе. Даются необходимые и достаточные условия существования простых решений для любых игр n лиц. Описываются все простые решения симметрических и разложимых игр. Рассматриваются вопросы существования и единственности простых решений для простых игр и других специальных классов игр. В частности, показано, что простые игры пяти лиц и строгие простые игры шести лиц имеют единственное простое решение. О. Н. Бондарева

11908. Самополитические свойства некоторых множеств разделов. Викри (Self-policing properties of certain imputation sets. Vickrey William), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 213—246 (англ.)

Множество разделов A называется „самополитическим", если для любого $a \in A$ и $b \neq A$ такого, что $b \succ a$ относительно некоторого эффективного множества игроков H, существует игрок $j \in H$, который получает меньше в разделе c, чем в a для любого $c \in A$ и такого, что $c \succ b$. Это означает, что если группа игроков „выходит" из области разделов A, то „по возвращении" в него некоторый игрок из этой группы будет „наказан". Решение, которое является самополитическим множеством, называется строгим. Рассматриваются мажоритарные игры — простые игры с постоянной суммой, в которых каждому игроку можно приписать некоторый вес так, что выигрывающими коалициями будут те, у которых сумма весов больше половины общего веса (причем эта сумма никогда не равна точно половине общего веса), а также „однородные" игры, в которых для каждого игрока существует для $q_i > 0$ такая, что для любой минимальной выигрывающей коалиции M: $\sum_M q_i = 1$. Доказывается, что однородные мажоритарные игры и композиции таких игр имеют единственное строгое решение. Неоднородные мажоритарные игры и игры четырех лиц с постоянной суммой вблизи центра куба не имеют строгих решений, и для них сомнительно существование самополитических множеств. Остается неисследованным вопрос о существовании самополитических множеств для не простых игр 4 лиц вне центральной зоны, для игр 4 лиц с непостоянной суммой и не простых игр более 4 лиц. О. Н. Бондарева

11909. Связь как игра. Блакман (Communication as a game. Blachman Nelson M.), IRE WESCON Convent. Rec., 1957, **1**, № 2, 61—66 (англ.)

Предположим, что имеются два противника, один из которых выбирает систему передачи информации s_i, $i = 1, \ldots, m$, а другой может выбрать помехи со статической характеристикой t_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть R_{ij} — максимальная скорость передачи, которую можно достигнуть при системе передачи s_i и помехах t_j. Предлагается трактовать эту задачу как игру со стратегиями s_i и t_j и выигрышем R_{ij} при применении этих стратегий и применять идеи теории игр. Особо рассматриваются случаи, когда стратегии, выбранные одним из игроков, не известны другому. В качестве частного примера рассматривается случай канала с аддитивным шумом, где оба противника имеют ограниченную полосу частот W. Здесь автор приходит к известной формуле Шеннона $C = W \log (1 + P/N)$, где P — мощность сигнала и N — мощность шума.

Примечание референта. Автор не учитывает, что оптимальные методы кодирования и декодирования, которые позволяют вести передачу со скоростью F_{ij}, существенно зависят от вида помех t_j и поэтому не могут быть использованы, если значение t_j неизвестно передающему. Р. Л. Добрушин

11910. О модели Менгеля тактической воздушной войны. Белман, Дрейфус (On a tactical air-warfare model of Mengel. Bellman Richard, Dreyfus Stuart), Operat. Res., 1958, **6**, № 1, 65—78 (англ.)

Излагается методика аппроксимации решения дифференциальной игры специального вида на цифровой вычислительной машине. Рассматривается модель взаимоуничтожения средств $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ двух противников, описываемая дифференциальными уравнениями

$$d\bar{x}/dt = F\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t), \bar{w}(t), t\}, \quad x(0) = q_1,$$

$$d\bar{y}/dt = G\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t), \bar{w}(t), t\} \quad y(0) = q_2.$$

Игровой характер развития процесса зависит от параметров $\bar{z}(t)$, $0 \leqslant \bar{z} \leqslant \bar{x}$, $\bar{w}(t)$, $0 \leqslant \bar{w} \leqslant \bar{y}$, определяющих разбиение средств взаимодействия враждующих сторон. В условиях заданной интегральной платы $\int_0^T R(x, y, z, w, t)\, dt$ и заданных q_1, q_2, F, G требуется определить $\bar{z}(t)$ и $\bar{w}(t)$, на которых достигается $\min_{\bar{w}} \max_{\bar{z}} \int_0^T R(x, y, z, w, t)\, dt$. Авторами решается более узкая экстремальная задача — стратегия одного из противников на все время игры предполагается заданной. Применением принципа оптимальности задача сводится к нахождению решения некоторого нелинейного уравнения в частных производных. Используется конечно-разностная аппроксимация полученного уравнения и составляется программа решения задачи на цифровой вычислительной машине. Анализируются результаты исследования частной задачи, ранее рассматривавшейся Менгелем:

$$\dot{x} = r_1 - a_2 x - x(1 - \exp(-b_2 w^* y/x))$$

$$\dot{y} = r_2 - a_1 y - y(1 - \exp(-b_1 z x/y))$$

$$I(z) = \int_0^T [(1 - z)x - (1 - w^*)y]\, dt,$$

$b_1, b_2, a_1, a_2, r_1, r_2$ — константы, стратегия w^* фиксируется. Ю. Г. Епишин

11911. Множество нелинейностей выпуклой кусочно-линейной функции. Дейвис (The set of non linearity of a convex piecewise-linear function. Davis Chandler), Scripta Math., 1959, **24**, № 3, 219—228 (англ.)

Для конечной совокупности линейных функций $f_i(x)$ строится вещественная функция $f(x) = \max_i f_i(x)$, определенная на вещественном аффинном пространстве E^n. При некоторых ограничениях E^n распадается на q выпуклых подмножеств A_j^n, определенных условием $f(x) = f_j(x)$ для $x \in A_j^n$. Объединение всех пересечений

$A_i^n \cap A_j^n$ (размерность пересечения не выше $(n-1)$) является совокупностью всех нелинейностей функции $f(x)$. Исследуется обратная проблема: существует ли выпуклая кусочно-линейная функция, совокупность нелинейностей которой есть наперед заданное объединение указанного вида; при каких условиях такая реализация единственно возможна. Приведены примеры. Отдельно рассмотрена возможность и единственность такой реализации для E^2.
А. А. Каплан

11912. Об условиях одновременного максимума. Цакканьини (Sulle condizioni di massimo simultaneo. Zaccagnini Emilio), Giorn. econ. e ann. econ., 1958, 17, № 11-12, 565—594 (итал.)

Находятся необходимые, а также достаточные условия для существования одновременного максимума двух или трех функций от двух переменных.
С. С. Кислицын

11913. Существенно полный класс решающих функций для однородных процессов с двумя состояниями. Дивеев Р. Х., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 20, 15—34

Рассматриваются последовательные решающие функции для однородного процесса с двумя состояниями и неизвестным параметром q в случае двух возможных решений. Общая теория решающих функций (Wald A., Statistical decision functions, New York—London, Wiley and Sons, 1950) применяется для описания существенно полного класса решающих функций для однородного процесса при следующих предположениях: а) функция убытка от принятия первого решения $W_1(q)$ — неубывающая непрерывная функция q и $W_1(q)=0$, $q \leqslant q_0$; $W_1(q)>0$, $q>q_0$; б) функция убытка от второго решения $W_2(q)$ — невозрастающая непрерывная функция q и $W_2(q)>0$, $q \leqslant q_0$; $W_2(q)=0$, $q>q_0$; в) априорная плотность распределения $\varphi(q)$ ограничена. Определяется класс A решающих правил следующим образом: решающее правило t, зависящее от возможных результатов наблюдений только через $u_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$, принадлежит A, коль скоро: 1) t определяет замкнутый интервал $M_n(t)=[m_{1n}(t), m_{2n}(t)]$; 2) принимается решение d_1, если $u_n \leqslant m_{1n}$; 3) принимается решение d_2, если $u_n \geqslant m_{2n}$; 4) принимается промежуточное решение, если $m_{1n}<u_n<m_{2n}$. Доказывается, что при условиях а), б) и в) и компактном в себе множестве априорных распределений A является существенно полным классом. Доказывается также урезанность байесовских решений по n.

Примечание референта. Приведенные результаты опубликованы ранее в статье Михалевича В. С. (РЖМат, 1957, 8834) в более общих предположениях.
И. Н. Коваленко

11914. О таблицах с заданными уровнями и пустыми клетками. Фреше (Sur les tableaux dont les marges et des cases vides sont données. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 5, 592 (франц.)

Сообщается о новом методе и излагается идея доказательства некоторой леммы, имеющей применение в линейном программировании. Рассмотрим прямоугольную таблицу T, разбитую на клетки. Выделим множество K клеток таблицы. В лемме формулируется условие, необходимое и достаточное для того, чтобы можно было расставить в клетках T натуральные числа согласно следующим требованиям: 1) в клетках из множества K должны стоять нули; 2) суммы чисел по каждой строке и каждому столбцу должны принимать заранее заданные значения. По словам автора, его метод дает также возможность практически решать указанную задачу расстановки чисел в клетках.
Р. Ф. Матвеев

11915. Применение линейного программирования к вопросу приближения кривой. Келли (An application of linear programming to curve fitting. Kelley James E., Jr.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 1, 15—22 (англ.)

Симплекс-метод Данцига используется для разыскания наилучшего равномерного полиномиального приближения вещественной функции на конечном точечном множестве.
И. М. Андреева

11916. О таблицах корреляции с заданными уровнями и границами. Фреше (Sur les tableaux de corrélation dont les marges et des bornes sont données. (2 part.) Fréchet Maurice), Ann. Univ. Lyon, 1958, **A**, № 21, 19—32 (франц.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 10667.

Рассмотрим прямоугольную матрицу $T=\{n_{ij}\}$ $(i=\overline{1,q};\ j=\overline{1,r})$, где n_{ij} — натуральные числа. Суммы $N_i=\sum_{j=1}^{r} n_{ij}$; $N_j'=\sum_{i=1}^{q} n_{ij}$ называются уровнями этой матрицы $\left(\sum_i N_i=\sum_j N_j'=N\right)$. В статье обсуждаются вопросы о существовании и количестве решений следующих задач: Задача 1. Найти матрицу T, уровни которой равняются заранее заданным натуральным числам N_i, N_j' таким, что $\sum_i N_i=\sum_j N_j'$. Задача 2. Найти матрицу T, уровни которой заранее заданы, и, кроме того, ее элементы n_{ij} не должны превосходить некоторых границ m_{ij}. Первая задача всегда разрешима, однако (за исключением тривиальных случаев) решение не является единственным. Указан метод нахождения всех решений этой задачи. Сформулированы необходимые условия разрешимости второй задачи и дана оценка ее решений „сверху" и „снизу". Для разобранного конкретного случая (число строк матрицы равно двум) найдены необходимые и достаточные условия разрешимости второй задачи и метод нахождения всех ее решений. На другом примере показано существенное различие в свойствах решений первой и второй задачи.
Р. Ф. Матвеев

11917. Замечание о задаче Реньи. Хандском (A note on a problem of Rényi. Handscomb D. C.), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1959, **4**, № 1, 87—88 (англ.; рез. венг., русск.)

Простое доказательство того известного результата, что в транспортной задаче с m пунктами производства и n пунктами потребления всегда существует оптимальное решение с не более чем $m+n-1$ видом перевозок и что эту оценку нельзя улучшить. Из этого результата следует представимость дистохастических матриц в виде линейно выпуклой комбинации матриц перестановок.
И. В. Романовский

11918. Задача из линейного программирования. Хаймович (Probleme de programare liniară. Haimovici M.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 11, 682—683 (рум.)

Речь идет о транспортной задаче.

11919. Линейное программирование и классическая теория производства. Кастильони (Programmazione lineare e teoria classica della produzione. Castiglioni Pietro), Riv. internaz. sci. econ. e commerc., 1957, **4**, № 9, 854—865 (итал.)

11920. Приложения линейного программирования в нефтяной промышленности. Гарвин, Крандалл, Джон, Спелман (Applications of linear programming in the oil industry. Garvin W. W., Crandall H. W., John J. B., Spellman R. A.), Manag. Sci., 1957, **3**, № 4, 407—430 (англ.)

11921. Два применения линейного программирования в промышленности. Морнар, Адрианссес, Хиршберг (Deux applications industrielles de la programmation linéaire. Mornard S., Adriaenssens G., Hirschberg D.), 3le Congr. internat.

chimie industr. Liège, 1958. Vol. 2. Bruxelles, (1959), 822—823 (франц.)

11922. Полная схема для вычисления всех прямых и косых эластичностей спроса в модели со многими секторами. Фриш (A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors. Frisch Ragnar), Econometrica, 1959, 27, № 2, 177—196 (англ.)

Дана функция общей полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$ и „бюджет" $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = a$. При заданных ценах p_k и a равновесное состояние спроса определяется „бюджетом" и условиями $u_1/p_1 = u_2/p_2 = \ldots = u_n/p_n$, где $u_k = \partial U/\partial x_k$. Тогда $x_i = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, a)$. Эластичность спроса по отношению к цене

$$e_{ik} = \frac{\partial \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, a)}{\partial p_k} \frac{p_k}{\varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, a)}$$

($a, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n$ фиксируются) называется прямой при $i = k$, косой — при $i \neq k$. Дана схема для вычисления прямых и косых эластичностей спроса по отношению к цене с использованием „бюджетных" пропорций и эластичности Энгеля ($E_i = \frac{\partial \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, a)}{\partial a} \times \frac{a}{\varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, a)}$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ фиксируются), которые, как правило, могут быть получены значительно проще. А. А. Каплан

11923. Полезность распределения вероятностей, или распределение вероятностей полезностей. Данциг (Utilité d'une distribution des probabilités ou distribution des probabilités des utilités. Dantzig D. van), Econométrie. Paris, CNRS, 1953, 235—241. Discuss. 242—244 (франц.)

Рассматривается конечное множество E всех экономических благ x, которые можно приобрести. Вероятность приобретения произвольного блага x из E можно считать компонентой вектора μ в евклидовом пространстве с размерностью, равной числу всех благ. Пусть Δ — множество всевозможных распределений. Если на множестве Δ установлен определенный порядок „предпочтения", удовлетворяющий достаточно простым правилам, то на множестве Δ определяется функция U такая, что $U(\mu) = \int u(x)\, d\mu(x)$, $u(x)$ называется полезностью блага, а $U(\mu)$ — „полезностью" распределения μ. U и u зависят от системы Ω отношений порядка предпочтения, который установлен на множестве распределений. Вводится также „истинная" полезность или полезность a posteriori, как случайная функция и определяются вероятности различных величин $V(x)$, которые она может иметь. Если ρ или $\rho(v)$ — соответствующая функция распределения, то $u(x) = \int v(x) d\rho(x)$.

Э. А. Меркулова

11924. Потребление в зависимости от реальных цен и дохода и теория выбора. Фуржо, Натаф (Consommation en prix et revenu réels et théorie des choix. Fourgeaud Par C., Nataf A.), Econometrica, 1959, 27, № 3, 329—354 (франц.)

Пусть имеется n товаров, цены которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Предполагается, что количество q_i i-го товара, приобретаемого лицом, имеющим доход r, является функцией от $u = r/P$ и $v_i = p_i/P$, где $P = P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — известная функция (индекс цен). В статье приводится ряд соображений в пользу того, чтобы считать q_i равными $K_i(u)/v_i$ или $[K(u) A_i(v_i) + b_i(u)]/v_i$, где $\sum_{i=1}^n K_i(u) = u$; $\sum_{i=1}^n A_i(v_i) = 0$; $\sum_{i=1}^n b_i(u) = u$.

С. С. Кислицын

11925. К понятию абстрактной экономики. Керубино (Sul concetto di economia astratta. Cherubino Salvatore), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, 26, № 5, 654—661 (итал.)

Простейшие сведения об экономической модели Леонтьева и системе уравнений реакции производства на изменение цен. Многочисленны ссылки на прежние работы автора (РЖМат, 1958, 8062; 1959, 5036, 6116; 1960, 4358 и др.). С. С. Кислицын

11926. О линейном расширении экономики. Керубино (Sull'espansione lineare economica. Cherubino Salvatore), Rend. mat. e applic., 1959, 18, № 1-2, 140—156 (итал.)

Описание моделей «расширяющейся» экономики Неймана и Леонтьева. С. С. Кислицын

11927. Замечания по теории риска и кредита. Виль (Considérations sur la théorie du risque et du crédit. Ville J.), Econométrie. Paris, CNRS, 1953, 231—233. Discuss., 233—234 (франц.)

11928. Народно-хозяйственная функция производства в динамическом рассмотрении. Штрейслер (Die volkswirtschaftliche Produktionsfunktion in dynamischer Betrachtung. Streißler Erich), Z. Nationalökon., 1959, 19, № 1-2, 86—162 (нем.)

11929. Основы позитивной теории выбора, включающей риск с критикой постулатов и аксиом американской школы. Алле (Appendice. Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine. Allais M.), Econométrie. Paris, CNRS, 1953, 257—334 (франц.)

11930. Централизация и децентрализация в экономических организациях. Маршак (Centralization and decentralization in economic organizations. Marschak Thomas), Econometrica, 1959, 27, № 3, 399—430 (англ.)

11931. Оптимальный поиск объектов, имеющих неизвестное время прибытия. Блакман, Прошан (Optimum search for objects having unknown arrival times. Blachman Nelson, Proschan Frank), Operat. Res., 1959, 7, № 5, 625—638 (англ.)

В область, разбитую на n зон, прибывает пуассоновский поток объектов. Каждый из объектов с вероятностью p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, прячется в зону i и остается в ней до момента обнаружения. В единицу времени зоны просматриваются с частотой f_i. Время просмотра i-й зоны равно t_i. Одним просмотром объект, находящийся в зоне i, обнаруживается с вероятностью P_i. Считаются заданными невозрастающие функции $g_i(t)$ выигрыша от обнаружения объекта в i-й зоне спустя время t после его прибытия. Находятся оптимальные частоты просмотров зон в единицу времени $\{f_i^*\}$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^n f_i^* t_i \leqslant 1$, максимизирующие средний выигрыш за единицу времени Γ

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \left\{ A p_i f_i P \sum_{m=0}^{\infty} Q_i^m \int_{m/f_i}^{(m+1)/f_i} g_i(t)\, dt - f_i C_i \right\},$$

где C_i — стоимость одного просмотра i-й зоны (предварительно доказывается, что оптимальный способ просмотра одной зоны состоит в просмотре через равные промежутки времени). Полученное автором решение иногда предписывает просмотр нескольких зон одновременно, однако показывается, что при $n \to \infty$ решение $\{f_i^*\}$ свободно от „конфликтов пересечения". Метод иллюстрируется решением задач для частных функций $g_i(t)$, например, $g_i(t) = -(t + t_i)$. Ю. Г. Епишин

11932. Проблема целераспределения. Манн (A target-assignment problem. Manne Alan S.), Operat. Res., 1958, 6, № 3, 346—351 (англ.)

Обсуждается упрощенная математическая модель распределения n целей по m орудиям. Предполагаются заданными параметры: a_j — важность цели, $1 \leqslant j \leqslant n$ и P_{ij} — вероятность поражения j-й цели i-м орудием, $1 \leqslant i \leqslant m$. Если x_{ij} — вероятность, с которой i-е орудие назначается для обстрела j-й цели, то требуется определить набор $\{x_{ij}\}$ минимизирующий

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{i=1}^{m} (1 - p_{ij}x_{ij}). \qquad (1)$$

Автор вводит предположения, в результате которых выражение (1) приобретает вид $\sum_{j=1}^{n} a_j (1 - p_j)^{y_j}$ суммы выпуклых убывающих функций $0 \leqslant y_j \leqslant m$. В такой форме задача решается применением методов линейного программирования (РЖМат, 1959, 29 7).

Ю. Г. Епишин

11933. Надежность самолетных конструкций при случайных неполадках. Колман (Reliability of aircraft structures in resisting chance failure. Coleman John J.), Operat. Res., 1959, 7, № 5. 639–645 (англ.)

Предполагается, что система подвержена действию стационарного гауссовского процесса возмущений $X(t)$, как результата сложения ряда случайных временных воздействий. Система выходит из строя, если возмущение по модулю превышает некоторый заданный уровень x_1. Используя известный результат о среднем числе пересечений заданного уровня стационарным гауссовским процессом, автор получает формулу от утствия неполадок за время t

$$P_0(t) = \exp\{-[(\pi\sigma)^{-1}\sigma_1 \exp(-x_1^2/2\sigma^2)]\, t\}, \qquad (1)$$

где $\sigma^2 = \int_0^\infty \Phi(\omega)\, d\omega$, $\sigma_1^2 = \int_0^\infty \omega^2 \Phi(\omega)\, d\omega$, $\Phi(\omega)$ — спектральная плотность процесса $X(t)$. Доказательство некорректно. Формула (1) справедлива асимптотически при $x_1 \to \infty$.

Ю. Г. Епишин

11934. Анализ задачи уличного движения с точки зрения исследования операций. Чжоу Цзэ-Сунь (Operational analysis of a traffic-dynamics problem. Chow Tse-Sun), Operat. Res., 1958, 6, № 6, 827–834 (англ.)

Рассматривается последовательность состоящая из $n+1$ движущихся элементов, подчиненных уравнениям $du_k(t+\Delta)/dt = \lambda\{u_{k-1}(t) - u_k(t)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $u_k(t)$ — скорость элемента k, Δ и λ — положительные параметры. По закону движения $u_0(t)$ ведущего элемента и $u_k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \Delta$ с помощью использования преобразования Лапласа находится решение. Для следующей простой задачи $u_0(t) = w$ для $t < 0$, $u_k(t) = w$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$ таким решением является

$$u_n(t) = \sum_{\sigma=0}^{\nu-n} \int_{(n+\sigma)\Delta}^{t} (-1)^\sigma \lambda^{n+\sigma} \frac{\|\tau - (n+\sigma)\|^{n+\sigma-1}}{(n-1)!\,\sigma!} \times [u_0(t-\tau) - w]\, d\tau,$$

где ν — целая часть от t/Δ, а

$$\|\tau - (n+\sigma)\| = \begin{cases} \tau - (n+\sigma)\Delta, & t \geqslant (n+\sigma)\Delta \\ 0, & 0 \leqslant t < (n+\sigma)\Delta. \end{cases}$$

В условиях этой задачи и при условии, что $\int_0^\infty \left|\frac{du_0}{dt}\right| dt < \infty$ и $\lambda\Delta < 1$, находится асимптотическое выражение расстояния $d_{n-1,n}(t)$ между элементами $n-1$ и n: $d_{n-1,n}(t) \sim d_{n-1,n}(0) + [u_0(\infty) - w]/\lambda$ при $t \to \infty$.

Примечание референта. Как можно показать на примере, условие $\int_0^\infty |du_0/dt|\, dt < \infty$ недостаточно, чтобы утверждать, как делает автор, что $U_0(s)$, определяемая соотношением $\bar{u}_0(s) = [u_0(\infty)/s]\, U_0(s)$, где $u_0(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_0(t)\, dt$, имеет особенности с отрицательными действительными частями. Чтобы сохранить выводы и рассуждения автора, нужно дополнительно предположить, что $\int_0^\infty e^{\varepsilon t} \frac{du_0}{dt}\, dt < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Выводы автора сохраняются, если к условиям, накладываемым в работе прибавить, что $du_0/dt > -c/t$ при $t > 0$ с некоторой постоянной $c \geqslant 0$.

Б. А. Рогозин

11935. Экономичное распределение нагрузок суточного графика для электростанций смешанной энергосистемы. Гробман Д. М., Смирнов Ю. И. Изв. АН СССР, Отд. техн. и энерг. и автоматика, 1959, № 4, 49–58

Дана математическая постановка и геометрическая интерпретация следующей задачи: Для смешанной энергосистемы найти такое распределение мощностей между станциями системы, чтобы суммарный расход топлива на теплостанциях был минимальным, при условии, что все потребители будут удовлетворены, а каждая гидростанция израсходует заданное количество воды. Метод решения заключается в последовательном исправлении реального режима с учетом, что нагрузки каждой станции находятся в допустимых пределах.

По резюме авторов

11936. Применение одного метода исследования операций к некоторым железнодорожным задачам. Бьянки (Applicazione di un metodo di ricerca operativa ad alcuni problemi ferroviari. Bianchi Mario), Ingegneria ferroviaria, 1959, 14, № 10, 889–896 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

11937. (Нормализация) стандартизация как задача решения. Ситтиг (Normalisatie als beslissingsprobleem. Sittig J.), Statist. neerl., 1959, 13, № 3, 389–394 (голл.; рез. англ.)

11938. Симпозиум: «Роль исследования операций в сельском хозяйстве» (Symposium on «The role of operational research in agriculture»), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1958, 10, № 1-2, 67–72 (англ.)

11939. Современные тенденции в исследовании операций. Беван (Trends in operational research. Bevan Ronald W.), Operat. Res., 1958, 6 № 3, 441–447 (англ.)

Краткий обзор современного состояния, методов, применений и тенденций развития исследования операций в США и Великобритании. Отмечается, в частности, отсутствие единодушия в определении предмета исследования операций.

А. А. Корбут

11940. Обучение исследованию операций. Кендалл (The teaching of operational research. Kendall M. G.), Operat. Res. Quart., 1958, 9, № 4, 265–278 (англ.)

Обзор опыта преподавания исследования операций в Великобритании и действующих учебных программ. Высказаны некоторые предложения по улучшению постановки преподавания; отмечается, в частности, недостаток учебных пособий.

А. А. Корбут

11941. Модель управления запасами для запасных частей. Аппроксимации в случае переменного времени доставки. Бекман (An inventory model for repair parts — Approximations in the case of variable delivery time. Beckmann Martin J.), Operat. Res., 1959, 7, № 2, 256–258 (англ.)

Рассматривается следующая модель управления запасами. Предполагается, что спрос подчинен распределению Пуассона, время выполнения заказа (время доставки) фиксировано или является случайной величиной с известным распределением. Заданы издержки на

хранение, пропорциональные времени хранения и объему сохраняемого запаса, фиксированная стоимость заказа и «штраф», пропорциональный объему неудовлетворенного спроса и длительности его неудовлетворения. Выведено и изучено разностное уравнение для математического ожидания издержек процесса. А. А. Корбут

11942 К. Введение в теорию игр (с примерами приложений из области экономики и социологии). Бургер (Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeisp., insbes. aus Wirtschaftslehre und Soziologie. Burger Ewald. Berlin, de Gruyter, 1959, 169 S., 28.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 42, 3146 (нем.)

11943 К. Методы и модели исследования операций и математики в предпринимательстве. Кауфман (Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, les mathématiques de l'entreprise. Kaufmann Arnold. Paris, Dunod, 1959, 534 p., ill., 6800 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148 № 43, 1098 (франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

11944. Воздействие случайных факторов в системах контроля. Бишоп (The effects of random factors in control-system design. Bishop Albert B.) News Engng, 1958, 30, № 4, 25—28 (англ.)

Статья написана с целью подчеркнуть значение статистических методов для анализа и синтеза различных систем автоматического управления. Дается понятие о случайном процессе, о стационарности и эргодичности случайного процесса, решающей функции, среднеквадратичной ошибки. Подробно разъясняется понятие корреляционной функции и даются четыре способа ее практического вычисления. В качестве примера применения корреляционной функции приводится пример отделения сигнала от некоррелированного с ним шума.

Р. Л. Добрушин

11945 О применимости формул математической статистики при оценке результатов разведки. Гудков В. М., Научн. тр. Моск. горн. ин-та, 1959, сб. 25, 3—30

Рассматриваются вопросы применения методов математической статистики (теории оценок) для определения распределения содержания металлов в рудных месторождениях. На основании обработки экспериментальных данных делается вывод о том, что часто рудные месторождения в статистическом смысле представляют собой различны статистические совокупности. Выводится формула для оценки среднего содержания металла, учитывающая физические особенности и распространенность отдельных металлов в различных рудных месторождениях. При оценке погрешностей, вызываемых конечностью числа проб выборки, распределение вероятностей средних выборочных значений приближенно принимается нормальным, что ухудшает точность оценок особенно при малых выборках.

Примечание референта. В формуле (1) на стр. 8 допущена ошибка: вместо e^{-x} должно быть e^{-a}.

Л. Д. Фельдман

11946. Ошибки в связи с процессами регулирования. Джэксон, Фрёйнд, Хау (Errors associated with process of adjustments. Jackson J. Edward, Freund Richard A., Howe William G.), Virginia J. Sci., 1959, 10 № 1, 3—26 (англ.)

На примере простейшего процесса регулирования математического ожидания по смещению среднего выборочного значения от стандарта анализируется вероятность регулирования $\gamma = 1 - \beta$ (β — вероятность ошибки 2-го рода). Выделяются четыре вероятности, составляющие γ: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. γ_1 — вероятность недостаточного регулирования, когда математическое ожидание продолжает смещаться от стандарта; γ_2 — вероятность излыточного регулирования, когда математическое ожидание смещается к стандарту; γ_3 — вероятность излыточного регулирования, когда математическое ожидание смещается от стандарта; γ_4 — вероятность регулирования в один очной направлении, когда среднее значение и математическое ожидание находятся в противоположных сторонах от стандарта. γ_1 и γ_2 дают вероятности улучшения процесса регулирования, γ_3 и γ_4 — вероятности его ухудшения. Обсуждаются примеры различных контрольных процедур, для которых вес введенных вероятностей γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) различен. Предлагается для вычисления вероятностей γ_i использовать вычислительные машины.

В. С. Королюк

11947. Аппроксимация автокорреляционной функции последовательностью затухающих косинусоидальных функций. Фрист, Браун (Approximation of autocorrelation functions by a series of damped cosine functions. Friest David T., Brown Robert G.), Proc. Nat. Electron. Conf., Vol. 14. (Chicago, Ill., 1958). Chicago, Nat., Electron. Conf., Inc., 1959, 709—714 (англ.)

Рассматривается возможность разложения автокорреляционной функции стационарного процесса $x(t)$: $\varphi(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)}$ по функциям вида $e^{-\alpha|\tau|}\cos n\beta\tau$, где α и β — произвольные константы, а $n = 0, 1, 2, \ldots$. Функции $e^{-\alpha\tau}\cos n\beta\tau$ образуют замкнутую ортогональную систему функций на интервале $(0, \pi/\beta)$ относительно веса $\beta^2 e^{2\alpha\tau}$. Систему функций можно употребить для аппроксимации $\varphi(\tau)$ в интервале $(0, \pi/\beta)$: $\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\tau} \times \cos n\beta\tau$, где $A_0 = (\beta/\pi)\int_0^{\pi/\beta}\varphi(\tau)\,e^{\alpha\tau}\,d\tau$, $A_k = (2\beta/\pi) \times \int_0^{\pi/\beta}[\varphi(\tau)\,e^{\alpha\tau}]\cos k\beta\tau\,d\tau$, $k = 1, 2, \ldots$. Ввиду четности $\varphi(\tau)$, интервал разложения можно расширить до $(-\pi/\beta, \pi/\beta)$, вне этого интервала разложение не сходится к $\varphi(\tau)$, но может быть сделано достаточно близким соответствующим подбором α и β. Тогда выражение для спектральной плотности $G(\omega) = \int_{-\omega}^{\omega}\varphi(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$ имеет вид (для конечного числа членов):

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{N} A_n\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+n\beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-n\beta)^2}\right].$$

В качестве примера, иллюстрирующего метод, берется автокорреляционная функция вида

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau|, & |\tau| < 1, \\ 0, & |\tau| > 1, \end{cases}$$

$$G(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/\,)}{\omega/2}\right]^2$$

и строится соответствующая аппроксимация.

В. И. Бабкин

11948. О некоторых способах обработки флюктуирующих сигналов в двухканальных системах. Черняк Ю. Б., Радиотехн. и электроника, 1959, 4, № 12, 1957—1976

Критерий Неймана—Пирсона, применяемый для проверки гипотезы о наличии сигнала на фоне помех при наблюдении двумерного случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, сравнивается при некоторых простых предположениях относительно распределения сигнала и помех с тремя другими критериями, которые являются более удобными для технического осуществления.

В. Ф. Писаренко

11949. Заметки о технике коррекции ошибок. I. Эффективность кодов с коррекцией одиночной ошибки при постоянной скорости передачи. Дутка (Notes of error-correcting techniques. I. Efficiency of single-error-correcting codes with a constant bit rate of transmission. Dutka Jacques), R. C. A. Rev., 1958, **19**, № 4, 628—641 (англ.)

Рассматривается обычная схема передачи корректирующего кода по каналу с помехами. Сравниваются вероятности ошибок при передаче с применением коррекции и без нее. Выведены соотношения для вероятности помехи, определяющие выгодность применения коррекции. Пусть n — размерность кода, k — число коррекционных символов, p — вероятность единичной ошибки, p_0 — вероятность хотя бы одной ошибки при передаче без коррекции, p_1 — вероятность того же события при применении коррекции. Тогда $p_1 \leqslant p_0$, когда $0 \leqslant p \leqslant 1-\alpha$, $1/2 \leqslant \alpha < n(k-1)/k(n-1)$. Работа иллюстрирована таблицами и графиками.

Л. Я. Савельев

11950. Основные соотношения при интегрировании и фильтрации сигнала и флюктуационной помехи в трактах радиоприемного устройства. Теплов Н. Л., Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова, 1958, вып. 2, 35—55

Вычисляется, как меняется отношение интенсивностей сигнала и шума при их осреднении по времени; показывается, что при некоторых условиях это отношение может быть увеличено. Ю. А. Розанов

11951. Оптимальный фильтр для обнаружения импульсного сигнала в шуме. Хипс (Optimum filter functions for the detection of pulsed signals in noise. Heaps H. S.), Canad. J. Phys., 1958, **36**, № 6, 692—703 (англ.)

В заметке, написанной на принятом в физике уровне строгости, решается задача по отысканию переходной функции линейного фильтра, максимизирующей отношение средней интенсивности сигнала на выходе к уровню шума. Для некоторых случаев приводятся таблицы этого отношения в зависимости от параметров сигнала и шума. Ю. А. Розанов

11952. Приближенный расчет и моделирование накопления шумов в радиорелейных линиях связи. Синдлер Ю. Б., Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова, 1958, вып. 2, 227—255

Для достаточно больших значений аргумента x даются оценки законов распределения $F_n(x)$ сумм большого числа n независимых случайных величин, а также случайных величин, образующих простую однородную цепь Маркова. Например, если слагаемые независимы, одинаково распределены и их распределение притягивается к устойчивому распределению с параметром α, то при больших значениях x

$$F_n(x) \approx \begin{cases} 1-(nc/x^{\alpha}), & \text{если } \alpha < 1, \\ 1-(nc/(x-cn\ln n)), & \text{если } \alpha = 1, \\ 1-(nc/[x-(n-n^{1/\alpha})a]^{\alpha}), & \text{если } 1<\alpha<2, \\ 1-(nc/[x-(n-1)a]^{\alpha}), & \text{если } \alpha \geqslant 2 \end{cases}$$

(a — математическое ожидание отдельного слагаемого, c — параметр). Результаты применяются для оценки закона распределения мощности шума в телефонном канале на выходе радиорелейной линии связи. Разработан метод моделирования указанной задачи на цифровых вычислительных машинах. А. А. Темпельман

11953. Абстрактная теория кодирования поисков. Малони (Abstract theory of retrieval coding. Maloney Clifford J.), Preprints papers Internat. Conf. Scient. Informat. (Washington, D. C., 1958). Washington, D. C., Nat. Acad. Sci.—Nat. Res. Council, 1958, VI/95—VI/112 (англ.)

В математической форме описывается проблема библиографического поиска нужной литературы; автор указывает на некоторую аналогию с теорией информации.

А. А. Темпельман

11954. Некоторые применения отрицательно биномиального и других распределений для изучения болезней. Герленд (Some applications of the negative binomial and other contagious distributions. Gurland John), Amer. J., Public Health, 1959, **49**, № 10, 1388—1399 (англ.)

Отмечается, что для изучения некоторых болезней в медицине (или в биологических исследованиях) могут быть успешно применены дискретные распределения (биномиальное, Пуассона, отрицательно биномиальное). Особо подчеркивается, что некоторые математические модели болезней естественно приводят к отрицательно биномиальному распределению или его обобщениям. Рассматриваются методы статистических оценок неизвестных параметров. П. А. Строганов

11955. О состоянии относительной устойчивости населения. Туллен (Über den relativen Beharrungszustand einer Bevölkerung. Thullen Peter), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, **58**, № 2, 177—196 (нем.)

Если в открытой группе населения остается неизменным общее число индивидуумов и их распределение по возрасту, то говорят, что эта группа находится в состоянии устойчивости или стационарна. Если же общее число членов группы может меняться, но распределение по возрасту остается неизменным, то группа называется относительно стационарной или находящейся в состоянии относительной устойчивости. Если число индивидуумов в группе возрастает или убывает по экспоненциальному закону, то группа населения называется стабильной. Изучаются относительно устойчивые группы населения. В частности, доказывается следующее предложение.

Теорема 1. Группа населения стабильна тогда и только тогда, когда функция пополнения имеет неизменную во времени возрастную структуру и постоянную норму роста, равную норме роста всей группы.

Далее указываются условия стабильности группы населения, находящейся в состоянии относительной устойчивости. Б. Н. Гарштейн

11956. Проблемы вероятности и решения, связанные с внезапным подъемом воды в море. Енсен (Problèmes de probabilité et décision en connexion avec les raz de marée. Jensen Arne), Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS, 1959, 89—100. Discuss., 101 (франц.)

При некоторых предположениях относительно числа бурь и силы ветра изучается распределение вероятности максимального подъема уровня воды моря за какой-то промежуток времени на побережье. Обсуждаются проблемы, которые возникают при принятии решения относительно высоты дамб. П. А. Строганов

11957. Теоретические модели выбора стратегии: стабильное поведение в случае двух исходов. Сигел (Theoretical models of choice and strategy behavior: stable state behavior in the two-choice uncertain outcome situation. Siegel Sidney), Psychometrika, 1959, **24**, № 4, 303—316 (англ.)

Обсуждается выбор оптимальной процедуры при предсказывании исхода в последовательности испытаний Бернулли. Рассматриваются три модели. Пусть π — вероятность более частого события; p — доля случаев выбора более частого события; a, b, c — некоторые постоянные, которым в каждой модели приписывается определенный смысл. Выбор стратегии определяется выбором p, для которого указываются границы, в зависимости от значений π, a, b, c. Модель II: a — выигрыш при правильном предсказании исхода с большей вероят-

ностью, b — выигрыш при правильном предсказании исхода с меньшей вероятностью, c — выигрыш при неправильном предсказании. Положим $\alpha = a/c$, $\beta = b/c$. Тогда: $p = 1$, если $\beta \leqslant (\pi\alpha - 1)/(1 - \pi)$, $1 > p > \pi$, если $(\pi\alpha - 1)/(1 - \pi) < \beta < [\pi\alpha - (2\pi - 1)]/(1 - \pi)$, $p = \pi$, если $\beta = [\pi\alpha - (2\pi - 1)]/(1 - \pi)$, $p < \pi$, если $\beta > [\pi\alpha - (2\pi - 1)]/(1 - \pi)$.

Приводятся результаты экспериментов, выполненных в соответствии с рассмотренными моделями. Библ. 22 назв. Л. Я. Савельев

11958. Эволюция распределения аддитивных величин в статистической механике. Оническу (Evoluția repartiției mărimilor aditive ale mecanicei statistice. Onicescu O.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» și Politehn. București. Ser. științ. natur., 1955, № 6-7, 31—34 (рум.; рез. русск., франц.)

См. также: 11266, 11413, 11762, 11763, 11784, 12189.

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

11959 K. Цицейка и его роль в развитии дифференциальной геометрии. Георгиу (George Țițeica și rolul său în dezvoltarea geometriei diferențiale. Gheorghiu Gh. Th.), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 55—62 (рум.)

11960. Дифференциальная геометрия в целом в физических измерениях. Грабьель (Geometria diferencial global en las mediciones físicas. Grabiel Federico), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 69—71 (исп.)

Автор отмечает, что теория тензоров от множеств, развитая им (Tensor, 1960, **10**, № 1, 1—20), находится в таком же отношении к обычному тензорному исчислению, в каком принятые в физике приемы приближенных измерений находятся к математическим идеализациям. Приводятся некоторые рассуждения, подкрепляющие эту точку зрения. А. Л. Онищик

11961. Метод решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Утияма (A method of solution of linear partial differential equations of the second order with function coefficients. Uchiyama Moritsune), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 7, 316—320 (англ.)

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, с числом независимых переменных, большим двух, следующего вида:

$$g^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^l(x)\frac{\partial u}{\partial x^l} + c(x)u = f(x). \qquad (1)$$

Применяя аффинное преобразование, предложенное Такасу, автор сводит уравнение (1) к уравнению второго порядка, в котором коэффициенты, стоящие при вторых производных, постоянные

$$\varepsilon_l \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^l \partial \xi^l} + \overline{b}^l(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi^l} + \overline{c}(\xi)u = \overline{f}(\xi) \quad (\varepsilon_l = \pm 1). \qquad (2)$$

Изложим вкратце преобразование Такасу. Пусть (x^l) $(l = 1, 2, \ldots, n)$ — параллельные координаты в аффинном пространстве A^n и дано $\omega^l \overset{\text{def}}{=\!=} \overset{l}{\omega}_m(x)\,dx^m$ $(l, m, \ldots, p, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$, $|\overset{l}{\omega}_m(x)| \neq 0$. Зная $\overset{l}{\omega}_m(x)$, введем Ω_l^q соотношением $\Omega_l^p \overset{l}{\omega}_q = \delta_q^p$, $\Omega_q^l \overset{p}{\omega}_l = \delta_q^p$ и зададим $\overset{p}{\Lambda}_{hk} \overset{\text{def}}{=\!=} \Omega_l^p \frac{\partial \omega_h^l}{\partial x^k} = -\overset{l}{\omega}_h \frac{\partial \Omega_l^p}{\partial x^k}$. Геодезические кривые $x^p = x^p(t)$ второго рода, соответствующие $\overset{l}{\omega}_m(x)$, определяются так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\omega^l}{dt} = 0 \rightleftarrows \frac{d^2x^r}{dt^2} + \overset{r}{\Lambda}_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\omega^l}{dt} = \omega_q^l\left(\frac{d^2x^q}{dt^2} + \overset{q}{\Lambda}_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right). \qquad (3)$$

Из (3) получается $\omega^l = a^l dt$ $(a^l = \text{const})$, $\xi^l \overset{\det}{=\!=} \int \frac{\omega^l}{dt}dt = a^l t + C^l$ $(C^l = \text{const})$. (ξ^l) называются геодезическими параллельными координатами второго рода, соответствующими $\overset{l}{\omega}_n(x)$.

Далее устанавливается, что

$$\xi^l = \overset{l}{a}_m(x)x^m + \overset{l}{a}_0 \quad (\overset{l}{a}_0 = \text{const}), \quad \overset{l}{a}_m(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \overset{l}{\omega}_m(x). \qquad (4)$$

Исходя из соотношения $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = \omega^l\,\omega^l$, $g_{ij} = \omega_i^l\,\omega_j^l$, и применяя преобразование (4), автор сводит уравнение (1) к виду (2), при этом требуется чтобы $|g^{ij}(x)| \neq 0$, $g^{ij} \in C^\nu$. В. С. Жгенти

11962. Линейные системы прямых подобий в плоскости. Бартош, Вышин (Lineární soustavy přímých podobností v rovině. Bartoš Pavel, Vyšín Jan), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 129—139 (чешск.; рез. русск., франц.)

Пусть в евклидовой плоскости задано n точек $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и n прямых $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Линейной системой прямых подобий $\sum_n$ авторы называют множество всех таких прямых подобий, из которых каждое переводит точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в точки, лежащие по очереди на прямых $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Подробно исследован случай $n = 2$. Множеством $\sum_2(Z)$, где Z — какая-то точка плоскости, является или вся плоскость или прямая, в последнем случае точка Z называется особой. Множества особых точек подробно изучаются. Опираясь на свойства систем $\sum_2$, автор намечает путь к изучению систем $\sum_n$, и для $n = 3$ и $n = 4$ приводит несколько примеров. Одним из них является решение известной задачи (с использованием полученных результатов): построить квадрат, вершины которого лежат на заданных прямых. Z. Nádeník

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

11963. Завершение и погружение решения Шварцшильда. Фронсдаль (Completion and embedding of the Schwarzschild solution. Fronsdal C.), Phys. Rev., 1959, **116**, № 3, 778—781 (англ.)

Рассматривается многообразие S_6, включающее в себя многообразие V_4 с линейным элементом Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Во всем S_6 гравитационное поле нестационарно, но при $r>1$ может быть сделано сколь угодно близким к стационарному. С. Г. Кислицын

11964. О представлении минимума суммы квадратов в одной геодезической проблеме приложения. Никкуль (Über die Darstellung der kleinsten Quadratsumme in einem geodätischen Einpassungsproblem. Nickul K. Comment. phys.-math. Soc. scient. fennica, 1959, **23**, № 6, 10 S., ill.) (нем.)

На плоскости рассматриваются две системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и $M_1', M_2', \ldots, M_n'$. Обозначим расстояние между точками M_i и M_i' через Δ_i и рассмотрим величину $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2$. Ищется минимальное значение этой величины. Рассмотренная задача имеет приложения в геодезии. А. С. Феденко

11965. Расчет обтекания решетки профилей с тонкими сильно изогнутыми профилями. Полашек (Výpočet obtékání lopatkových mříží s tenkými silně prohnutými profily. Polášek Jan), Aplikace mat., 1958, **3**, № 5, 325—347 (чешск., рез. русск., нем.)

Изложен метод расчета потенциального обтекания плоских решеток из тонких произвольно изогнутых профилей. По аналогии с теорией крыла Бирнбаума-Глауэрта профиль решетки заменяется непрерывным распределением вихрей. Обтекание профиля в решетке рассматривается как обтекание единичного профиля в неоднородном потоке, причем неоднородность (индуцированная скорость) вызвана остальными профилями решетки. Автор использует результаты своей работы (РЖМех, 1960, 350) о тонком профиле в неоднородном потоке. При рассмотрении поля вблизи фиксированного профиля все остальные профили аппроксимируются дугами окружности. С помощью разложения в тригонометрические ряды задача сводится к системе алгебраических линейных неоднородных уравнений. Метод пригоден для решения как прямой задачи (отыскание геометрических параметров решетки по аэродинамическим), так и обратной. Метод охватывает все применяемые значения относительных шагов, узлов и изогнутостей решетки.

Ф. И. Федоров

11966. Тензорный анализ конечных вращений. Ч. I. Тензор положения преобразований и приложения к авиационным маневрам. Бейтман (Tensor analysis of finite rotations. Part 1. Positiontensor transformations, and applications to aircraft manoeuvres. Bateman E. H.), Aircraft Engng, 1958, **30**, № 351, 1260—130 (англ.)

Исходя из того, что ориентация жесткого тела в трехмерном евклидовом пространстве может быть определена положением трех фиксированных осей, а всякое вращение может быть задано некоторой трехмерной матрицей, автор вводит три ортогональных единичных вектора, отвечающих трем направлениям (1 — прямо вперед, 2 — бокового правого борта и 3 — вертикально вниз) и совокупность трех осей определяет как „тензор" положения X жесткого тела. Если серии различных положений тела сопоставить „тензоры" положений $X_0, X_1, \ldots, X_n$, а операторы вращений, осуществляющих переход из одного положения в другое, обозначить соответственно через $T_1, \ldots, T_n$, то $X_1 = T_1 X_0$, $X_2 = T_2 X_1 = T_2 T_1 X_0$ и, следовательно, пользуясь матричным исчислением, окончательное положение можно определить через первоначальное без подсчета координат предыдущего промежуточного. Это позволяет автору, в матричной форме, изучать последовательность авиационных маневров, состоящих из комбинации, например, вращений и килевой качки или более сложных комбинаций, или изучать вариацию размаха при движении крыла самолета в маневре около неподвижной оси или вопрос о направлении вращения осей между двумя специальными положениями. Так, если при переходе X_0 к X_1 вертикальные оси инвариантны, то $X_1 = T^0 X_0$,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix},$$

$$\text{т. е. } T^0 = \begin{Vmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos\gamma, \\ s = \sin\gamma, \end{matrix}$$

и всякая из указанных выше задач позволяет, в силу этого, формулировку в матричной форме. На этом пути рассматриваются задачи: определения направления осей через угол вращения, комбинация вращения и килевой качки, комбинация вращений. А. З. Петров

11967. Геометрия зубчатых зацеплений. Перес (Involute gear geometry. Peres N. J. C.), Austral. J. Appl. Sci., 1959, **10**, № 1, 25—44 (англ.)

Статья является продолжением работы того же автора (РЖМат, 1956, 3245), посвященной геометрии винтовых зубчатых передач. В настоящей статье рассматриваются всевозможные виды зубчатых передач. Рассматриваются также случаи внутреннего и внешнего зацеплений. Для каждой из трех поверхностей, образующих зуб, устанавливается соответствующее уравнение в векторной форме. Эти три уравнения потом соединяются в одно общее уравнение. На основании этого уравнения выводятся зависимости между основными элементами зубчатого колеса. В заключительной части статьи определяются различные параметры, необходимые для быстрого и удобного построения профиля зуба по его основным размерам. Б. У. Британ

11968 К. Курс кинематики Т. 1. Кинематика точки и твердого тела. Сложное движение. Гарнье (Cours de cinématique. T. 1. Cinématique du point et du solide. Composition des mouvements. 3e éd., rev. et augm. Garnier René. Paris, Gauthier—Villars, 1954, IX, 244 p., 4000 fr.) (франц.)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11969. Сопоставление элементарно геометрических методов на одном примере. Гёц (Gegenüberstellung elementargeometrischer Methoden an einem Beispiel. Götz W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1959, **12**, № 5, 222—225 (нем.)

Рассматриваются три доказательства известной теоремы: центры квадратов, построенных на сторонах любого четырехугольника (все наружу или все внутрь), образуют четырехугольник с равными взаимно перпендикулярными диагоналями. В первом доказательстве используются соображения кинематического характера, второе доказательство — в «евклидовом стиле» с использованием конгруэнтных треугольников и, наконец, третье доказательство — векторное П. Г. Колобов

11970. Замечания к теории геометрических построений. Текше К., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 197—204

Рассматривается литература, посвященная построениям линейкой и циркулем постоянного раствора. Приводятся дополнительные условия, при которых возможно одной линейкой найти центр окружности. Продолжены исследования об отыскании центра окружности одной линейкой при некоторых новых дополнительных условиях. Исследования основаны на элементарных фактах проективной геометрии.

Используя известные построения, производимые одной линейкой, автор доказывает следующую теорему, имеющую для дальнейших построений фундаментальное зна-

чение. «Если начерчена дуга P_1P_2 окружности и указана ее середина A, то можно одной линейкой построить середину D хорды этой дуги и точку B окружности, диаметрально противоположную точке A». На основании доказанной теоремы автору удается решить следующие задачи: Даны дуга P_1P_2 окружности, середина A этой дуги и еще одна точка E окружности такая, что дуга AE равна 45°, 60° или 90°. Требуется построить одной линейкой центр окружности. Далее решаются еще три задачи, из которых упомянем следующую: дана сколь угодно малая дуга P_1P_2 окружности и ее середина A. Пользуясь только линейкой, построить центр окружности, если косинус (или синус) центрального угла, опирающегося на половину данной дуги, известное рациональное число.

Автор обобщает результаты Кауэра (D. Cauer) и Янагихары (K. Yanagihara), связанные с построением центров двух пересекающихся окружностей. В заключение показана возможность построения центра окружности с помощью линейки и эталона, если известна сколь угодно малая дуга этой окружности. Полученные результаты значительно превосходят результаты Облата (Oblath R., Acta Sci. Math. Szeged, 1951, 14, 101-102).

Примечание референта. При доказательстве основной теоремы для построения прямой QQ_1 дается ссылка на построение (1), применение которого, при имеющихся данных, непонятно. С. И. Зетель

11971. Установив, отметь это. Невилл (When found, make a note of. Neville E. H.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 187—188 (англ.)

Для любого треугольника справедлива формула $R\cdot\sum_{\alpha=A;B;C}\cos\alpha = R+r$. Дается геометрическое доказательство этой формулы сначала для случая остроугольного треугольника, затем и в случае тупоугольного треугольника. В последнем случае длины отрезков определяются не только по величине, но и по знаку. Далее приводится кубическое уравнение, корнями которого являются a, b, c (длины сторон треугольника). Коэффициенты этого уравнения записываются через радиусы вписанного и описанного кругов и полупериметр треугольника. Приводятся формулы для выражения симметрических функций от a, b, c через R, r и p. В. А. Иглицкая

11972. Центр тяжести четырехугольника. Фосс (Centre of gravity of a quadrilateral. Foss V. W.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 46 (англ.)

11973. О некоторых геометрических преобразованиях. Ионеску-Бужор (Asupra unor transformări geometrice. Ionescu-Bujor C.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **B 10**, № 4, 206—213 (рум.)

Рассматриваются некоторые частные аффинные преобразования и доказывается:

1) Пусть заданы в плоскости гомотетия $H(O,k)$ и перспективно-аффинное преобразование a с осью c, проходящей через центр гомотетии O, направлением Δ и отношением λ (расстояний двух соответствующих точек от c); если при этом точка M_1 соответствует точке M в произведении преобразований $a\cdot H$, то прямая c делит отрезок MM_1 в отношении λ/k, или же параллельна MM_1.

Следствие. В частном случае, когда a является симметрией относительно c, то $\lambda=1$; случай $c \parallel MM_1$ соответствует значению $k=-1$, т. е., когда гомотетия становится симметрией относительно центра O.

2) Пусть заданы в плоскости гомотетия $H(O,k)$ и симметрия S относительно прямой c, проходящей через точку O. Пусть точка M преобразуется в точки

$$M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots \qquad (1)$$

при преобразованиях

$$SH, (SH)^2, \ldots, (SH)^p, \ldots; \qquad (2)$$

тогда точки ряда (1) четного индекса лежат все на прямой OM, а точки нечетного индекса лежат на прямой, симметричной с OM относительно c.

3) В условиях предыдущего предложения перспективно-аффинное преобразование с осью c, направлением MM_1 и отношением $1/k$ преобразует ряд точек $M_1, M_2, \ldots, M_{2p}, \ldots$ в ряд точек $M_1, M_3, \ldots, M_{2p+1}, \ldots$ Если же за направление a выбрать M_1M_2, то точки $M_1, M_3, \ldots, M_{2p-1}, \ldots$ преобразуются соответственно в точки $M_2, M_4, \ldots, M_{2p}, \ldots$

4) Пусть даны гомотетия $H(O,k)$ и симметрия S относительно оси c, не проходящей через центр гомотетии и пусть (1) — ряд точек, полученных от преобразований (2); тогда коллинеарны как все точки (1) четного индекса, так и все точки того же ряда нечетного индекса. Аналогичное предложение имеет место для пространства, если вместо симметрии относительно прямой рассматривать симметрию относительно плоскости, не проходящей через центр O данной гомотетии H. Г. И. Глейзер

11974. Уравнение изогональной инверсии. До (Équation de l'inversion isogonale. Deaux R.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 151—152 (франц.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1959, 6219) автор устанавливает между аффиксами z и z' двух точек, изогональных в треугольнике PQR, вписанном в круг центра Ω и радиуса ρ, отнесенного к прямоугольной системе координат на плоскости Гаусса, следующую связь:

$$zz' - \omega(z+z') + \rho e^{i\theta}(\bar{z}+\bar{z}') + f^2 = 0, \qquad (1)$$

где ω и f — аффиксы Ω и фокуса конического сечения, вписанного в PQR и $\theta = (Ox, \overline{\Omega P}) + (Ox, \overline{\Omega Q}) + (Ox, \overline{\Omega R})$. В настоящей заметке автор преобразует уравнение (1), вводя аффиксы ω_g центра круга Эйлера Ω_g для треугольника PQR, и получает форму этого уравнения, которая имеет связь с теоремой Вейля — Айара (Weill — Aiyar):

$$(z-\omega)(z'-\omega) = 2fe^{i\theta}\left(\bar{\omega}g - \frac{\bar{z}+\bar{z}'}{2}\right).$$

Если через Z и Z' обозначить точки аффиксов z и z' и M — середина ZZ', то из (1) получим: $|\Omega Z\cdot\Omega Z'| = 2\rho|\Omega_g M|$ и, кроме того, угол: $(Ox, \overline{\Omega Z}) + (Ox, \overline{\Omega Z'}) + (Ox, \overline{M\Omega_g}) \pmod{2\pi}$ не зависит от точек Z, Z' и равен углу θ, образованному с Ox осью средней ориентации PQR.

Отсюда следствие: векторы $\overline{\Omega Z}$, $\overline{\Omega Z'}$ и вектор, равный $\overline{M\Omega_g}$, по отнесенной к точке Ω, пересекают круг (Ω, ρ) в вершинах треугольника, ортополярного треугольнику PQR. С. К. Шакулова

11975. О множестве точек окружности, находящихся на рациональном расстоянии. Серпинский (Sur les ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle. Sierpiński W.), Elem. Math., 1959, **14**, № 2, 25—27 (франц.)

Доказываются следующие утверждения: если r^2 рационально, то на окружности радиуса r существует плотное множество таких точек, что расстояние между любой парой точек этого множества рационально; на плоскости можно определить конечное число точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой и таких, что расстояние между любыми двумя есть целое число. Р. С. Гутер

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11976. Эллиптическая парабола и некоторые связанные с ней кривые. Беляев (Еліптична парабола і

деякі зв' язані з нею криві. Бєляєв М. Г.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1955, 12, 3—12 (укр. рез. русск.)

Эллиптическая парабола на карте Бельтрами может быть представлена уравнением $4x^2/a^2 + 4(y - 1/2)^2 = 1$. При этом всегда $a < \sqrt{2}$. (Для $a = \sqrt{2}$ парабола становится предельной линией). Если F_2 — точка касания параболы с кругом Бельтрами, а F_1 — ее фокус (точка пересечения двух мнимых абсолютных касательных к ней), P — произвольная точка параболы, то, как показывает автор, отрезки F_1P и F_2P образуют равные углы (в геометрии Лобачевского) с касательной к параболе в точке P. Находится формула, определяющая дугу параболы от вершины до произвольной точки. Показывается, что подерой параболы относительно ее вершины является евклидова кардиоида с особой точкой в этой вершине. Подерой параболы относительно фокуса является некоторая кривая четвертого порядка. Находится кривая, которую описывает фокус параболы при качении параболы вдоль оси ox (рулетта). Н. И. Кованцов

11977. Три гиперболы, ассоциированные с треугольником. Корт (Three hyperbolas associated with a triangle. Court N. A.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 241—247 (англ.)

В треугольнике ABC проводятся средние линии $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ и строится треугольник $A''B''C''$, стороны которого проходят через вершины данного треугольника ABC и параллельны противоположным сторонам. Известно, что кривые, изотомические относительно треугольника ABC самосопряженным изотомическим трансверсалям $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, суть гиперболы (H_a), (H_b) и (H_c), проходящие через точки A, B и C. Доказывается ряд теорем, в том числе следующие: 1. Центр эллипса Штейнера есть центр тяжести треугольника, образованного центрами гипербол (H_a), (H_b) и (H_c). 2. Пусть R_a, R_b, R_c — четвертые точки пересечения описанной около треугольника ABC окружности соответственно с гиперболами (H_a), (H_b), (H_c) — и R — точка Штейнера для эллипса Штейнера. Тогда справедливо положение: точки, изотомические точкам R_a, R_b, R_c и R относительно треугольника ABC, будут точки пересечения оси Лонгшампа треугольника ABC со сторонами треугольника $A'B'C'$ и бесконечно удаленная точка этой оси. Трилинейные поляры этих четырех точек относительно треугольника ABC суть прямые, соединяющие точку Лемуана треугольника ABC с вершинами треугольника $A''B''C''$ и общим центром тяжести треугольников ABC и $A''B''C''$. Н. В. Наумович

11978. Пересечение нормалей. Рагхавендран (Concurrence of the normals. Raghavendran R.), Math. Student, 1958, 26, № 4, 183—185 (англ.)

Пусть нормаль к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его точке P с эксцентрическим углом θ проходит через некоторую точку $Q(h, k)$. Тогда

$$ah \sin\theta - bk \cos\theta = c^2 \sin\theta \cos\theta, \quad (c^2 = a^2 - b^2). \qquad (1)$$

Заменяя в (1) e через $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, получим:

$$c^2e^4 + 2(ibk - ah)e^3 + 2(ibk + ah)e - c^2 = 0. \qquad (2)$$

Последнее уравнение в e имеет четыре корня, соответствующих нормалям в четырех точках P_r с эксцентрическими углами θ_r, так что $e^{i\theta_r} = e_r$, проходящим через точку Q. Из (2) имеем:

$$e_1e_2e_3e_4 = -1 \qquad (3)$$

и

$$\Sigma e_1e_2 = 0 \qquad (4)$$

Далее, (3) равносильно уравнению

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n + 1)\pi, \qquad (5)$$

где n — целое. На основе (3) $e_1e_2 + e_3e_4 = e_1e_2 - e_1^{-1}e_2^{-1} = 2i \sin(\theta_1 + \theta_2)$. Аналогично из (4) получаем:

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_3 + \theta_1) = 0. \qquad (6)$$

Доказывается обратное: если эксцентрические углы θ_1, θ_2 и θ_3 трех точек эллипса удовлетворяют уравнению (6), то нормали в этих точках пересекаются в одной точке. Изложенный метод автор считает естественным и для доказательства других подобного рода предложений, например, для того чтобы нормали в четырех точках (a cosec θ_r, b ctg θ_r) гиперболы пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имели место (5), (6) и др. Г. И. Глейзер

11979. Эллипс на стыке между конгруэнтной и аффинной геометрией. Егер (Die Ellipse an der Nahtstelle zwischen Kongruenzgeometrie und Affingeometrie. Ein Beitrag zur Einführung abbildungsgeometrischer Methoden im Mittelschulunterricht. Jeger M.), Elem. Math., 1960, 15, № 1, 1—8 (нем.)

Автор указывает, что в школьном преподавании эллипс сначала определяется своими фокальными свойствами, а затем позднее на первый план выдвигаются его аффинные свойства, причем делается это так, что у учащихся создается впечатление, что речь идет о двух различных кривых. Автор ставит перед собой задачу теснее связать метрические и аффинные свойства эллипса. Исходя из фокальных свойств, путем соответствующих построений автор доказывает, что эллипс может быть получен путем сжатия окружности, построенной на его большой оси, т. е. является нормально-аффинным отображением этой окружности. Затем с помощью двух связанных перспективно-аффинных преобразований (ось одного является направлением другого), составляющих преобразование подобия, доказывается, что эллипс можно также рассматривать как нормально-аффинное преобразование окружности с диаметром, равным малой оси эллипса. Наконец, разложив произвольное перспективно-аффинное преобразование на вращение и нормально-аффинное, приходит к выводу, что перспективно-аффинное отображение окружности всегда есть эллипс. А. Г. Школьник

11980. Кардиоида. Йейтс (The cardioid. Yates Robert C.), Math. Teacher, 1959, 52, № 1, 10—14 (англ.)

Рассматриваются различные способы получения кардиоиды. Показывается, что кардиоида является: рулеттой двух окружностей одного и того же радиуса, конхоидой окружности, подерой окружности, каустикой окружности, огибающей семейства окружностей с центрами на фиксированной окружности и проходящих через одну из ее точек. С помощью элементарных средств вычисляются длина кардиоиды и площадь, ею ограниченная. П. Г. Колобов

11981. Об осях цилиндров вращения, проходящих через 2, 3, 4, 5 заданных точек. Марьон (Sur les axes des cylindres de révolution passant par 2, 3, 4, 5 points. Marmion A.), Mathesis, 1957, 66, № 7-9, 261—268 (франц.)

Дается описание комплекса (соответственно конгруэнции, линейчатой поверхности) осей цилиндров вращения, содержащих 2 (соответственно 3, 4) заданные точки и осей цилиндров вращения, проходящих через 5 (а в некоторых случаях и большее) количество точек. А. А. Иванов

11982. Построение элементов конических сечений. Вейнахт (Die Konstruktion von Kegelschnittelementen. Weinacht J. H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1960, 12, № 10, 458—464 (нем.)

11983. Некоторые геометрические приложения матричного исчисления. Коммо (Quelques applications géométriques du calcul matriciel. Commeau J.), Rev. math. spéc., 1960, 70, № 6, 133—136 (франц.)

Коническое сечение, уравнение которого в однородных декартовых координатах: $AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY=0$, может быть задано симметрической матрицей его коэффициентов:

$$A=\begin{pmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{pmatrix};$$

с ее помощью уравнение этого конического сечения записывается в виде $\mathrm{tr}\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=0$, где $\mathbf{M}$ — матрица-столбец из однородных координат X, Y, Z точки конического сечения, а $\mathrm{tr}\,\mathbf{M}$ получена из $\mathbf{M}$ транспонированием. Если ввести трилинейные координаты: $X'=\alpha X+\beta Y+\gamma Z$, $Y'=\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z$, $Z'=\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z$, при этом матрица $\omega=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$ предполагается неособенной, то уравнение конического сечения принимает вид: $\mathrm{tr}\,\mathbf{M}':\mathbf{A}'\mathbf{M}'=0$, где матрица $\mathbf{A}'$ получена из A путем преобразования ее с помощью матрицы, обратной ω: $\mathbf{A}'=\mathrm{tr}\,\omega^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\omega^{-1}$, а $\mathbf{M}'$ — столбец из трилинейных координат точки конического сечения. Уравнение конического сечения, проходящего через вершины трилинейного репера, не содержит квадратов координат $\lambda Y'Z'+\mu Z'X'+\nu X'Y'=0$ ($\lambda\mu\nu\neq 0$), а уравнение конического сечения, относительно которого вершины трилинейного репера являются сопряженными, содержит только квадраты координат: $\alpha X'^2+\beta Y'^2+\gamma Z'^2=0$ ($\alpha\beta\gamma\neq 0$). Если D — столбец из коэффициентов уравнения касательной к коническому сечению, то $D=AM_0$, где M_0 — столбец из координат точки касания. Это же уравнение справедливо и для поляры точки M_0. Полюс M прямой D определяется соотношением $M=A^{-1}D$. В связке конических сечений, определяемой матрицей $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\lambda\mathbf{B}$, распадающимися являются те сечения, для которых параметр λ является собственным значением матрицы AB^{-1}. Это значение λ сохраняется и при переходе к трилинейным координатам.

А. Г. Школьник

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

11984. Пучки нуль-поляритетов. Шустер (Pencils of null polarities. Schuster Seymour), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 4, 614—620 (англ.)

Нулевую корреляцию (нуль-поляритет) можно определить так: $P\to TPQ$, $Q\to PQR$, $R\to QRS$, $S\to RST$, $T\to STP$, где никакие четыре из данных пяти точек P, Q, R, S, T не лежат в одной плоскости. Если P, Q, R и T компланарны, то получается специальный нуль-поляритет. Совокупность нуль-поляритетов, определенных пятиугольником $PQRST$, где P, Q, R и S фиксированы, а T пробегает прямую t (не проходящую ни через одну из фиксированных точек), лежащую в данной плоскости, является пучком. Пучки поляритетов делятся на три вида в зависимости от того, пересекает ли прямая t два, одно или ни одного из фиксированных ребер PQ, QR, RS. Пучок поляритетов определяет пучок линейных комплексов прямых и линейную конгруэнцию прямых, входящую в каждый линейный комплекс пучка. Линейные конгруэнции прямых делятся на три вида: общую (гиперболическую или эллиптическую), параболическую и вырожденную, в зависимости от вида пучка поляритетов, определяющего линейную конгруэнцию.

В. А. Маневич

11985. Замечания к образованию кубической пространственной кривой через три проективных пучка плоскостей. Лензе (Bemerkungen zur Erzeugung der kubischen Raumkurven durch drei projektive Ebenenbüschel. Lense Josef), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1958. München, 1958, 111—115 (нем.)

Кубическая пространственная кривая является геометрическим местом точек пересечения соответственных плоскостей трех проективных пучков плоскостей. Исключение составляют два случая: 1) соответствующие плоскости трех пучков пересекаются по прямым — пучки образуют одну и ту же поверхность 2-го порядка; 2) точки пересечения соответствующих троек плоскостей располагаются в одной плоскости. Рассматриваются распавшиеся кубические пространственные кривые.

В. А. Маневич

11986. Изображение R_0-гиперконуса четырехмерного пространства. Дальман, Элстер (Darstellung eines R_0 Hyperkegels des R_4 in der Zeichenebene. Dallmann Herbert, Elster K.-H.), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena. Math.-naturwiss. Reihe. 1957—1958, 7, № 2-3, 233—236 (нем.)

Авторы рассматривают построения сечений R_0-гиперконуса различными гиперплоскостями и определяют параметры этих сечений. Они приходят к выводу, что простейшим средством изображения R_0-гиперконуса четырехмерного пространства является изображение при помощи различных сечений.

Рассмотрены следующие вопросы: 1) определение конуса R_0 общего вида (с вершиной в точке) в четырехмерном пространстве: 2) сечение R_0-гиперконуса по поверхностям второго порядка (гиперконус рассматривается как совокупность шаров, как совокупность конусов и как совокупность двуполостных гиперболоидов); 3) построение касательных гиперплоскостей в заданной точке гиперконуса.

В. Н. Журавлева

11987. Замечания к отображению гиперконуса R_1 в R_4. Дальман, Элстер (Bemerkungen zur Darstellung eines R_1-Hyperkegels des R_4. Dallmann Herbert, Elster Karl-Heinz), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena. Math.-naturwiss. Reihe, 1958—1959, 8, № 2-3, 231—239 (нем.)

В пространстве R_4 рассматривается гиперконус R_1, образованный вращением некоторой плоскости около одной из плоскостей декартовой координатной системы, и его сечения с различными гиперплоскостями. Отображение R_1 на плоскость чертежа осуществляется с помощью проектирования точек 4-мерного пространства R_4 в упорядоченные пары точек на плоскости чертежа (векторы). Гиперконус R_1 является частным видом аксистера (РЖМат, 1960, 10 802). Изложение аналитическое.

В. А. Маневич

11988. К проблеме Вейля в пространстве Лобачевского. Тодоров (До проблеми Вейля в просторі Лобачевського. Тодорова Г. С.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 11, 1193—1196 (укр.; рез. русск., англ.)

Приводится доказательство существования в пространстве Лобачевского регулярной поверхности, реализующей заданную на сфере, четырежды непрерывно дифференцируемую метрику, кривизна которой больше кривизны пространства. Теорема доказывается сначала для метрики, удовлетворяющей всем условиям теоремы и, кроме того, дополнительно, условию Гельдера с показателем $0<\alpha<1$ для четвертых производных. Заданная на сфере, четырежды непрерывно дифференцируемая метрика аппроксимируется метриками, удовлетворяющими условию Гельдера на четвертые производные, а реализующая ее поверхность рассматривается как предел бесконечной последовательности поверхностей, реализующих аппроксимирующие метрики.

В. П. Белоусова

11989. S-конфигурация в n-мерном евклидовом и эллиптическом пространствах. Мандан (An S-configuration in Euclidean and elliptic n-space. Mandan Sahib Ram), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 489—501 (англ.)

S-конфигурацией (S-k.) называется аналог полного четырехвершинника в n-мерном пространстве. Если $Q_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = A, B, C, D, E$, $\lambda\mu = \mu\lambda$, $\lambda \neq \mu$) — следы 10 ребер $\lambda\mu$ симплекса $(S) = ABCDE$ на данной гиперплоскости четырехмерного пространства и $P_{\lambda\mu}$ — точки, гармонически сопряженные с $Q_{\lambda\mu}$ относительно вершин симплекса, то 20 точек $Q_{\lambda\mu}$, $P_{\lambda\mu}$ образуют (S-k.), для которой $Q_{\lambda\mu}$, $P_{\lambda\mu}$ — пары противоположных точек и (S) — диагональный симплекс. (S-k) четырехмерного пространства содержит 20 точек, 40 прямых, 40 плоскостей, 16 гиперплоскостей со следующими инцидентностями в символике Бейкера: 20 (·, 6, 12, 8), 40 (3, ·, 4, 4), 40 (6, 4, ·, 2), 16 (10, 10, 5). Рассматривается также двойственная конфигурация, состоящая из 16 точек, 40 прямых, 40 плоскостей, 20 гиперплоскостей, а также некоторые специализации (S-k) в евклидовом и эллиптическом пространствах. Получен ряд теорем, связанных с гиперплоскостью Ньютона, в которой лежат середины отрезков, соединяющих пары противоположных точек (S-k). Центры подобия 5 гиперсфер, взятых попарно, также образуют (S-k), вершинами диагонального симплекса которой являются центры n-гиперсфер. В заключение дано обобщение полученных результатов на n-мерное пространство. О. А. Котий

11990. Об аксиоме Лобачевского. Росье (Sur l'axiome de Lobatchewski. Rossier Paul), Arch. sci., 1957, **10**, № 1, 95—96 (франц.)

Показано, что если через некоторую точку P можно провести к прямой d две непересекающие ее прямые, то через P можно провести две параллельные к ней прямые, отделяющие прямые, пересекающие d, от непересекающих. Доказательство основано на аксиомах порядка и непрерывности. C. Teleman

11991. О теореме Холдича и ее аналогах в неевклидовой геометрии. Сантало (On a theorem of Holditch and analogues in non-Euclidean geometry. Santaló L. A. Math. Notae (1954), **14**, 32—49 (исп.)

Многие известные формулы n-мерной неевклидовой геометрии были выведены с помощью теоремы Гаусса—Бонне для четных размерностей. Так, аналог теоремы Холдича для двух измерений (первоначально полученный в работе Видаля-Абаскаля и Родеха (Vidal Abascal, Rodeja, Collect. Math., 1952, 5, 331—337) хорошо выводится из следующего аналога евклидовой теоремы Кампе (Kampe): Если неевклидова плоскость движется в себе так, что она возвращается к исходному положению, то совокупность точек, пути которых заключают равные площади, представляет собой концентрические окружности. Эта теорема распространяется также на движения, зависящие от двух параметров. Главным результатом работы является следующее обобщение теоремы Холдича на неевклидово пространство R произвольной четной размерности n: Пусть при непрерывном движении пространства R $n+1$ его коллинеарных точек A_i ($i = 0, \ldots n$) описывают замкнутые гиперповерхности, ограничивающие объемы V_i; тогда

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ \left(\frac{1}{2} j\omega_n - k^{n/2} V_i \right) \left(\prod_{j \neq i} \sin k^{1/2} (s_i - s_j) \right)^{-1} \right\} = 0,$$

где j показывает, сколько раз направление линии A_0A_i пересекает единичную сферу, $\omega_n = 2\pi^{n+1}/\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)$, K — кривизна пространства и s_i — расстояние точки A_i от A_0. H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 78

11992. Историко-библиографические заметки. Кавальяро (Note storico-bibliografiche. Cavallaro Vincenzo G.), Archimede, 1959, **11**, № 2, 111—115 (итал.)

I. Гармонические треугольники. Треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ называется гармоническим, если удовлетворены следующие равносильные условия:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1; \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2, \; a^2b^2(a^2 + b^2) + b^2c^2(b^2 + c^2) + c^2a^2(c^2 + a^2) + 2a^2b^2c^2 = a^6 + b^6 + c^6, \quad (2)$$

где R — радиус описанной около треугольника окружности. Термин „гармонические треугольники" был введен автором в 1915 г. Излагается краткий обзор возникновения и развития вопроса и приводятся некоторые доказательства важнейших свойств гармонических треугольников.

II. О теореме Штейнера. Треугольник, в котором две внутренние биссектрисы равны, является равнобедренным — эта теорема была впервые доказана Штейнером чисто геометрически и опубликована в 28 томе „журнала Креля". Последовали аналитическое доказательство Пинкерле в 1897 г. и разные другие. Г. И. Глейзер

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11993. Изобразительные методы в начертательной геометрии. Урбан (Zobrazovací methody v deskriptivní geometrii. Urban A.), Pokroky mat., fys. a astron., 1958, **3**, № 1, 22—31; № 2, 139—152 (чешск.)

Доклад, прочитанный для преподавателей начертательной геометрии в высшей школе.

11994. О проектировании пучка конических сечений в пучок окружностей. Грин, Прайор (On the projection of a four-point system of conics into a family of circles. Green H. G., Prior L. E.), Enseign. math., 1959, **5**, № 1, 44—52 (англ.)

Показано, каким образом нужно выбрать плоскость и центр проектирования, чтобы пучок конических сечений, не имеющий трех или более совпадающих базисных точек, спроектировать в пучок окружностей. При этом требуется не более двух центральных проектирований с одной плоскости на другую. При необходимости спроектировать две действительные точки в циклические требуется мнимое проектирование (проектирование из мнимого центра). Указаны аффинные типы конических сечений, проектирующиеся в действительные окружности для различных случаев действительности, мнимости или совпадения некоторых из базисных точек. Во второй части дано аналитическое решение вопроса. Найдены проективные преобразования, переводящие пучок конических сечений в пучок окружностей для всех ранее рассмотренных случаев. О. А. Котий

11995. Подразделение центрально-аксонометрических проекций. Горбунов К. Г., Тр. Саратовск. ин-та мехаиз. с. х., 1959, вып. 14, 168—169

Указываются различные случаи расположения картинной плоскости и центра проекций относительно координатных осей. В. А. Маневич

11996. Косые проекции как вспомогательное средство для нахождения линий пересечения поверхностей. Чупик (Schrägrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven. Tschupik Josef P.), Elem. Math., 1959, **14**, № 4, 78—82 (нем.)

Для нахождения линии сечения двух поверхностей используются вспомогательные поверхности-посредники, большей частью сферы и плоскости. Эта простая идея при практическом осуществлении на чертеже оказывается громоздкой из-за быстрого увеличения числа вспомогательных линий. Предполагая, что две данные поверхности обладают совокупностями до некоторой степен

просто вычерчиваемых параллельных сечений, автор показывает, как путем применения косых проекций на соответственно выбранную плоскость, можно значительно уменьшить число новых вспомогательных построений, используя уже имеющиеся на чертеже вспомогательные линии. Приводится пример нахождения линии сечения двух поверхностей вращения со скрещивающимися осями. Указанный метод дает хорошие результаты, если в пересечении участвуют поверхности вращения, винтовые поверхности и некоторые другие. Н. В. Наумович

11997. Графический метод определения центра кривизны траектории, которую описывает точка, лежащая на пластинке, совершающей плоское движение. Рыпиану (O metodă grafică pentru determinarea centrului de curbură al traiectoriei unui punct situat pe o placă executînd o mişcare plană. Rîpianu A.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj, 1958, **1**, 127—131; Gaz. mat. şi fiz., 1957, **A9**, № 4, 183—186) (рум.; рез. русск., франц.)

11998 K. Начертательная геометрия. Сальковский, Шульце (Darstellende Geometrie. Salkowski E. 8, unveränd. Aufl. Schulze Walter. Leipzig, Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G., 1959, X, 213 S., ill.) (нем.)

Распространенный в Германии учебник, выдержавший 8 изданий. После смерти Сальковского вышел в обработке Шульце (5-е изд.). Учебник содержит краткие сведения по важнейшим методам изображений, применяющимся в технической практике. В гл. II излагаются построения в ортогональной проекции на одну плоскость (в том числе проекции с числовыми отметками). Гл. III посвящена наиболее употребительному в технике методу комплексного чертежа в системе двух ортогональных проекций. Здесь рассмотрены обычные для таких учебников вопросы и задачи, как позиционные, так и метрические. Из приложений отметим разложение силы на 3 компоненты и построение чертежей крыш различной формы. Гл. IV содержит некоторые способы изображений в косоугольной параллельной проекции. В частности — «кавальерная» и «военная» перспективы. Теорема Польке формулируется без доказательства. Вообще аксонометрии уделено очень немного места. В гл. V «Круг и шар» даны обычные элементарные построения проекций круга и шара, в частности, рассказано о шарах Данделена для цилиндра, а также об использовании аффинных преобразований. Рассматриваются также некоторые вопросы ортогональной аксонометрии. Гл. VI. трактует о конических сечениях. При этом снова используются шары Данделена. Показаны некоторые инженерные применения (строительные и топографические). Гл. VII посвящена кривым линиям и поверхностям. Кроме обычного материала и решения задач, большое внимание уделено винтовым поверхностям и построению очертаний поверхностей вращения. Гл. VIII отведена центральной проекции. Для построений используется сложное отношение 4 точек. Показано изображение круга и сферической поверхности в перспективе. В гл. IX рассказывается о построении теней. Последняя глава содержит дополнения, в числе которых упомянем линейку для построений с недоступными точками схода (Никольсона), приемы построения перспективы объекта по его комплексному чертежу, стереофотограмметрию и др. Из сказанного видно, что книга содержит разнообразный материал, не расположенный в строго систематическом порядке. Обращает на себя внимание отсутствие профильной проекции в комплексных чертежах, а также некоторые неудобства в обозначениях (автор иногда применяет одинаковые обозначения для разных полей проекций).

Н. Ф. Четверухин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11999. Исследование особенности $S^m_{1,\,m-4}(p)$ плоской кривой. У Дин-цзя (Wu Ding-jar), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 3, 445—451 (кит.)

Следуя реферату (Duke Math. J., 1942, **9**, 823—832), автор обозначает некоторую особую точку плоской кривой через $S^m_{1,m-4}$, исследует ее, обобщая метод, использованный Су Бу-цином (Su Buchin, Tôhoku Math. J., 1938, **45**, 239—244), и приходит к результатам, аналогичным полученным Су Бу-цином для $S^m_{1,m-3}$.

S. C. Chang

12000. О прямой Тольятти. Силаш (Asupra dreptei lui Togliatti. Silaş Gh.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 325—336 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть

$$\psi_n(x, y) = z\varphi_{n-1}(x, y) \qquad (1)$$

— уравнение плоской алгебраической кривой четного порядка $n = 2p$, имеющей многократную точку порядка $n-1$ с различными касательными; ψ_n и φ_{n-1} — однородные в x, y многочлены степени n, соответственно $n-1$. Если $\theta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — линейные множители φ_{n-1}, то можно определить единственным образом $n+1$ чисел μ_1, μ_2, λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ с помощью системы

$$b_0 - \sum_{i=1}^{n-3} \lambda_i - \lambda_{n-2} = 0,$$

$$b_k - \sum_{i=1}^{n-3} \lambda_i m_i^k - q_k(\alpha_{k-1}\mu_1 + \alpha_{k-2}\mu_2) = 0,$$

$$b_n - \sum \lambda_i m_i^n - \lambda_{n-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (2)$$

так, чтобы имело место $x = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha_i m^i$; $y = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha_i m^{i+1}$; $z = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i m^i$; прямая $z = \mu_1 x + \mu_2 y$ есть прямая Тольятти или главная прямая данной кривой. Выбирая в качестве сторон базисного треугольника прямую Тольятти и две касательных к кривой в многократной ее точке, устанавливаются следующие необходимые и достаточные условия, которым при этом должны удовлетворять коэффициенты уравнения кривой:

$$\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k a_k b_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k a_k b_{n-2-k} = 0. \qquad (3)$$

Пересекая кривую прямой $z = ux + vy$, автор выводит следующее уравнение пучка прямых с центром в многократной точке, проходящих через точки пересечения (4) с кривой:

$$\eta(x, y) \equiv b_0, b_1 - q_1\alpha_0 u, \ldots, b_k - q_k\alpha_{k-1}u - q_k\alpha_{k-2}v, \ldots$$
$$\ldots, b_{2p-1} - q_{2p-1}\alpha_{2p-3}v,\ b_{2p})(x, y)^{2p} = 0. \qquad (5)$$

$\eta_i(x, y)$ — бинарная форма четной степени, имеющая инвариант

$$I = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p}{k} a_k a_{2p-k} + \frac{1}{2}(-1)^p \binom{2p}{p} a_p^2. \qquad (6)$$

Огибающая прямых (4), аннулирующих (6), является кривой второго порядка уравнения

$$f(cx^2 - 2bxy + ay^2) + (ac - b^2)z^2 = 0. \qquad (7)$$

Отсюда вытекает для плоской алгебраической кривой порядка $2p$ с многократной точкой порядка $2p-1$: прямая Тольятти является полярой многократной точки относительно кривой (7). Положив это геометрическое

свойство в основу определения прямой Тольятти (вместо алгебраического определения, восходящего к Фубини и Чеху), можно во многих случаях легче находить ее уравнение. Прямая Тольятти не существует, если линейные множители θ_l бинарной формы φ_n не все различны между собой. Применяя геометрическую интерпретацию прямой Тольятти к гессианам, автор устанавливает форму

$$\psi_n' - z\varphi_{n-1}' = 0 \qquad (8)$$

для гессиана кривой (1) и рассматривает квартику с тройной точкой, каноническое уравнение которой $ax^4 + b(4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) + cy^4 = 12xyz(x+y)$, (9) где a, b, c — постоянные, для которых $ac(a+c-2b) \neq 0$. Среди главных прямых указанного Г. Т. Георгиу пучка с центром в точке, лежащей на прямой Тольятти, квартики и уравнение которого

$$(2b-a)x + (2b-c)y = 3(v+2)z, \qquad (10)$$

имеется прямая Тольятти гессиана данной квартики, соответствующая значению $-3/2$ параметра λ. Автор находит еще одну главную прямую пучка, получаемую из (10) при значении $\lambda = -43/20$ и являющуюся прямой Тольятти второго гессиана квартики $ax^4 + b(4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) + cy^4 = 12xyz(x+y)$. Г. И. Глейзер

12001. Свойства комплекса Гессе в связи с квадриками, коническими сечениями и пространственной кубической кривой. Садлер, Андресс (Properties concerning the hessian complex in relation to quadrics, conics, and a twisted cubic. Saddler W., Andress W. R.), Trans. Roy. Soc. N. Z., 1958, 85, № 4, 473—481 (англ.)

Линейный комплекс прямых H (комплекс Гессе) определяется при помощи трех образующих A, B, C одной демиквадрики Q_1 (трех образующих одной серии гиперболоида Q). Устанавливается, что этому комплексу принадлежат все прямые второй демиквадрики Q_2 квадрики Q и две мнимые прямые из Q_1, являющиеся двойными в циклическом соответствии периода три в Q_1. Отсюда получаются гармонические и другие свойства комплекса H. Например, выясняется, что прямые A', B', C', полярные прямым A, B, C относительно H, определяют этот же комплекс. Исследуются геометрические интерпретации инвариантов, составленных из координат прямых A, B, C и ковариантов бинарных кубических форм, порождаемых циклическим соответствием прямых в Q_1. Далее рассматривается линейный комплекс, определяемый тремя касательными к пространственной кривой третьего порядка. Выясняются взаимные свойства возникающих образов: квадрики, комплекса, нуль-системы, кривых второго и третьего порядка. Исследование ведется аналитически. О. А. Котий

12002. Многообразие, определенное упорядоченной парой гиперповерхностей комплексного пространства S_r. Спампинато (Varietà determinata da una coppia ordinata di ipersuperficie dell'S_r complesso. Spampinato Nicolo. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1954 (1953), 20, 58—65) (итал.)

В проективном пространстве S_{2r+1} заданы два независимых пространства S_r' и S_r''; пусть координаты точки S_{2r+1} будут $x_1, y_1, \ldots x_{r+1}, y_{r+1}$ и вершины координаты симплекса с четными и нечетными номерами принадлежат соответственно S_r' или S_r''. Рассматриваются гиперповерхности V_{2r}^n и W_{2r}^n, заданные следующими уравнениями: $f(x_1,\ldots,x_{r+1})=0$, $g(x_1,\ldots,x_{r+1}) + \sum y_i(\partial f/\partial x_i) = 0$, где f, g — две формы степени n. V_{2r}^n — конус с вершиной S_r'', проектирующий многообразие V_{r-1}^n, заданное в S_r' уравнением $f=0$. W_{2r}^n проходит через S_r'' с кратностью $n-1$ и состоит из ∞^r образующих пространств S_r, каждое из которых пересекает S_r'' по S_{r-1}. Автор ставит задачу изучения многообразия $V_{2r-1}^{n^2}$ пересечения V_{2r}^n и W_{2r}^n; оно всегда состоит из ∞^{r-1} образующих пространств S_r многообразия W; в простом случае, когда форма g тождественно равна нулю, можно получить это многообразие пересечения, соединяя каждую точку p' многообразия $V_{r-1}'^n$ с пространством S_{r-1}, касательным к многообразию $V_{r-1}''^n$ пространства S_r'', полученному из $V_{r-1}'^n$ преобразованием $\rho y_i = x_i$, в точке p'', соответствующей p' при этом же преобразовании. Автор приводит также другие свойства особых точек $V_{r-1}'^n$ для случая, когда гиперповерхности $f=0$ и $g=0$ совпадают, и дает параметрические уравнения для пересечения VW. Эта пара многообразий, вместе с их пересечением, встречается в комплексном представлении алгебраической гиперповерхности бидуального проективного пространства S_r; это изложение не зависимо от теории алгебр. E. Togliatti

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 614.

12003. Действительная общая кубическая поверхность. Галафасси (La superficie cubica generale reale. Galafassi Vittorio Emanuele), Period. mat., 1958, 36, № 1, 1—18 (итал.)

Статья по инициативе Кизини (O. Chisini) присоединяется к его собственным двум работам (РЖМат, 1959, 794), рассматривавшим кубическую поверхность в комплексном поле. Цель работы — привлечь внимание к наиболее непосредственным вопросам, возникающим при рассмотрении той же поверхности в действительном поле.

После введения (п. 1) и некоторых общих положений (п. 2) о расположении 27 прямых, касательных и бикасательных плоскостях и их сечений, методах изображения поверхности на плоскости, автор переходит к вопросам о действительности поверхности. Поверхность, будучи нечетного порядка, всегда имеет действительные точки, образующие ее действительную часть F^*. Так как, по предположению, кратных точек на F нет, то нет и изолированных точек, поэтому точки на F^* образуют одну или несколько непрерывных полостей; если имеются две полости, то они без общих точек. В силу известного различения полостей на четные и нечетные (по числу точек пересечения с произвольной действительной прямой) следует, что на F^* имеется одна нечетная полость $\sum$, которая, если она не исчерпывает F^*, сопровождается только одной четной полостью — овалоидом. На F имеется нечетное число действительных прямых из 27 (по крайней мере одна), поэтому остальные распределяются в пары (автор их называет действительными) прямых комплексно-сопряженных компланарных или пары (действительные) комплексно-сопряженных косых. Следовательно, различаются две альтернативы: а) на F существуют пары косых прямых (действительных или комплексно-сопряженных); б) на F не существуют пары косых прямых.

В предположении а) при наличии пары косых прямых поверхность F бирационально изображается на плоскости (простой), причем ее плоские сечения отобразятся в систему ∞^3 кубик, которые проходят через шесть точек B_i, не лежащих на общем коническом сечении. Отсюда получится четыре типа действительных кубических поверхностей, допускающих действительное отображение на плоскости: 1) все шесть точек B_i действительны; поверхность F имеет 27 действительных прямых; 2) четыре точки B_i действительные, две комп

лексно-сопряженные, F имеет 15 действительных прямых; 3) две точки B_i — действительные, остальные попарно мнимые-сопряженные, тогда F имеет 7 действительных прямых; 4) все точки B_i — мнимые, попарно сопряженные, тогда F имеет 3 действительных прямых. Для каждого из этих типов с помощью указанного представления поверхности следовало бы выяснить другие вопросы действительности: относительно плоскостей дважды или трижды касательных, инциденции прямых и т. д., но автор останавливается на характеристике действительной части F^* с точки зрения топологии действительного объемлющего пространства.

Если поверхность покрыта сеткой, состоящей из α_0 точек, α_1 сегментов, и тем самым разделяется на α_2 односвязных областей, то порядок связности Z определяется по формуле Эйлера — Пуанкаре в виде $Z=-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2+2$; он не зависит от способа построения сетки и является инвариантом гомеоморфизма. Четные полости разделяют на два вида: первого или второго соответственно тому, содержит ли полость или не содержит нечетные замкнутые контуры. Каждый из четырех, указанных выше типов кубической поверхности, имеет действительную часть в виде одной полости Σ. Пусть Ω будет соответствие между действительными точками F и преобразующей ее плоскости π, т. е. между Σ и π^*. Для типа 4 соответствие будет гомеоморфизмом, поэтому для Σ получим $Z=1$. Для трех других типов Ω вообще взаимно однозначно, но будут исключения для ν действительных точек B_i на π^*, которым соответствуют на Σ прямые b_i. Вводя подходящую сеть на π^*, мы наведем деление на Σ и сможем подсчитать $Z=\nu+1$. Таким образом для указанных типов мы имеем соответственные порядки связности $Z=7$, $Z=5$, $Z=3$, $Z=1$, откуда следует (по нечетности Z) во всех случаях неориентируемость поверхности.

В предположении б) к прежним типам прибавляется тип 5. Кубическая поверхность, не представимая действительным образом на плоскости; она имеет две полости: одну нечетную, содержащую три действительных прямых и четную в виде овалоида; первая гомеоморфна проективной плоскости, вторая — сфере. Для этого последнего типа при решении остальных вопросов вместо сложных прямых методов более эффективно использование представления поверхности на двойной плоскости π (возможное и для других типов) с кривой дирамации Γ в виде плоской квартики (след конуса, описанного около поверхности с вершиной O в ее действительной точке). В конце статьи приводятся некоторые заключения о свойствах F^* в зависимости от свойств заданной Γ или Γ^* в двойной плоскости изображения F.

С. С. Бюшгенс

12004. Вещественные сингулярные поверхности третьего порядка. Андреатта (Le superficie cubiche singolari reali. Andreatta Antonio), Period. mat., 1959, 37, № 2, 86—100 (итал.)

Продолжение работ: РЖМат, 1959, 794 и реф. 12003. Рассматриваются вещественные сингулярные поверхности третьего порядка (исключая распадающиеся поверхности и конусы). Для линейчатых поверхностей дается полная проективная классификация и исследуется топологическая структура; применительно к поверхностям с конечным числом двойных точек высказываются некоторые соображения об их структуре.

В. В. Морозов

12005. Замечания о поверхностях рода нуль, обладающих неприводимой сеткой биканонических кривых. Годо (Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques. Godeaux Lucien), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belg., I—1959, 45, № 2, 59—68; II—1959, 45, № 2, 59—68; III—1959,45, № 3, 188—196 (франц.)

В итоге исследований устанавливается, что рассматриваемые поверхности принадлежат к одной из следующих категорий: 1) Поверхность содержит семь кривых $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ рода 3 и второй степени, попарно пересекающихся в двух точках. Кривые $2\Gamma, \Gamma_1+\Gamma_2, \Gamma_3+\Gamma_4, \Gamma_5+\Gamma_6$ являются биканоническими, $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_5$, $\Gamma_2+\Gamma_4+\Gamma_6$, $\Gamma+\Gamma'$ (Γ' сопряжены с Γ) — триканоническими и кривые $2\Gamma'$ — тетраканоническими. 2) Поверхность содержит три кривых $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ рода 3 и второй степени, попарно пересекающихся в двух точках. Кривые 2Γ, $\Gamma_1+\Gamma_2$ — биканонические, $\Gamma+2\Gamma_1$, $\Gamma+2\Gamma_2$, $\Gamma+\Gamma'$ — триканонические и $2\Gamma'$ — тетраканонические. 3) Поверхность содержит кривую Γ рода 3 и второй степени такую, что 2Γ является биканонической, $\Gamma+\Gamma'$ — триканоническими и $2\Gamma'$ — тетраканоническими кривыми. Пример поверхности первой категории как образа циклической инволюции 8-го порядка без кратных точек был сконструирован автором в предшествующей работе (Bull. Acad. roy. Belgique, 1949, 688—693). Преобразования этой поверхности дают примеры поверхностей второй и третьей котегории.

А. Г. Школьник

12006. Некоторые замечания об иррегулярности двойной гиперплоскости. Галларати (Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio. Gallarati Dionisio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 24, № 2, 139—142 (итал.)

Пусть S_3 — трехмерная двойная гиперплоскость, q_2, q_3 — ее поверхностная и трехмерная иррегулярности соответственно. Автор показывает, что $q_2+q_3=0$. Это следует из двух фактов. Прежде всего, $q_2=\mu-1$, где μ — число компонент поверхности ветвления многообразия S_3, причем все компоненты принадлежат к одному и тому же пучку и поэтому имеют один и тот же порядок ν. С другой стороны, $q_3=P_g-P_a$, а прямой подсчет с помощью классических формул М. Нётера дает $P_a=\mu\binom{\nu-1}{3}+\mu-1$, $P_g=\mu\binom{\nu-1}{3}$; это доказывает теорему. Из нее без труда получается, что двумерных дифференциалов первого рода на многообразии S_3 не существует, а отношение любых двух одномерных дифференциалов первого рода является рациональной функцией. При $\mu\geqslant 2$ многообразие S_3 содержит иррациональный пучок поверхностей.

Ю. И. Манин

12007. О полостях Альфана. Спампинато (Sulle falde di Halphen. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1955, 4, 191-206 (итал.)

12008. Поверхность, аппроксимирующая полость Альфана в окрестности n-го порядка ее начальной точки. Спампинато (La superficie approssimante una falda di Halphen nell' intorno dell'n-mo ordine del suo punto origine. Spampinato Nicolò), Ricerche mat., 1956, 5, № 2, 226—238 (итал.)

Статья является продолжением предыдущей работы автора (реф. 12007) с сохранением последовательности нумерации параграфов и формул. Основной результат дается теоремой: Первым двумерным приближением порядка n полости Альфана является конус V_2^n, проектирующий из точки K $(k, 1, 0, 0)$ кривую d^n, приближения степени n для ветви

$$x_1=\rho,\quad x_2=a(\rho),\quad x_3=b(\rho),\quad x_4=1 \qquad (1)$$

начальной линии полости; линия d^n определяется системой $x_1=\rho$, $x_2=a_2\rho^2+\ldots+a_n\rho^n$, $x_3=b_2\rho^2+\ldots+b_n\rho^n$, $x_4=1$, а конус V_2^n — системой $x_1=\rho\eta^{n-2}+k\mu\eta^{n-1}$, $x_2=(a_2\rho^2\eta^{n-2}+\ldots+a_n\rho^n)+\mu\eta^{n-1}$, $x_3=b_2\rho^2\eta^{n-2}+\ldots+b_n\rho^n$, $x_4=\eta^n$; при $\eta=1$ из последней системы получаются уравнения бирационального преобразования конуса на плоскость $S_2(\rho, \mu)$. Кривая d^n соответствует прямой $\mu=0$.

В конце статьи автор показывает, что приближения степени $n+v$ (n — порядок, v — класс) полости Альфана образовано семейством ∞^1 плоских образующих порядка $n'+v'=(n+v)/q$, где q — общий наибольший делитель чисел n и v. Они расположены в пучке плоскостей с осью A_2A_3 и имеют направляющей d^{n+v}, приближение степени $n+v$ ветви (1), начальной линии полости с кратностью $n'=n/q$; кроме того, направляющей является прямая A_2A_3 с кратностью $v'=v/q$. В опорных точках R и T пересечения образующей с направляющей d^{n+v} и с прямой A_2A_3 она имеет единственную касательную с порядком касания $n'+v'$, соответственно в виде прямой RT и прямой $TA_2=A_2A_3$.

М. П. Черняев

12009. О многообразии V_8 в S_{11}, определенном по полости Альфана для полной поверхности. Спампинато (Sulle V_8 di S_{11} determinate da una falda di Halphen di una superficie completa. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1957, **6**, № 1, 67—95 (итал.)

Статья является продолжением и специализацией для $n=2$, $v=1$ двух предыдущих статей автора (реф. 12007, 12008). Автор называет поверхность полной, когда она рассматривается как совокупность пар точка — касательная плоскость; он считает необходимым изучать как плоскости, касательные к полости Альфана и бесконечно близкие к ее касательной плоскости в начальной точке, так и многообразие V_8 в S_{11}, которое дает комплексное изображение поверхностей, аппроксимирующих полость вблизи ее начальной точки. Первоначально он исходит из параметрических уравнений Альфана для полости порядка $n=2$ класса $v=1$ и преобразует эти уравнения в тридуальное поле с помощью ранее полученных им формул: $x_j=f_j(\rho,\sigma)$, $y_j=h_1f_j(\rho,\sigma)+\frac{\partial f_j}{\partial\rho}\rho_1+\frac{\partial f_j}{\partial\sigma}\sigma_1$, $z_j=h_2f_j(\rho,\sigma)+\frac{\partial f_j}{\partial\rho}\rho_2+\frac{\partial f_j}{\partial\sigma}\sigma_2$; ($j=1,2,3,4$), тогда получается система 12 параметрических уравнений многообразия V_8 в пространстве $S_{11}(x_j, y_j, z_j)$ которые и кладутся в основу дальнейшего исследования. В уравнения (V_8) параметры $h_1, h_2, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ входят линейно, поэтому V_8 составлено из ∞^2 многообразий S_6, соответствующих ∞^2 точек полости. $S_3(x_j)$, определяемое уравнениями $y_j=z_j=0$, предполагается пространством, охватывающим полость Альфана; в таком случае начальная точка V_8, для которой все координаты нули, кроме $x_4=1$, совпадает с начальной точкой полости. Когда в $S_3(x_j)$ берется точка A с координатами $x_j=a_j$, то через A' и A'' обозначаются точки в $S_3'(y_j)$ и $S_3''(z_j)$ с координатами $y_j=a_j$ и $z_j=a_j$, т. е. гомологичные A в проективитете между S_3, S_3', S_3''. Отсюда получается, что V_8 имеет второе начало в $S_5=A_4A_1A_4'A_1'A_4''A_1''$ многообразия $\bar{W}_9^5$, определяемом вторым началом полости $(\rho, 0, 0, 1)$, т. е. прямою A_4A_1, задаваемой уравнениями $x_1=\rho$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=1$. Далее показывается, что квадратичный полный конус, аппроксимирующий полость Альфана до 2-го порядка в начальной точке, в S_{11} изображается многообразием V_8^6; изучается структура последнего и ее отображение на полость.

Переходя к приведенной 3-го порядка полости и ее тридуального изображения, автор получает поверхность V_2^9, оскулирующую полость Альфана в начальной точке; на этой поверхности имеется система кубик, между которыми находится одна, оскулирующая в точке A_4 ветвь полости с касательной A_4A_1 (вторичного начала полости). На поверхности V_2^9 имеется двойная кубика и шестикратная точка A_3, кроме того, эта поверхность допускает бирациональное преобразование на плоскость. В последней части статьи в том же порядке построений полость Альфана порядка $n>2$ и класса $v=1$ преобразуется в полость восьми измерений пространства S_{11} и ведется их аналогичное исследование.

С. С. Бюшгенс

12010. О поверхности порядка $(n+v)^2$, оскулирующей в начальной точке полость Альфана, порядка n и класса v. Спампинато (Sulla superficie di ordine $(n+v)^2$ che oscula nel punto origine una falda di Halphen di ordine n e classe v. Spampinato Nicolò), Ricerche mat., 1957, **6**, № 2, 195—204 (итал.)

Изучается поверхность порядка $(n+v)^2$, оскулирующая в начальной точке полость Альфана порядка n и класса v; такая поверхность оказывается имеющей линейный пучок плоских рациональных кривых автодуальных, порядка и класса, равных $n+v$. Такие кривые имеют две кратные точки, из которых одна неподвижна, другая переменная, описывающая n-кратную для поверхности кривую, оскулирующую порядка $n+v$ в начальной точке полости ее начальную линию. Указанная поверхность, кроме отмеченной n-кратной кривой, содержит кратную прямую, представляющую собой ось пучка плоскостей, содержащих кривые линейного пучка. Статья является продолжением трех предыдущих работ автора (реф. 12007, 12008, 12009), сохраняет их обозначения и продолжает нумерацию параграфов. Сначала автор строит уравнение поверхности V_2 порядка $(n+1)^2$, которая оскулирует в начальной точке полость Альфана порядка n и класса 1; эта поверхность в A_3 имеет точку кратности $(n+1)^2-n$ с касательным конусом, вырождающимся в (кратную) плоскость $A_3A_2A_1$, она содержит также прямую A_2A_3 с кратностью $(n+1)^2-(n+1)$. Переменная плоскость пучка с осью A_2A_3, кроме A_2A_3, пересекает V_2 по одной из ∞' кривых $C^{n+1}(\rho')$, каждая из которых пересекает A_2A_3 в одной точке A_3 с кратностью $n+1$. Эти кривые $C^{n+1}(\rho')$ рациональны, автодуальны и имеют одну n-кратную точку R'; n касательных в R' совпадают в прямую $R'T'$, где T' — точка прямой A_2A_3 с координатами $(0, 1, c_1, \rho', 0)$; если $c_1=0$, то T' совпадает с A_2. Затем составляется уравнение V_2 для случая, когда полость Альфана имеет порядок n и класс v, взаимно простые между собой. Эта поверхность порядка $(n+v)^2$ имеет прямую A_2A_3 кратности $(n+v)^2-(n+v)$. Исследуется также линейный пучок сечений ($C^{n+v}(\rho')$) плоскостями через кратную прямую A_2A_3, они также рациональны и автодуальны, имеют n-кратную точку R', обладающую аналогичными свойствами, как и в случае $v=1$.

С. С. Бюшгенс

12011. О полости Альфана порядка n и класса v с плоской кривой, оскулирующей начальную ее линию. Спампинато (Sulle falde di Halphen, di ordine n e classe v, a curva osculatrice alla ligne-origine piana. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1958, **7**, № 2, 254—264 (итал.)

Продолжение четырех предшествующих работ автора (реф. 12007, 12008, 12009, 12010). В данной статье автор изучает, как он называет, минимальный и квазиминимальный случай полости Альфана порядка n и класса 1. Минимальным случаем он обозначает тип, когда уравнения приведенной порядка $n+1$ приводятся в параметрическом виде к частной форме $x_1=\rho$, $x_2=\rho^{n+1}+\sigma^n$, $x_3=\sigma^{n+1}$, $x_4=1$ или в однородных координатах к форме $F(x_j)\equiv x_3^nx_4^{n^2+n+1}-(x_2x_4^n-x_1^{n+1})^{n+1}=0$. В этом случае $F(x_j)=0$ изображает поверхность, оскулирующую полость Альфана, порядка и класса, равного $(n+1)^2$. Для полости Альфана порядка n и класса $v>1$, взаимно простого с n, автор называет случай квазиминимальным, когда параметрические уравнения приведенной порядка $n+v$ приводятся к виду $x_1=\rho$, $x_2=\rho^{n+v}+\sigma^n$, $x_3=\sigma^{n+v}$, $x_4=1$ или в однородных координатах к виду: $F(x_j)=x_3^nx_4^{(n+v)^2-n}-(x_2x_4^{n+v-1}-$

$-x_1^{n+v})^{n+v}=0$. Здесь определяется огибающая W_2 касательных плоскостей поверхности V_2; в частном случае при $n=3$, $v=2$ поверхность V_2 получается порядка и класса, равного 25. В обоих случаях, как минимальном, так и квазиминимальном, поверхность V_2 имеет n-кратную кривую d^{n+v}, которая оказывается плоской. Даются и другие геометрические свойства V_2 и d^{n+v}. В заключительной части статьи ставится общий вопрос, когда для полости Альфана порядка n и класса v, имеющей приведенную порядка $n+v$ $x_1=\rho$, $x_2=A(\rho)+\sigma^n$, $x_3=B(\rho)+C(\rho)\sigma^n+d_0\sigma^{n+v}$, $x_4=1$ и кривую d^{n+v}, определяемую уравнениями $x_1=\rho$, $x_2=A(\rho)$, $x_3=B(\rho)$, $x_4=1$, где $A(\rho)=a_2\rho^2+\ldots+a_{n+v}\rho^{n+v}$, $B(\rho)=b_2\rho^2+\ldots+b_{n+v}\rho^{n+v}$, $C(\rho)=c_1\rho+c_2\rho^2+\ldots+c^v\rho^v$, последняя будет плоской.

Ранее было показано, что d^{n+v} проходит через точку A_4 (начало полости) и в этой точке имеет касательную A_4A_1, поэтому плоскость, содержащая d^{n+v}, будет вида $\lambda x_2+\mu x_3=0$. Отсюда получается, что d^{n+v} будет плоской только в том случае, когда существуют два числа λ и μ, обращающие равенство $\lambda A(\rho)+\mu B(\rho)=0$ в тождество относительно ρ, что дает только три возможных случая: 1) $A\equiv 0$ или 2) $B\equiv 0$ или 3) $B(\rho)\equiv hA(\rho)$ при $h\neq 0$.

С. С. Бюшгенс

12012. Об иррегулярности алгебраических многообразий. Северн (Sulle irregolarità delle varietà algebriche. Severi Francesco), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **27**, № 1-2, 3—13 (итал.)

Пусть V_d — неприводимая форма размерности $d>1$ в проективном пространстве S_{d+1} над полем комплексных чисел; q_i, $1\leqslant i\leqslant d$, — иррегулярности многообразия V_d; K — канонический дивизор; E — общее гиперплоское сечение V_d. В работе доказаны следующие основные результаты:

1. $q_{d-1}+q_d=\sup|K+E|+\operatorname{def}|E\cdot(K+E)|=i_{d-1}$, где i_{d-1} — число линейно независимых $(d-1)$-кратных интегралов первого рода на V_d.

2. Если гиперповерхность $A\subset V_d$ топологически общая и $q_{d-1}(A)=q_{d-1}$, то присоединенная система $|A'|$ регулярна. Если снять требование общности, то избыточность системы $|A'|$ равна размерности пространства $(d-1)$-кратных интегралов первого рода, обращающихся в нуль на A.

Ю. И. Манин

12013. Геометрическая структура кольца когомологий в абстрактной алгебраической геометрии. Мацумура (Geometric structure of the cohomology rings in abstract algebraic geometry. Matsumura Hideyuki), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1959, A-Math., **32**, № 1, 33—84 (англ.)

Изучается кольцо когомологий неособенного алгебраического многообразия в его геометрических аспектах. Обозначения: V — абстрактное нормальное многообразие (м.) над алгебраически замкнутым полем k, Ω^p — связка источников дифференциальных форм степени p и не имеющих полюсов на V, если D — дивизор, то $\Omega^p(D)$ — связка источников таких p-форм ω, что локально $(\omega)\geqslant -D$, $H^{p,q}=H^q(V,\Omega^p)$, размерность $H^{p,q}$, как модуля над k обозначается через $h^{p,q}(V)$, элементы $H^{p,q}$ называются классами типа (p,q), $H^*(V)=\sum H^{p,q}$ — кольцо (относительно чашечного умножения) когомологий м. V. Для локально замкнутого подмножества W м. V (подчиненного еще некоторым условиям) определяется отображение $\mathrm{tr}_W: H^*(V)\to H^*(W)$; кроме того, каждое всюду регулярное рациональное отображение T нормального м. V' в неособенное м. V индуцирует отображение $T^*: H^*(V)\to H^*(V')$; оба эти отображения являются кольцевыми гомоморфизмами, свойства их подробно изучаются. Если V неособенное, то дивизор D на нем определяет класс $c(D)$ типа $(1,1)$, зависящий только от класса D относительно линейной эквивалентности, аналогично, если V, кроме того, проективно, то каждой точке его P сопоставляется класс $c_V=c(P)$ типа (v,v) $(v=\dim V)$, не зависящий от выбора P на V, наконец, в тех же условиях, если W — неособенное подмногообразие в V коразмерности w', то ему сопоставляется класс $c(W)$ типа (w',w'). Изучаются свойства этих классов, в частности показывается, что при $\alpha\in H^{v-1,v-1}(V)$, $c(D)\alpha=\delta(\mathrm{tr}_D(\alpha))$, где δ — отображение в последовательности когомологий $\ldots\to H^{v-1,v-1}(D)\xrightarrow{\delta}\to H^{v,v}(V)\to H^v(V,\Omega^v(D))\to 0$, изучаются условия, при которых $c(D)=0$, показывается, что если $[V':V]=n<\infty$, то $T^*(c_V)=n\cdot c_{V'}$, и что $c(W)\alpha=\delta_{V,W}(\mathrm{tr}_W(\alpha))$, где α — класс когомологий для V типа (w,w), и т. д. Дается ряд приложений: к проективным пространствам, проективным пучкам и бирациональным преобразованиям. Отметим некоторые из приложений последнего типа. Если T регулярно, V' несингулярное и полное над V относительно T и $h^{1,1}(V)$ конечно, то $h^{1,1}(V')>h^{1,1}(V)$ (откуда вытекает существование относительно минимальных моделей Зариского). Если V и V' — оба нормальные проективные и V несингулярно, а T бирационально и регулярно на V', то $T^*: H^*(V)\to H^*(V')$ инъективно, откуда $h^{p,q}(V)\leqslant h^{p,q}(V')$. Последний результат уточняется в конце работы, где изучаются неособенные моноидальные преобразования (дилатации) с центром W и, в частности, показывается, что если $T^{-1}: V\to V^1$ — преобразование такого типа, $w'=\operatorname{codim}W$ и $T^*: H^*(V)\to H^*(V')$ инъективно, то $h^{p,q}(V')=h^{p,q}(V)+\sum_1^{w'-1}h^{p-i,q-i}(W)$; отсюда для этого случая $h^{0,q}(V')=h^{0,q}(V)$ — обобщение одного из основных результатов Мюли — Зариского относительно инвариантности арифметического жанра. Указывается, что, как стало известно автору, аналогичные результаты получены Гротендиком, Вашнитцером и др.

В. В. Морозов

12014. О теории преобразований эллиптических функций. Игуса (On the transformation theory of elliptic functions. Igusa Jun-ichi), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 2, 436—452 (англ.)

Теория преобразований эллиптических функций рассматривается в геометрическом (кронекеровском) аспекте, как теория изогений эллиптических кривых (абелевых многообразий размерности 1) над полем K характеристики $\neq 2$. Выбрав на эллиптической кривой A одну из примитивных точек четвертого порядка r, автор строит на A нечетную функцию $x(u)$, удовлетворяющую соотношению $x(u+r)=x(u)^{-1}$ и еще некоторым другим условиям. Тогда, если $\rho=\sum x^2(s)/8$, где суммирование проводится по восьми точкам четвертого порядка s, для которых $2s\neq 2r$, то $\Pi(x(s)-X)=(1-2\rho X^2+X^4)^2$; так получается квартика Якоби $Y^2=1-2\rho X^2+X^4$, соответствующая модулю ρ; изучаются ее свойства. Гомоморфизм нечетной степени m из A в другую эллиптическую кривую A' индуцирует преобразование модуля $\rho\to\rho'$ и соответствующих квартик Якоби $(x,y)\to(x',y')$ вида $x'=x^mF(x^{-1})F(x)^{-1}$, $y'=G(x)F(x)^{-2}y$, где $F(X)$, $G(X)$ — соответственным образом нормированные полиномы; обобщая терминологию Кронекера, автор называет их полиномами преобразования (в частном случае преобразования n многообразия A в себя, где n — нечетное, $m=n^2$ и $\rho=\rho'$ — полиномы эти получают название мультипликаторных). Изучаются их свойства, в частности разложение на линейные множители и вопросы области определения их коэффициентов. Пусть затем n — нечетное, не деляще-

еся на характеристику поля K, p — трансцендентно над содержащимся в K простым полем Q и Z — простая область целостности в Q, тогда полином $\Phi_n(X) = \Pi(X - x(a))$ (произведение по всем примитивным a) оказывается возможным представить в виде $\Phi_n(X, 8\rho)$, причем $\Phi_n(X, Y) \subset Z[X, Y]$. Уравнение $\Phi_n(X, Y) = 0$ называется n-м делительным уравнением. Из него выводятся два других, важных в теории уравнения: n-е модулярное и n-е мультипликаторное; показывается их абсолютная неприводимость. В заключение выводится одна теорема о строении $F(X)$ для случая $m = p$ (простому числу, отличному от характеристики поля K), следствием которой является известное сравнение Кронекера. Первый нетривиальный случай ($p = 5$) этов теоремы упоминался Кронекером; автор указывает некоторые неточности в его формулах. В. В. Морозой

12015. О полных шапках и овалоидах в трехмерном пространстве Галуа характеристики два. Сегре (On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two. Segre B.), Acta arithm., 1959, 5, № 3, 315—332 (англ.)

Автор решает ряд вопросов геометрии проективного r-мерного пространства $S_{r,q}$ над полем Галуа порядка $q = 2^h$, где h — положительное целое число, а характеристика поля равна 2. Множество K различных точек из $S_{r,q}$, никакие три из которых не лежат на одной прямой, обозначим $K_{r,q}$ и назовем K — дугой, если $r = 2$, и K — шапкой, если $r \geqslant 3$; $K_{r,q}$ назовем полным, если оно не является подмножеством $(K+1)_{r,q}$. Для заданных r и q $K_{r,q}$, имеющее максимальное K, называется овалом, если $r = 2$, и овалоидом, если $r \geqslant 3$. Пространство $S_{r,q}$ содержит $1 + q + q^2 + \ldots + q^r$ точек. Овал в $S_{r,q}$ ($q = 2^h$) содержит, в отличие от случая нечетного q, $q + 2$ точки. Его можно получить присоединением к неприводимой конике ядра этой коники, т. е. точки пересечения касательных рассматриваемой коники, за исключением некоторых малых значений h, когда этот способ неприменим. В $S_{3,q}$ при $q = 2$ овалоид содержит 8 точек, а для $q > 2$ (т. е. $h > 1$) q^2+1 точку. Пусть K — произвольный овалоид в $S_{3,q}$. В каждой точке P овалоида K существует $q+1$ касательная к нему прямая. Этот пучок прямых образует касательную плоскость к K в точке P. Если плоскость π в $S_{3,q}$ не касается K, то она пересекает K по $(q+1)$-дуге. Пусть $q = 2^h \geqslant 4$ и π — некоторая плоскость в $S_{3,q}$. Если π касается K, то поставим ей в соответствие точку касания P. Если π пересекает K, то ей в соответствие ставим ту точку P, которая дополняет получившуюся в сечении $(q+1)$-дугу до овала. Определенную таким образом точку P назовем полюсом плоскости π относительно K. Доказывается

Теорема 1. Соответствие, ставящее каждой плоскости из $S_{3,q}$ ее полюс по отношению к овалоиду K, есть всегда нулевой поляритет. Линейный комплекс прямых из $S_{3,q}$, которые переходят в себя при этом поляритете, состоит только из прямых, касательных к K. Поляритет переводит каждую хорду овалоида K во внешнюю к K прямую, и обратно.

Из теоремы 1 вытекает, что у всякого овалоида одно и то же число хорд и внешних прямых. Автор также доказывает, что при $q = 2^h \geqslant 8$ может существовать овалоид в $S_{3,q}$, не являющийся квадрикой, и строит пример такого овалоида для $q = 8$. Автор также исследует плоские сечения овалоида в $S_{3,q}$ и строит полную $(2q+4)_{3,q}$ для $q = 4$ и полную $(3q+2)_{3,q}$ для произвольного $q = 2^h$. А. Л. Вернер

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

12016. О проективном изгибании тройной ткани плоских кривых. Ваона (Sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di curve piane. Vaona Guido), Ann. mat. pura ed appl., 1958, 46, 43—69 (итал.)

При дифференцируемом преобразовании плоской области имеем, в общем случае, в каждой точке области три характеристических направления, в которых рассматриваемое преобразование сохраняет перегиб. Эти направления являются неопределенными (в общей точке области) только в случае коллинеации и могут (совсем или частично) совпадать. Если они не совпадают, то линии, все касательные которых являются характеристическими, образуют тройную ткань (3—Gewebe, 3—web), называемую характеристической тройной тканью рассматриваемого преобразования. Наоборот, если задана в плоскости тройная ткань Δ, то под ее проективным изгибанием мы понимаем такое преобразование области, при котором Δ является характеристической тройной тканью. При этом мы отождествляем преобразования, возникшие одно из другого путем коллинеации, а проективное изгибание исследуем только локально. В общем случае тройная ткань проективно не изгибаема. Каждая тройная ткань, состоящая из прямых, служащих касательными к (приводимой или неприводимой) алгебраической кривой третьего класса, проективно изгибаема ∞^4 способами. Любая иная тройная ткань изгибаема не более чем ∞^2 способами. Тройную ткань с ∞^2 проективными изгибаниями получим, исходя из поверхности типа, названного Б. Сегре (Segre B., Mem. Reale Acad. Italia, 1931, 11, № 3, 1—143) типом Σ. На поверхности типа Σ существует сеть R, образованная линиями, в которых поверхность Σ пересечена плоскостями, проходящими через фиксированную прямую r, и линиями, вдоль которых Σ касается конусов с вершиной на R. Выбрав на прямой r точку O и проектируя из центра O как плоскости, проходящие через прямую r, так и все асимптотические линии поверхности Σ, получим тройную ткань с ∞^2 проективными изгибаниями, которые можно конструктивным путем получить из известных проективных изгибаний поверхности Σ. Каждая тройная ткань с ∞^2 проективными изгибаниями представляет собой или тройную ткань только что описанного типа или его проективное изгибание. Автор приводит еще простые формулы для самого общего типа — тройную ткань с двумя различными системами ∞^2 проективных изгибаний и дает также полное геометрическое описание таких тройных тканей. Ě. Čech

12017. Основные уравнения теории поверхностей. II. Шеррер (Die Grundgleichungen der Flächentheorie. II. Scherrer W.), Comment. math. helv., 1957, 32, № 1, 73—84 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 6097.

Поверхность трехмерного евклидова пространства может определяться заданием своего линейного элемента, средней кривизны H и угла ω между биссектрисой координатной сети и одним из главных направлений. При этом имеют место уравнения:

$$\omega_u = p_{11}\cos\omega + p_{12}\sin\omega + p_1,$$

$$\omega_v = p_{21}\cos\omega + p_{22}\sin\omega + p_2$$

и их условия интегрируемости, коэффициенты которых зависят только от линейного элемента, средней кривизны с ее производными до первого или второго порядка соответственно. Если условия интегрируемости выполняются тождественно, то поверхность называется интегрируемой и допускает непрерывное изгибание с

сохранением средней кривизны. Неинтегрируемая поверхность определяется заданием своего линейного элемента и средней кривизны. А. П. Норден

12018. О некоторых формулах теории поверхностей. Кокинэ (Asupra unor formule din teoria suprafetelor. Cochină A.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A8**, № 11, 570—574 (рум.)

12019. О существовании поверхностей. Чжоу Му-си (Chow M. C.), Шусюэ цзиньчжань, 1956, **2**, № 4, 690—694 (кит.)

Рассматривается теорема Боннэ о существовании поверхности с заданными квадратичными формами для поверхности, отнесенной к линиям кривизны.

12020. Характеристическое свойство пучков сферических или плоских поверхностей. Вантруа (Une propriété caractéristique des faisceaux de surfaces sphériques ou planes. Vantroys Lucien), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 1, 45—48 (франц.)

Доказывается следующее: Если дано однопараметрическое семейство поверхностей и рассматривается соответствие поверхностей, определяемое ортогональными траекториями этого семейства, то оно является конформным соответствием тогда и только тогда, когда поверхности суть плоскости или сферы. O. Varga

12021. Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей. Сунь Хэ-шэн, Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 4, 559—561

Формулируются некоторые теоремы о жесткости поверхностей S положительной кривизны с краем L, причем на L наложены втулочные связи вида $\mathbf{U}\nu=\gamma$, где ν — нормаль к втулке, $\mathbf{U}$ — вектор бесконечно малого изгибания ($d\mathbf{U}\cdot d\mathbf{r}=0$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор поверхности). Методом И. Н. Векуа эта проблема приводится к краевой задаче с наклонной производной для эллиптической системы первого порядка. Используя известные результаты из теории этой задачи, автор формулирует несколько теорем о жесткости или нежесткости S. Приведем две из них: 1. Пусть $\nu=\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S; тогда при связях $\mathbf{Un}=0$ S будет жесткой только тогда, когда L — окружность и угол θ между главной нормалью m к кривой L и $\mathbf{n}$ постоянен. 2. Если при $\gamma=0$ S неизгибаема, то при неоднородной связи ($\gamma\neq 0$) S допускает нетривиальные изгибания тогда и только тогда, когда γ удовлетворяет l^* интегральным условиям, где: а) $l^*=3m-3$, если $m>1$, $(m+1)$—порядок связности S; б) $l^*=2$, если $m=1$ и $\tau=\frac{\pi}{2}$, где τ — угол между ν и бинормалью к L, и плоскости контуров параллельны; в) $l^*=1$, если $m=0$, $\tau=\frac{\pi}{2}$; если $m=1$ и плоскости контуров не параллельны или если $m=0$, $\tau\neq\frac{\pi}{2}$, то S допускает нетривиальные изгибания при любой правой части $\gamma(t)$. Доказаны также две теоремы относительно замкнутых невыпуклых поверхностей. И. И. Данилюк

12022. Поверхности с одинаковым сферическим изображением. Рембс (Flächen mit demselben sphärischen Bild. Rembs E.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 3, 209—213 (нем.)

Рассматриваются поверхности, между точками которых установлено соответствие при помощи параллельных нормалей (т. е. поверхности, имеющие одинаковое сферическое изображение), гауссовы кривизны которых в соответствующих точках совпадают.

Доказывается, что если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — две такие поверхности, то поверхности $\mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y}_2=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$ соответствуют ортогональности линейных элементов. Эта теорема используется для доказательства однозначной определенности овальных поверхностей и выпуклых поверхностей с заданным краем, их сферическим изображением и гауссовой кривизной. М. А. Акивис

12023. О двумерных многообразиях, множествах максимального типа и продолжении конформных многообразий. Поссель (Sur les variétés à deux dimensions, les ensembles du type maximum et le prolongement des variétés conformes. Possel René de), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 11, 985—987 (франц.)

Автор напоминает следующее, принадлежащее ему определение. Множество Δ точек окружности $|z|=1$, являющееся объединением конечной или бесконечной совокупности ее открытых попарно неналагающихся дуг δ_l, называется множеством максимального типа, если при всяком конформном отображении $w=f(z)$ области $|z|<1$ на область F, внутреннюю по отношению к окружности e, таком, что дуги δ_l переходят в дуги e, F совпадает с внутренностью e. Понятие множества максимального типа переносится на любую замкнутую жорданову кривую. В сообщении формулируются некоторые теоремы о множествах максимального типа и в терминах, связанных с этим понятием, даются условия продолжимости конформного многообразия. В. В. Рыжков

12024 К. Курс инфинитезимальной геометрии. Четвертый выпуск. Кинематика и кинематическая геометрия. Вторая часть: углубленное изучение движения твердого тела. Жюлиа (Cours de géométrie infinitésimale. Quatrième fascicule. Cinématique el géométrie cinématique. 2. partie: Étude approfondie du mouvement d'un corps solide. 2ème ed. Julia Gaston. Paris, Gauthier — Villars, 1955, 88 p., 1600 fr.) (франц.)

Вторая часть четвертого выпуска содержит главы XII, XIII и XIV, посвященные соответственно плоской кинематике, движению твердого тела вокруг неподвижной точки и общему движению твердого тела. В плоской кинематике различаются свойства первого порядка (скорости, траектории) и свойства второго порядка (ускорения, кривизны). Делается ударение на формуле Эйлера-Саввари.

Большое внимание уделено эпициклоидальному движению с приложениями к эпициклоидам и циклоидам. В качестве примера общего движения твердого тела рассматривается движение триэдра Френе пространственной кривой. Имеется большое число задач для упражнений. D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 619.

12025. Основные принципы геометрии Гильберта. (I principi fondamentali della geometria di D. Hilbert), Archimede, 1957, **9**, № 4-5, 181—185 (итал.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

12026. О неголономных механических системах. Телеман (Asupra sistemelor mecanice neolonome. Teleman C.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 13, 45—52 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается следующая теорема: Если в некоторой окрестности R евклидова пространства E_n определяется система S, состоящая из m уравнений Пфаффа класса C^1, не имеющая интегрируемых комбинаций, то во всякой области $\Delta\subset R$ есть подобласть, $\Delta_1\subset\Delta$, любые две точки которой можно соединить линией класса C^1, составленной из конечного числа дуг интегральных кривых системы S. Этот результат, который предвидел Врэчану, представляет собой обобщение результата для частного случая $m=1$, полученного Каратеодори (Carathéodory C., Math. Ann., 1909, **65**, 369). T. Hangan

12027. О теореме существования четырежды ортогональных систем гиперповерхностей четырехмерного евклидова пространства. Чэн Сян-линь (Chen

Hsing-lin), Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 4, 678—689 (кит.)

12028. Об одном обобщении понятия присоединенных минимальных поверхностей О. Бонне. Деланд (Sur une extension des surfaces minimales adjointes d'Ossian Bonnet. Delande Georges), C. r. Acad. sci., 1960, 250, № 1, 49—51 (франц.)

Пусть V_4 — дифференцируемое многообразие, а E_6 и K_5 — соответственно аффинное пространство бивекторов в точке $x \in V_4$ и его подмногообразие простых бивекторов p^{ij}. В расслоенном пространстве (V_4, K_5) с помощью функции Φ, заданной на (V_4, K_5) и удовлетворяющей целому ряду условий, определяются специальные секущие поверхности $p^{ij} = p^{ij}(x)$, которые называются геодезическими бивекториальными полями. Такое поле огибает некоторые поверхности $V_2 \subset V_4$. Если функция Φ явно не зависит от точечных координат элемента „точка-бивектор", то поверхность V_2 является экстремальной поверхностью вариационной проблемы

$$\delta \iint \Phi du dv = 0.$$

В этом случае ей соответствует некоторая поверхность V_2^*, которая называется „присоединенной поверхностью к V_2". Если в V_4 ввести бивекториальную метрику, основанную на понятии площади, принимая за элемент площади $\Phi du dv$, то имеют место все классические свойства присоединенных минимальных поверхностей трехмерного евклидова пространства. В V_4 с помощью Φ вводится еще линейный элемент ds^2. Если этот ds^2 является элементом Минковского, то электромагнетические пространства выделяются условием, чтобы некоторая квадратичная внешняя форма, связанная с бивекториальной метрикой, была гармонической.

Ю. Г. Лумисте

12029. О трехмерных поверхностях с тремя ортогональными семействами асимптотических. Лумисте Ю. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 173—185

В многомерных евклидовом и неевклидовом пространствах S_n рассматриваются трехмерные поверхности V_3, несущие три ортогональные семейства асимптотических линий. Такие поверхности являются минимальными поверхностями (в смысле вариационного определения), но обратное утверждение в общем случае не имеет места. Исследование системы дифференциальных уравнений, определяющей рассматриваемую поверхность V_3, в общем случае наталкивается на большие технические трудности, и проведено до конца лишь в следующих двух случаях: а) когда асимптотическая сеть на поверхности V_3 оказывается голономной; в этом случае поверхность V_3, целиком лежащая в эллиптическом пространстве S_7, описывается произвольной двумерной минимальной поверхностью, принадлежащей S_3, при паратактическом сдвиге, инвариантные прямые которого перпендикулярны этому S_3; б) когда асимптотическая сеть на поверхности V_3 состоит из прямых линий; такие поверхности существуют только в эллиптических пространствах S_4, S_6 и S_7, определяются в них с точностью до движения и являются системами импримитивности некоторых трехпараметрических групп движений. М. А. Акивис

12030. Заметка о теории сопряженных сетей в N-мерном проективном пространстве. Су Бу-цин (A note on the theory of conjugate nets in hyperspace. Su Buchin), Sci. Rec., 1959, 3, № 10, 441—445 (англ.)

Пусть точки y и z описывают фокальные поверхности конгруэнции Γ_{yz} пространства S_N и

$$\ldots, y_n, \ldots, y_1, y, z, z_1, \ldots, z_n, \ldots \quad (1)$$

— порожденная ими последовательность Лапласа. Если x — точка луча yz, описывающая сопряженную сеть, сопряженную конгруэнции Γ_{yz}, то порожденная этой сетью последовательность Лапласа

$$\ldots, x_n, \ldots, x_1, x, x_{-1}, \ldots, x_{-n}, \ldots \quad (2)$$

вписана в последовательность (1). Пусть

$$\ldots, \bar{x}_n, \ldots, \bar{x}_1, \bar{x}, \bar{x}_{-1}, \ldots, \bar{x}_{-n}, \ldots \quad (3)$$

— последовательность Лапласа, аналогичная последовательности (2), но отличная от нее ($x \neq \bar{x}$). Лучи xx_1 и $\bar{x}\bar{x}_1$ пересекаются в точке a, а лучи xx_{-1} и $\bar{x}\bar{x}_{-1}$ — в точке b; вообще лучи $x_n x_{n+1}$ и $\bar{x}_n \bar{x}_{n+1}$ пересекаются в точке a_n, а лучи $x_{-n}x_{-n-1}$ и $\bar{x}_{-n}\bar{x}_{-n-1}$ — в точке b_n. Точки a и b служат фокусами луча ab, а конгруэнция Γ_{ab} гармонична сопряженным сетям $x(u, v)$ и $\bar{x}(u, v)$. Вообще последовательность Лапласа

$$\ldots, a_n, \ldots, a_1, a, b, b_1, \ldots, b_n, \ldots \quad (4)$$

гармонична последовательностям (2) и (3).

Последовательность Годо пространства S_3, порожденная поверхностью S, представляется в S_5 последовательностью Лапласа

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \quad (L)$$

Пусть $\bar{S}$ — одно из преобразований Демулена поверхности S и пусть порождаемая $\bar{S}$ последовательность Годо представляется в S_5 последовательностью Лапласа

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots \quad (\bar{L})$$

Каждый из лучей U_1U_2 и V_1V_2 пересекает луч $\bar{U}\bar{V}$ в точках C и D, которые на гиперквадрике Плюккера Q_4^2 являются образами пар противоположных сторон четырехугольника Демулена, ассоциированного с поверхностью S. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы точки C и D описывали сопряженные сети, сопряженные конгруэнциям $\Gamma_{U_1U_2}$ и $\Gamma_{V_1V_2}$. Доказана основная теорема: Если образ одной стороны четырехугольника Демулена, ассоциированного с поверхностью S в S_3, описывает сопряженную сеть в S_5, которая сопряжена конгруэнции $\Gamma_{U_1U_2}$ или $\Gamma_{V_1V_2}$, то то же справедливо для образов других сторон четырехугольника Демулена, и это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы поверхность S пространства S_3 была проективно-минимальной.

В конце статьи полученные результаты применяются к последовательностям Лапласа, порождаемым проективно-минимальной поверхностью S пространства S_3.

В. В. Гольдберг

12031. К теории кривых метрического пространства линейных элементов. Близникас В. И., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 1, 9—12

В метрическом пространстве линейных элементов $(u^i, \dot{u}^i)$, определенном при помощи поля симметрического ковариантного тензора второй валентности $g_{ij}(u^l, \dot{u}^l)$, строится пучок метрических связностей и изучается теория кривых-однопараметрических многообразий линейных элементов. Отдельно изучаются центроидальные кривые — кривые, у которых направления касательных к линии, описываемой опорной точкой линейного элемента, совпадают с направлениями линейных элементов и нецентроидальные кривые. Для обоих случаев получены формулы, обобщающие уравнения Френе метрической теории кривых. М. А. Акивис

12032. Об ортогональных подгруппах классических компактных групп Ли. Васильев А. М., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 1, 18—21

Обозначим через $O(n)$, $U(n)$, $Sp(2n)$ соответственно группы вещественных ортогональных матриц порядка n, комплексных унитарных матриц порядка n и комплексных унитарно-симплектических матриц порядка $2n$. Пусть далее $\widetilde{O}(n)$, $\widetilde{U}(2n)$ и $\widetilde{Sp}(4n)$ — простейшие вещественные представления этих групп в пространствах $E(n)$, $\overline{E}(2n)$ и $\widetilde{E}(4n)$ ($\widetilde{R}$ — представления). Подгруппой типа ρ группы $\widetilde{O}(N)$ называется подгруппа G_1 — прямое произведение подгрупп $O(l_a)$, $U(m_k)$ и $Sp(2n_r)$, действующих как $\widetilde{R}$ — представленная в системе вполне ортогональных друг другу подпространств $E(l_a)$, $\overline{E}(2m_k)$ и $\widetilde{E}(4n_r)$ пространства $E(N)$ и оставляющих на месте все точки максимального подпространства $E(N_0)$, вполне ортогонального всем $E(l_a)$, $\overline{E}(2m_k)$ и $\widetilde{E}(4n_r)$.

Перечислены необходимые и достаточные условия ортогональности двух подгрупп типа ρ. Знание этих условий важно для некоторых задач геометрии однородных пространств, в частности для определения вполне геодезических подмногообразий однородного пространства в смысле римановой геометрии, индуцированной в нем метрикой Картана его группы движений.

А. С. Феденко

12033. Приводимость многообразий, погруженных в пространство постоянной кривизны. Дольбо-Лемуан (Réductibilité de variétés plongées dans un espace à courbure constante. Dolbeault-Lemoine Simone), Rend. mat. e applic., 1958, **17**, № 3-4, 453—474 (франц.)

Работа представляет собой полное изложение результатов, сообщенных большей частью в заметке того же автора (РЖМат, 1959, 11521). В ней рассматриваются приводимые V_{n-1} риманова многообразия V_n постоянной кривизны с локальной и глобальной точек зрения. Локальные результаты полно формулируются в упомянутом реферате, формулировку некоторых результатов глобального характера мы здесь приводим. В случае приводимости V_{n-1} с глобальной точки зрения, V_n реализуется в виде сферы S_n евклидова E_{n+1}.

Доказывается теорема: В сфере S_n всякое приводимое полное линейно связное V_{n-1} класса C^r гомеоморфно топологическому и римановому произведению двух сфер размерностей $p-1$ и $n-p$ соответственно ($n \geqslant 4$, $r \geqslant 3$, $p \geqslant 2$). Можно отказаться от предположения полноты погружения; при этом получается: существуют многообразия размерности $n-1$, класса C^r, регулярно погруженные в сферу S_n с индуцированной этим погружением всюду приводимой метрикой; каждая связная компонента такого многообразия содержится в топологическом и римановом произведении двух сфер размерностей $p-1$ и $n-p$ ($n \geqslant 4$, $r \geqslant 3$, $p \geqslant 2$). При отождествлении диаметрально противоположных точек сферы получается пространство, гомеоморфное P_n. Показывается, что в этом случае существуют V_{n-1}, погруженные в это пространство с приводимой метрикой, индуцированной этим погружением. При $n \geqslant 4$ каждая связная компонента такого многообразия содержится в некотором W_{n-1}, допускающем двулистное накрытие, являющееся топологическим и римановым произведением двух сфер размерностей $p-1$ и $n-p$. Это накрытие дает нам универсальную накрывающую, если и только если $n-2 \geqslant p \geqslant 3$. В остальных случаях универсальная накрывающая будет топологическим произведением $(n-2)$-мерной сферы и прямой.

В. В. Рыжков

12034. Группы преобразований с $(n-1)$-мерными орбитами в некомпактном многообразии. Нагано (Transformation groups with $(n-1)$-dimensional orbits on non-compact manifolds. Nagano Tadashi), Nagoya Math. J., 1959, **14**, 25—38 (англ.)

Рассматривается дифференцируемое многообразие M класса C^3, снабженное римановой (положительно определенной) метрикой класса C^2. Пусть B — некоторое подмногообразие в M, $N'(B)$ — совокупность всех единичных векторов, нормальных к B во всех его точках, а $N(B)$ — какая-нибудь из связных компонент в $N'(B)$. Доказываются следующие три теоремы:

1. Пусть G — связная группа преобразований Ли, являющаяся группой изометрии риманова пространства M, а B — компактное подмногообразие в M. Если группа G оставляет инвариантным множество $N(B)$, то каждая точка p из M допускает геодезическую минимальной длины, соединяющую ее с B.

2. Если при условиях теоремы 1 M — некомпактное многообразие, а $N'(B) = N(B)$, то из каждой точки p можно опустить только один перпендикуляр на B.

3. Если связная группа изометрии G некомпактного n-мерного риманова пространства M имеет $(n-1)$-мерную компактную орбиту, то M есть расслоенное пространство, базисом которого является некоторая орбита B группы G, а слой E есть подмногообразие в M, которое взаимно однозначно и дифференцируемо отображается на евклидово пространство размерности $n - \dim B$. Если H — стационарная подгруппа некоторой точки b из B, то в специальной системе координат в E она действует на E как линейная группа. Если, кроме того, $\dim B < n-1$, то H действует транзитивно на единичной сфере в касательном пространстве к E.

Утверждение последней теоремы геометрически означает, что группа G оставляет инвариантными и действует транзитивно на связной компоненте каждого подмногообразия, образованного точками, лежащими на постоянном расстоянии от данного компактного подмногообразия. Существование таких подмногообразий во всем пространстве M вытекает из теоремы 2. Из теоремы 3 выводится ряд алгебраических и геометрических следствий. В частности, получается утверждение, доказанное ранее Монтгомери и Циппином (РЖМат, 1958, 8602) для компактных непрерывных групп G, но без предположения о дифференцируемости многообразия M:

Если в теореме 3 M гомеоморфно евклидову пространству $E^{(n)}$, то G допускает фиксированную точку и является линейной группой.

Г. И. Кручкович

12035. Тензорные расширения метризуемых локальных групп Ли. Руз (Tensor extensions of metrisable local Lie groups. Ruse H. S.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 5—14 (англ.)

Вещественная связная группа Ли G называется метризуемой, если она допускает риманову метрику, инвариантную при всех правых и левых сдвигах. Для этого необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли была метризуемой, т. е. допускала инвариантную невырожденную билинейную форму g. Пусть L — n-мерная алгебра Ли над полем K, а A — r-мерная линейная ассоциативная и коммутативная алгебра над тем же полем. Их тензорное произведение $A \otimes L$ также является алгеброй Ли над K. Пусть L — метризуемая алгебра Ли с инвариантной формой g, а γ — скалярное произведение в алгебре A, тогда γg — инвариантная форма в $A \otimes L$. Если можно выбрать γ так, чтобы билинейная форма γg была невырожденной, то $A \otimes L$ будет метризуемой алгеброй Ли. Она называется в этом случае тензорным расширением алгебры Ли L посредством алгебры A, а соответствующая локальная группа Ли $G(A \otimes L)$ называется тензорным расширением группы $G(L)$. Если $ds^2 = g_{\alpha\beta}(u^\gamma)\, du^\alpha\, du^\beta$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$) — инвариантная метрика в группе $G(L)$, заданная в ка-

нонических координатах u^α, то доказывается, что инвариантная метрика в $G(A\otimes L)$ имеет вид:

$$ds^2 = \gamma\{g_{\alpha\beta}(\theta_l u^{i_\gamma})\, d(\theta_j u^{i_\alpha})\, d(\theta_k u^{k_\beta})\}$$
$$(i, j, k = 1, \ldots, r),$$

где u^{i_α} — канонические координаты группы $G(A\otimes L)$, θ_l — базис алгебры A. Рассматривается пример, в котором в качестве A берется бинарная алгебра клиффордовых дуальных чисел, базис которой $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \varepsilon$, где $\varepsilon^2 = 0$. Этот пример приводит к римановой метрике, обобщающей понятие риманова расширения (РЖМат, 1956, 4843). Г. И. Кручкович

12036. О некоторых конформно-кривых римановых пространствах V_n, $n\geqslant 5$, допускающих группы движений. Муто (On some conformally curved Riemann spaces V_n, $n\geqslant 5$, admitting groups of motions. Mutō Yosio), Sci. Repts Yokohama Nat. Univ., 1958, sec. I, № 7, 1—22 (англ.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1958, 9222) автором было установлено, что если риманово пространство V_n допускает группу движений G_r размерности $r > n(n+1)/2 - 3n + 11$ и не является конформно-плоским, то его тензор Вейля имеет вид:

$$C_{\lambda\mu\nu\omega} = C[g_{\lambda\omega}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\omega}] - \frac{n-1}{2}C[g_{\lambda\omega}(A_\mu A_\nu + B_\mu B_\nu) +$$
$$+ g_{\mu\nu}(A_\lambda A_\omega + B_\lambda B_\omega) - g_{\lambda\nu}(A_\mu A_\omega + B_\mu B_\omega) -$$
$$- g_{\mu\omega}(A_\lambda A_\nu + B_\lambda B_\nu)] -$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2}C[A_\lambda A_\omega B_\mu B_\nu + A_\mu A_\nu B_\lambda B_\omega -$$
$$- A_\lambda A_\nu B_\mu B_\omega - A_\mu A_\omega B_\lambda B_\nu],$$

где A_λ и B_λ — взаимно ортогональные единичные векторные поля, $g_{\lambda\nu}$ — метрический тензор. При $n = 6$ и 8, кроме этого общего случая, возможен и другой специальный вид тензора Вейля. Метрика пространства V_n предполагалась положительно определенной. Продолжая изучение общего случая, автор доказывает, что если пространство V_n с указанным строением тензора $C_{\lambda\mu\nu\omega}$ допускает группу движений размерности $r > n(n+1)/2 - 3n + 8$, то необходимо $r \geqslant n(n+1)/2 - 2n + 1$ и метрика пространства приводится в некоторой системе координат к виду

$$ds^2 = g_{pq}(u^1, u^2)\, du^p du^q +$$
$$+ \lambda^2(u^1, u^2)\, k_{ab}(u^3, \ldots, u^n)\, du^a du^b$$
$$(p, q = 1, 2;\ a, b = 3, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $k_{ab}du^a du^b$ есть метрика $(n-2)$-мерного пространства V_{n-2} постоянной кривизны. Уточняется конкретный вид метрики (1) в предположении, что пространство V_n неконформно-плоское и допускает полную группу движений одной из возможных размерностей $r = n(n+1)/2 - 2n + \alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Общий результат обеих статей выражен в теореме:

Если $C_{\lambda\mu\nu\omega}$ не имеет специальной формы, возможной только для $n = 6$ и 8, то для того чтобы V_n, $n \geqslant 6$, не являющееся конформно-плоским, допускало группу движений G_r размерности $r > n(n+1)/2 - 3n + 11$, необходимо и достаточно, чтобы его метрика приводилась к виду (1). Г. И. Кручкович

12037. К теории поля локальных поверхностей в касательном составном многообразии первого порядка $E_n(X_n)$. Жотиков Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 69—79

Приводится краткое изложение некоторых известных результатов, относящихся к геометрии m-мерной поверхности в X_n. На основе принципа двойственности эти результаты автоматически повторяются для m-параметрического семейства гиперплоскостей в E_n. Огибающей такого семейства является сингулярная гиперповерхность $(n-m-1)$-го класса сингулярности. Далее рассматривается поле локальных m-мерных поверхностей в X_n, такое, что в каждом локальном касательном E_n задана m-мерная поверхность. С таким полем естественно ассоциируется составное многообразие $X_m(X_n)$. Основной результат автора заключается в построении внутренней (определяемой самим полем) линейной связности в ассоциированном $X_m(X_n)$. В последнем параграфе работы автор рассматривает поле локальных сингулярных гиперповерхностей $(n-m-1)$-го класса сингулярности в X_n. С этим полем также может быть ассоциировано составное многообразие $X_m(X_n)$, однако определение внутренним образом линейной связности в ассоциированном $X_m(X_n)$ в этом случае не может быть простым следствием предыдущего результата. Используя другой путь, автор указывает способ определения внутренним образом линейной связности в составном многообразии $X_m(X_n)$, ассоциированном с полем локальных сингулярных гиперповерхностей в E_n для произвольного класса сингулярности. В работе полностью отсутствуют доказательства высказываемых предложений. А. Е. Либер

12038. Точечные преобразования проективных пространств, аппроксимируемые некоторыми квадратичными преобразованиями второго рода. Мастроджакомо (Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche di seconda specie particolari. Mastrogiacomo Pasquale), Ricerca, Napoli 5, 1954, № 1-2, 27—32, № 3, 40—49 (итал.)

Квадратичное преобразование второго рода — это проективное соответствие между плоскостью в S_3 и квадрикой в S_3', устанавливаемое при помощи линии и трех общих точек. Известно, что существует 8 типов таких преобразований. Кроме того, известно, что точечное преобразование допускает в общей паре соответствующих точек сеть характеристических линий, которые будут базисными линиями линейной системы ∞^2 кубических конусов. Автор определяет 8 типов этих линейных систем, характеризующих 8 типов точечных преобразований, которые могут быть аппроксимированы до второго порядка при помощи восьми типов квадратичных преобразований. C. Longo

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 77.

12039. Точечные преобразования пространств. Лонго (Trasformazioni puntuali tra spazi. Longo C.), Rend. mat. e applic., 1959, 18, № 1-2, 1—10 (итал.)

Рассматриваются характеристические направления точечного соответствия T двух пространств S_3, $\overline{S}_3$ (и вообще S_n, $\overline{S}_n$). Если d — простая характеристическая прямая в точке O пространства S_n, то существует ∞^1 направлений (δx^l) таких, что d и $d + \delta d$ (соседняя характеристическая прямая) пересекаются. Эти направления (в случае $n = 3$) образуют конус второго порядка, называемый конусом инциденций Г. Изучаются условия, при которых этот конус распадается на две плоскости, из которых одна или обе содержат d. В общем случае, если конус Г не распадается, то всякая плоскость π, проходящая через d, определяет единственное направление инциденции и тем самым определенную точку P на d — точку пересечения с бесконечно близкой характеристической прямой в данном направлении инциденции. Соответствие $\pi \to P$ — проективное. Показывается, что если, кроме задания характеристической конфигурации в паре соответствующих точек O, $\overline{O}$ (определяющей, как известно, окрестность второго порядка преобразования T), задать еще эти проективные соответст-

вия для четырех пар простых характеристических направлений, то этим определится окрестность третьего порядка T. В. В. Рыжков

12040. Соответствия между двумя проективными пространствами с совпадающими характеристиками. Стока, Врэнчану (Corespondențe între două spații proiective cu caracteristicele confundate. Stoka M., Vrănceanu G. G.), Studii și cercetări mat. Acad. RPR, 1959, **10**, № 1, 219—235 (рум.; рез. русск., франц.)

Точечное соответствие между двумя аффинными пространствами $A_3(x^1, x^2, x^3)$ и $E_3(u^1, u^2, u^3)$ задается уравнениями $u^i = u^i(x^1, x^2, x^3)$. Аффинная связность Γ^s_{jk} в A_3 определяется системой уравнений $(\partial^2 u^i/\partial x^j \partial x^k) + \Gamma^s_{jk}(\partial u^i/\partial x^s) = 0$, а проективная связность вводится с помощью равенств $\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \delta^i_j(\Gamma^s_{sk}/4) - \delta^i_k(\Gamma^s_{sj}/4)$. В обозначениях $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $dy/dx = y'$, $dz/dx = z'$ характеристические направления определяются системой двух уравнений третьей степени относительно y', z' с коэффициентами, выражаемыми через $\prod^i_{jk}$; эти два уравнения интерпретируются авторами как уравнения двух кривых третьего порядка в плоскости (y', z'). Соответствие пространств называется специальным, если эти две кривые третьего порядка имеют общую кривую. Ставится задача: найти такие специальные соответствия, при которых указанные кривые не имеют других общих точек, кроме кривой, служащей их общей компонентой. Исследуется возможность совпадения кривых и разнообразные случаи их распадения с выделением общей части. Условиям поставленной задачи удовлетворяют лишь следующие случаи: 1) Обе кривые совпадают; при этом они сводятся к одной кривой второго порядка. 2) Кривые сводятся к кривым второго порядка, распадающимся на пары параллельных прямых, причем одна из этих прямых служит компонентой для обеих кривых. 3) Одна из кривых третьего порядка сводится к тройной прямой, а другая распадается на эту же прямую и кривую второго порядка. 4) Обе кривые сливаются в одну прямую. В каждом случае показывается, каким условиям должна удовлетворять связность $\prod^i_{jk}$, для того чтобы он осуществлялся. Особенно подробно исследуются два последние случая; рассматривается в частности возможность постоянной связности $\prod^i_{jk}$. В последнем предположении уравнения, определяющие соответствие пространств, получаются в конечном виде. В. В. Рыжков

12041. Теория несобственных гиперполос в центроаффинном пространстве. Тарасов И. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 161—167

Гиперполосой в центроаффинном n-мерном пространстве E_n называется геометрический образ, состоящий из m-мерной поверхности (базисная поверхность), в каждой точке которой задана гиперплоскость, проходящая через m-мерную касательную плоскость к базисной поверхности (касательная гиперплоскость). Если все касательные гиперплоскости проходят через центр пространства E_n, то гиперполоса называется несобственной. В реферируемой работе изучаются несобственные гиперполосы в E_n. Прежде всего выделяются несобственные гиперполосы, у которых касательные m-мерные плоскости к базисной поверхности не проходят через центр E_n; автор называет такие гиперполосы несобственными гиперполосами первого рода. Дан признак регулярности и определены характеристические плоскости такой гиперполосы. Далее показано, как внутренним образом можно определить объект аффинной связности в X_m, ассоциированном с несобственной гиперполосой первого рода, и построить векторный базис пространства E_n, также внутренним образом присоединенный к точкам базисной поверхности гиперполосы. После этого указывается полная система геометрических дифференциальных объектов, внутренним образом определяемых несобственной гиперполосой первого рода и, в свою очередь, определяющих эту гиперполосу с точностью до автоморфизмов пространства E_n. Выведены тождества, которым удовлетворяют фундаментальные объекты несобственной гиперполосы первого рода. Эти результаты специализированы для случая $m = n - 2$ и приводят к теории $(n-2)$-мерной поверхности в E_n. В конце статьи рассматриваются гиперполосы, у которых базисными поверхностями являются конические поверхности с вершиной в центре пространства E_n. Такие гиперполосы автор называет несобственными гиперполосами второго рода; показано как изучение несобственной гиперполосы второго рода сводится к изучению соответствующим образом определенной несобственной гиперполосы первого рода. На основе полученных результатов указан путь построения геометрии гиперполос в n-мерном проективном пространстве. А. Е. Либер

12042. Векторы главных направлений Риччи. Эйзенхарт (The Ricci principal direction vectors. Eisenhart Luther P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 7, 1028—1031 (англ.)

В римановом пространстве V_n векторы $\lambda^i_{h|}$ главных направлений Риччи определяются системой $(R_{ij} + \rho_h g_{ij})\lambda^i_{h|} = 0$, где ρ_h — скаляры. В заметке на примере V_3 показано, что в общем V_n векторы $\lambda^i_{h|}$ образуют ортогональный репер. Получено условие $R_{ij,t} = \frac{1}{2} R_{,t} g_{jl} + \frac{1}{2} R_{,j} g_{tl}$ того, что векторы $\lambda^i_{h|}$ являются касательными к нормальной конгруэнции. Ю. И. Левин

12043. Геометризация систем уравнений Пфаффа в римановых пространствах с неопределенной метрикой. Мирон (Geometrizarea sistemelor Pfaff în spații riemanniene cu metrică nedefinită. Miron Radu), Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Iași Mat., 1958, **9**, № 1, 23—71 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются неголономные многообразия V^m_n в римановом пространстве V_n с неопределенной метрикой:

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^p)^2 - \{(ds^{p+1})^2 + \ldots + (ds^n)^2\}, \quad (1)$$

ds^i — некоторые формы Пфаффа. Это коротко может быть записано в виде $ds^2 = \varepsilon_{ij} ds^i ds^j$. В двух первых главах находятся уравнения структуры пространства V_n, вводится локальный репер и определяется метрика на многообразии V^m_n:

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^q)^2 - \{(ds^{q+1})^2 + \ldots + (ds^m)^2\}. \quad (2)$$

Это коротко может быть записано в виде $ds^2 = \varepsilon_{\alpha\beta} ds^\alpha ds^\beta$.

Подвергнем репер всевозможным псевдоортогональным преобразованиям, сохраняющим равенство (2):

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}_\alpha = c^\beta_\alpha \overline{\mu}^*_\beta \\ &\overline{\mu}_\sigma = c^\beta_\sigma \overline{\mu}^*_\beta + c^\tau_\sigma \overline{\mu}^*_\tau, \\ &\varepsilon_{\alpha\beta} c^\alpha_i c^\beta_\delta = \varepsilon_{\alpha\beta} c^\gamma_\alpha c^\delta_\beta = \varepsilon_{\gamma\delta}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, m, \\ &\sigma, \tau = m+1, \ldots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Свойства V^m_n, сохраняющиеся при преобразовании (3), называются внутренними свойствами. Если преобразования (3) сохраняют также и пространство, ортогональное к V^m_n, то свойства V^m_n, инвариантные при таких пре-

образованиях, называются полувнутренними. Если при таких преобразованиях сохраняется и метрика нормального пространства, то свойства V_n^m называются жесткими. Достаточно легко исследуются жесткие свойства многообразия, с большим трудом — полувнутренние и очень затруднительно исследование внутренних свойств. Автор ограничивает вначале изучение внутренних свойств случаем, когда система уравнений, определяющая V_n^m, имеет нулевую производную систему. В этом случае среди преобразований (3) выделяется подгруппа, характеризуемая равенствами

$$\varepsilon_{\sigma\tau}\, c_\rho^\nu\, c_\pi^\tau = \varepsilon_{\sigma\tau}\, c_\sigma^\rho\, c_\tau^\pi = \varepsilon_{\rho\pi} \quad (\rho, \pi = m+1, \ldots, m). \qquad (4)$$

Автору удается ввести в пространстве, нормальном к V_n^m, псевдоевклидову связность с кручением. Подобным же образом вводится псевдоевклидова связность и в пространстве, касательном к V_n^m. Находится геометрический смысл коэффициентов связности. Если метрика V_n становится определенной, то в пространстве, касательном к V_n^m, связность оказывается евклидовой, а в нормальном к V_n^m — псевдоевклидовой.

В последней, третьей главе, рассматривается система уравнений, определяющая V_n^m, с ненулевой производной системой; однако при этом предполагается, что эта система не имеет инвариантных подсистем.

Н. И. Кованцов

12044. Обобщение однородного риманова пространства. Томонага, Сугаку, 1956, 8, № 2, 100—102 (японск.)

Целью работы является обобщение предыдущих исследований (РЖМат, 1954, 5252).

Теорема 1. Если в счетно-компактном и положительно определенном $[A, B]$-пространстве скаляр $(R/n) - \sqrt{R_{ij}R^{ij} - (R^2/n)}$ положителен в какой-либо точке, то первое число Бетти равно нулю. Если этот скаляр равен нулю в некоторой точке, то ковариантная производная любого гармонического вектора исчезает и поэтому первое число Бетти не превосходит n.

Теорема 2. Если при тех же допущениях скаляр

$$\frac{n-p}{n(n-1)}R - \sqrt{\frac{(p-1)^2}{4}R_{ijkl}R^{ijkl} + \frac{n-4p+2}{4}R_{ij}R^{ij} + \left(\frac{1}{4} - \frac{(n-p)^2}{2n(n-1)}\right)R^2} \quad (p \geqslant 2)$$

положителен в некоторой точке, то p-е число Бетти равно нулю. Если этот скаляр равен нулю в какой-либо точке, то ковариантная производная любого гармонического p-тензора исчезает, и поэтому p-е число Бетти не превосходит $\binom{n}{p}$.

Liu Chang Wen

12045. Параллельный перенос на гладкой поверхности. IV. Борисов Ю. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 13, 83—92 (рез. англ.)

Часть III см. РЖМат, 1960, 5777. Дается новая характеристика для класса гладких поверхностей, рассмотренного автором в трех предыдущих публикациях под тем же названием.

Примечание референта: Недавно обнаруженные дефекты в указанных публикациях, по-видимому, сказываются и на результатах настоящей работы.

А. В. Погорелов

12046. Характеристические свойства сфер в римановом пространстве. Фиман, Сюн Чжуань-чжи (Characterizations of Riemann n-spheres. Feeman George F., Hsiung Chuan-Chin), Amer. J. Math., 1959, 81, № 3, 691—708 (англ.)

r-я средняя кривизна M_r n-мерной гиперповерхности в $(n+1)$-мерном римановом пространстве определяется равенством $C_n^r M_r = S_r$, где S_r — r-я элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны. Пусть в области пространства постоянной средней кривизны V_{n+1}, содержащем ориентированную замкнутую гиперповерхность V_n, введена система нормальных римановых координат S. Тогда $\int_{V^n} M_{a-1}dA + \int_{V^n} M_a p dA = 0$, где p — скалярное произведение единичного вектора нормали и радиус-вектора точки гиперповерхности относительно системы координат S. Из этой формулы выводятся различные характеристические свойства сфер. Например, если для некоторого s $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$ $M_s > 0$ и либо $p \leqslant -M_{s-1}/M_s$, либо $p \geqslant -M_{s-1}/M_s$ во всех точках V_n, то V_n есть сфера.

А. В. Погорелов

12047. Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору. Левин Ю. И., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 4, 668—671

Рассматривается пространство аффинной связности, в котором существует такой невырождающийся кососимметричный тензор a_{ij}, что $\nabla_k a_{ij} = \mu \partial_{[k} a_{ij]}$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$, где μ — действительное число. Устанавливается тензорный признак существования системы координат, в которой $a_{ij} = \varphi \cdot c_{ij}$, где φ — некоторая функция, а c_{ij} — постоянные. Если $\mu = 0$, то связность оказывается эквиаффинной. Доказаны некоторые другие теоремы, в частности: Для невырожденного кососимметричного тензора a_{ij} в пространстве X_n существует аффинная связность нулевой кривизны (но, вообще говоря, с кручением), относительно которой тензор a_{ij} будет ковариантно постоянным. На основании этой теоремы доказывается также, что всякий невырожденный кососимметричный тензор a_{ij} в подходящей системе координат приводится к виду: $a_{ij} = c_{ij}\varphi_i\varphi_j$ (не суммировать!), где c_{ij} — постоянные, а φ_i — некоторые функции.

А. Е. Либер

12048. Геометрия пространства с сингулярной гиперареальной метрикой. Каганов С. А., Матем. сб., 1957, 42, № 4, 497—512

Пусть $\mathfrak{E}_n$ — пространство всех контравариантных векторных плотностей веса $+1$ анного центрально-аффинного n-мерного пространства E_n. Рассматривается регулярная $(m-1)$-мерная гиперполоса в $\mathfrak{E}_n$, для которой известным путем, указанным В. В. Вагнером (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, 8, 11—72), определяются фундаментальные объекты. В каждой точке гиперполосы определяется также характеристическая $(n-m)$-мерная плоскость, являющаяся пространством $\mathfrak{E}_{n-m}$ (характеристическое $\mathfrak{E}_{n-m}$). Из фундаментальных объектов гиперполосы автор строит связующую скалярную плотность δ; произведение вектора из $\mathfrak{E}_n$ на δ есть вектор в соответствующем E_n, компоненты этого вектора будут скалярными плотностями в характеристическом $\mathfrak{E}_{n-m}$.

С каждой точкой P пространства X_n, наряду с касательным E_n, ассоциируется соответствующее $\mathfrak{E}_n$, таким образом получается составное многообразие $\mathfrak{E}_n(X_n)$. Пусть в каждом $\mathfrak{E}_n(P)$ задана $(m-1)$-мерная гиперполоса; в этом случае говорят, что в $\mathfrak{E}_n(X_n)$ задано поле $(m-1)$-мерных гиперполос. Такое поле приводит, прежде

де всего, к составному многообразию $X_{m-1}(X_n)$. Если рассматривать $X_{m-1}(X_n)$ как базисное пространство, с каждой точкой которого ассоциируется характеристическое $\mathfrak{E}_{n-m}$ гиперполосы, то получается еще одно составное многообразие $\mathfrak{E}_{n-m}(X_{n+(m-1)})$, ассоциированное с полем $(m-1)$-мерных гиперполос. Автор показывает, что поле $(m-1)$-мерных гиперполос определяет внутренним образом линейную связность в составном многообразии $X_{m-1}(X_n)$. Точно так же внутренним образом определяется свернутый объект аффинной связности в составном многообразии $\mathfrak{E}_{n-m}(X_{n+(m-1)})$. Полученные результаты применяются автором к изучению пространства X_n с заданной сингулярной (класса сингулярности $n-m$) гипераре альной метрикой; последняя задается автором с помощью поля $(m-1)$-мерных гиперполос в $\mathfrak{E}_n(X_n)$. Автор получает в тензорной форме необходимое условие Лагранжа и выражение для второй вариации гиперплощади экстремальной гиперповерхности в пространстве X_n с сингулярной гипераре альной метрикой.

А. Е. Либер

12049. Конформные связности и конформные преобразования. Танака (Conformal connections and conformal transformations. Tanaka Noboru), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 1, 168—190 (англ.)

Изучаются конформные свойства замкнутых римановых многообразий специального типа, как приложение теории нормальных конформных связностей. Если обозначить в многообразии M некоторую заданную риманову метрику через g и понимать под проективным полем ранга m тензорное поле H, обладающее свойствами: 1) H параллельно относительно римановой связности; 2) $H^2=H$; 3) $g(HX, Y)=g(X, HY)$ для всех касательных векторов X, Y и 4) ранг H_p равен m в каждой точке M, то можно выделить специальный тип римановой связности типа G при помощи следующего определения. Пусть M есть n-мерное многообразие, тогда: 1) риманова метрика g на M называется метрикой типа G^{m-1} $(0<m<n)$, если существует проективное поле H' ранга m и если поле тензора Риччи S для g имеет выражение $s=(m-1)\,g\circ H'-(n-m-1)\,g\circ H''$, где H'' обозначает тензорное поле, аналогичное H' и удовлетворяющее условию $H''X=X-H'X$, для всякого касательного вектора X; 2) риманова метрика g на M называется метрикой типа G^{∞}, если поле тензора Риччи — нулевое. Метрики типа G^{m-1} на G^{∞} называются метриками типа G. Доказываются следующие основные теоремы: Пусть g и $\bar{g}$ — две конформно-эквивалентные римановы метрики, замкнутые и типа G. Тогда: а) если g — типа G^{m-1} и $m\geqslant 1$, то g и $\bar{g}$ совпадают и б) если g типа G^{∞}, то функция, определяющая конформное соответствие g и $\bar{g}$ — постоянна. При помощи этих и предшествующих им теорем доказывается ряд теорем о метриках типа G.

А. З. Петров

12050. Об алгебрах Грассманна и Клиффорда. I. Шёнберг (On the Grassmann and Clifford algebras. I. Schönberg Mario), Anais Acad. brasil. ciênc., 1956, 28, № 1, 11—19 (англ.)

Настоящая работа является первой из серии работ, посвященных расширению векторных алгебр аффинных пространств. Введены две ассоциативные алгебры размерности $2n$ (над полем действительных или комплексных чисел) G_n и L_n; первая и вторая алгебры являются соответственно расширением алгебры Грассманна с антиперестановочным и перестановочным произведением контравариантных векторов. G_n и L_n (при четном n) являются соответственно алгеброй Клиффорда и симплектической алгеброй $2n$-мерного пространства. Эти рассуждения об аффинных пространствах тесно связаны с квантовой механикой.

F. Šik

12051. О соотношениях между различными связностями в финслеровом пространстве. Окубо (On relations among various connections in Finslerian space. Ohkubo Takeo. Kumamoto J. Sci., 1954, **A1**, № 3, 1—6) (англ.)

Сравниваются коэффициенты различных связностей финслерова пространства, введенных Картаном, Бервальдом и референтом. Изучаются возможные соотношения между произвольными метрическими связностями (т. е. связностями, для которых ковариантные производные метрического тензора обращаются в нуль). Используя критерии, подобные критериям, рассмотренным референтом, автор вводит новую метрическую связность, коэффициенты которой определяются с точностью до произвольного тензора.

H. Rund

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 627.

12052. Обобщение инвариантного дифференцирования в дробно-линейной группе и расщепление объекта аффинной связности. Лемлейн В. Г., Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 4, 672—673

Определяется инвариантное дифференцирование объектов, преобразующихся при дробно-линейных преобразованиях по закону относительного тензора. При этом роль объекта связности играют величины

$$\gamma^p_{jk}=\frac{1}{n+1}\,\delta^p_j\,\frac{\partial l_n a}{\partial x^k}+\frac{1}{n+1}\,\delta^p_k\,\frac{\partial l_n a}{\partial x^j},$$

определяемые относительным скаляром a веса 1. Объект γ^p_{jk} преобразуется по закону, совпадающему при дробно-линейных преобразованиях с законом преобразования объекта аффинной связности. Далее вводится объект G^p_{jk}, названный автором симметричным связующим объектом, играющий по отношению к введенному выше инвариантному дифференцированию ту же роль, что объект аффинной связности по отношению к обычному дифференцированию. Показано, что сумма $\gamma^p_{jk}+G^p_{jk}=\Gamma^p_{jk}$ представляет собой объект аффинной связности, который, таким образом, можно расщепить на два объекта, один из которых $\left(\gamma^p_{jk}\right)$ вводит инвариантное дифференцирование в дробно-линейной группе.

Ю. И. Левин

12053. Финслерово произведение двух римановых пространств. Ху Хэ-шэн (A Finslerian product of two Riemannian spaces. Hu Hou-sung), Sci. Rec., 1959, **3**, № 10, 446—448 (англ.)

Финслерово пространство F_n называется финслеровым произведением двух римановых пространств, если существует система координат, в которой метрика имеет вид:

$$ds^2=2\mathfrak{F}(p_1, p_2), \qquad (1)$$

где $p_1=a_{ab}(x^c)\,dx^a\,dx^b$, $p_2=a_{pq}(x^r)\,dx^p\,dx^q$ $(a, b, c=1, \ldots, m;\ p, q, r=m+1, \ldots, n)$. С такими пространствами встречаются при исследовании финслеровых пространств, допускающих группы движений.

Теорема. Финслерово произведение F_n с метрикой (1) обладает двумя семействами геодезических поверхностей V_m и V_{n-m}, которые при опорных элементах, касательных к V_m или V_{n-m}, являются взаимно ортогональными.

Ю. Г. Лумисте

12054. Об определении полной кривизны гиперповерхности, погруженной в финслерово пространство с локальными пространствами Минковского. Элиопулос (Sur la définition de la courbure totale d'une hypersurface plongée dans un espace de Finsler localement Minkowskien. Eliopoulos Hermes A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1959, **45**, № 3, 205—214 (франц.)

Пусть F_n — n-мерное финслерово пространство с основным метрическим тензором $g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, x')}{dx'^i dx'^j}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) и рундовским объектом связности $P^i_{hk}(x, x')$ (РЖМат, 1959, 2386). Гиперповерхность F_{n-1} в F_n можно определить системой уравнений $x^i = x^i(u^\alpha)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1$). Если ранг $\| \partial x^i/\partial u^\alpha \| = n - 1$, то на F_{n-1} индуцируется невырожденная метрика, определенная при помощи тензора $\gamma_{\alpha\beta}(u, u') = g_{ij}(x, x')(\partial x^i/\partial u^\alpha)(\partial x^j/\partial u^\beta)$. В каждой точке многообразия F_{n-1} можно построить единичный вектор нормали n^i, определенный уравнениями $g_{ij}(x, n) n^i (\partial x^i/\partial u^\alpha) = 0$, $g_{ij}(x, n) n^i n^j = 1$. К гиперповерхности F_{n-1} присоединяется $(n-1)$-мерное финслерово пространство f_{n-1}, определенное уравнениями $n^i = n^i(u^\alpha)$. Метрика пространства f_{n-1} имеет следующую структуру $N_{\alpha\beta} = g_{ij} n^i_{;\alpha} n^j_{;\beta}$, где $n^i_{;\alpha} = (\partial n^i/\partial u^\alpha) + P^{*i}_{hk} n^h (\partial x^k/\partial u^\alpha)$, $P^{*i}_{hk}(x, x') = g^{il}[h, k, l] - {}^1/_2 g^{il}\left((\partial g_{kl}/\partial x'^m) P^m_{hr} + (\partial g_{lh}/\partial x'^m) P^m_{kr} + (\partial g_{lk}/\partial x'^m) P^m_{lr}\right) x'^r$. Полную кривизну K_{n-1} гиперповерхности F_{n-1} пространства F_n в точке M автор определяет следующим образом $K_{n-1} = B^M/b^M$, где B^M и b^M — объемы индикатрис $\gamma_{\alpha\beta}(u, u') u'^\alpha u'^\beta = 1$, $N_{\alpha\beta}(u, u') u'^\alpha u'^\beta = 1$ пространств F_{n-1} и f_{n-1} соответственно. Если пространство F_n является римановым, то $K_{n-1} = \sqrt{\det \| N_{\alpha\beta} \|} / \sqrt{\det \| \gamma_{\alpha\beta} \|}$. Так как в римановом пространстве $n^i_{;\alpha} = \Omega_{\alpha\beta} \gamma^{\beta\varepsilon} (\partial x^i/\partial u^\varepsilon)$, где $\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\varepsilon} = \delta^\alpha_\varepsilon$, а $\Omega_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы гиперповерхности, то $\det \| N_{\alpha\beta} \| = (\det \| \Omega_{\alpha\beta} \|)^2 / \det \| \gamma_{\alpha\beta} \|$ и $K_{n-1} = \det \| \Omega_{\alpha\beta} \| / \det \| \gamma_{\alpha\beta} \|$, т. е. полная кривизна гиперповерхности совпадает с главной кривизной. Оказывается, что в финслеровом пространстве полная и главная кривизны гиперповерхности связаны соотношением $A(u) K_{n-1} = \det \| \Omega_{\alpha\beta} \| / \det \| \gamma_{\alpha\beta} \|$, где $A(u)$ вполне определенная функция (в римановом случае $A(u) \equiv 1$). Подробно рассматривается случай $n = 3$.

В. И. Близникас

12055 К. Лекции по дифференциальной геометрии. Т. I, II. Врэнчану (Leçons de géométrie différentielle. Vol. I. Congruences. Formes de Pfaff. Groupes continus. Invariants et équivalence. Espaces à connexion affine. Espaces de Riemann. Espaces à connexion projective. 404 p., 26.50 lei; Vol. II. Espaces partiellement projectifs. Espaces à connexion conforme. Tenseurs du second ordre. Espaces non holonomes. Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre. Géométrie différentielle globale. 426 p., 27,50 lei. Vrănceanu G., Bucureşti, Acad. RPR, 1957) (франц.)

Монография посвящена геометрии пространств аффинной, проективной и конформной связности. Особое внимание уделено пространствам, допускающим группу преобразований в себя. При изложении широко использована теория пфаффовых форм. В гл. I, после введения понятия многомерного пространства, а также основных понятий тензорного анализа, приводятся основы теории пфаффовых форм и уравнений, которая геометризируется в связи с приложениями к теории конгруэнций кривых. На основе краткого, но систематического изложения теории непрерывных групп (гл. II), рассматривается проблема эквивалентности форм Пфаффа и решаются соответствующие задачи для конгруэнций (гл. III). В гл. IV вводится понятие пространства аффинной связности. Наряду с обычным способом задания закона перенесения, оно характеризуется и по отношению к неголономным системам координат или, иначе говоря, по отношению к n независимым конгруэнциям. Такой способ задания различных пространств систематически используется и в дальнейшем. После изложения общей теории (геодезические линии, кривизна и кручение, теория кривых) рассматриваются пространства, допускающие группу преобразований, в себя, симметрические пространства, пространства с полями абсолютно параллельных векторов. В гл. V излагается общая теория римановых пространств и следующие специальные вопросы: геодезические линии риманова пространства с вырожденной метрикой, эквивалентность двух римановых пространств, пространства постоянной кривизны, вложение в евклидово пространство, геодезическое отображение, группы движений. В гл. VI приводятся различные определения пространств проективной связности и аффинных связностей ассоциированных проективным, а также основы проективного тензорного исчисления.

Гл. I второй части посвящена теории пространств, которые автор называет частично проективными или пространствами Кагана. Согласно определению последнего, эти пространства называются $n-k$ раз проективными, если они допускают такое отображение на евклидово пространство, при котором их геодезические линии переходят в кривые, расположенные в k-мерных плоскостях. Подробно рассматриваются римановы частично проективные пространства, для которых устанавливается инвариантный признак и исследуется вопрос о классе их вложимости в евклидово пространство, а также вопрос о максимальных группах движений. В гл II определяются пространства Вейля и определяются группы конформных преобразований в себя римановых пространств, а также излагается теория пространств конформной связности Картана и Томаса. Гл. III посвящена связностям, допускающим существование таких ковариантно постоянных тензоров второй валентности, которые, вообще говоря, могут быть несимметричными или смешанными. В частности, подробно освещается геометрия симплектических пространств, когда этот тензор кососимметричен. Гл. IV содержит теорию поверхностей, вложенных в пространство аффинной связности и, в частности, определение аффинной нормали гиперповерхности. После этого излагается теория неголономных многообразий в аффинных и римановых пространствах с ее механической интерпретацией Гл. V посвящена геометрической теории уравнений в частных производных второго порядка. Отмечаются случаи, когда такому уравнению можно сопоставить аффинную связность. Общие соображения применяются к уравнениям Лапласа — Дарбу. В гл. VI излагаются некоторые вопросы глобальной дифференциальной геометрии Устанавливается понятие дифференцируемого многообразия и аффинной связности в нем. Рассматривается пространство с такими связностями, коэффициенты которых в некоторой системе координат не зависят от точки. С каждым из этих пространств связывается алгебра, для которой эти коэффициенты являются структурными постоянными. Далее приводится формула Гаусса — Бонне и ее обобщения для многомерных римановых пространств. В заключение отмечаются некоторые глобальные свойства пространств постоянной кривизны и рассматриваются римановы пространства, связанные с пространствами постоянной кривизны над алгебрами комплексных чисел и кватернионов.

Примечание референта. Следует отметить некоторые неточности и неполноту в ссылках на работы советских геометров. Автору, по-видимому, остались неизвестными результаты П. А. Широкова (Изв. физ.-мат. о-ва. Казанск. ун-та, 1934—1935, 7, сер. 3, 69—76),

А. П. Нордена (Докл. АН СССР, 1945, **50**, 53—56) и Я. Л. Шапиро (Матем. сб., 1955, **36 (78)**: I, 125—148) по геометрии частично проективных пространств. Хотя класс вложимости пространства постоянной кривизны определен А. Е. Либером (Уч. зап. Саратовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1938, **I (14)**: 2, 105—122), автор отмечает только работу Оцуки, повторившего в 1954 г. этот результат (т. II, стр. 47). Определение класса вложимости пространства аффинной связности, полученное Г. Ф. Лаптевым (Докл. АН СССР, 1945, **47**, 531—534), приписывается Б. Л. Лаптеву. А. П. Норден

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

12056. Косое дифференцирование относительных величин в общем релятивизме. Каттанео (Dérivation transverse et grandeurs relatives en relativité générale. Cattaneo Carlo), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 2, 197—199 (франц.)

Строится ковариантная операция „косого" дифференцирования, позволяющая записать уравнения движения частицы для любого физического репера в ньютоновской форме. Если пространственно-временной континуум V_4 определяется метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ с сигнатурой в точке $(+++-)$, T_x — касательное в точке векторное пространство и $x^4 = ct$, то автор называет координаты физически допустимыми, если $g_{44} < 0$, $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta > 0$; ясно, что для таких координат является допустимым любое преобразование вида $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha)$, $x^{4'} = x^{4'}(x^i) \times$ $\times(\alpha = 1, 2, 3$ и $\neq 4)$. Если единичный вектор γ^i направлен вдоль линии $x^4(\gamma^\alpha = 0$, $\gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}}$, $\gamma_l = g_{l4}/\sqrt{-g_{44}})$ и θ_x и $\sum_x$ обозначают подпространства T_x соответственно параллельное и нормальное γ^i, то любой вектор $\mathbf{V} = \mathbf{A} + \mathbf{N}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{N}$ — проекции $\mathbf{V}$ на θ_x и $\sum_x$: $A_l = -\gamma_i\gamma_k V^k$, $N_l = (g_{lk} + \gamma_l\gamma_k)V^k = \gamma_{lk}V^k$ $(\gamma_{l4} = 0)$ и на $\sum_x$, тензор γ_{lk} играет роль метрического тензора. Автор определяет частное косое дифференцирование, отвечающее полю вектора γ^i при помощи оператора $\widetilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha - (\gamma_\alpha/\gamma_4)\,\partial_4$ и после этого строит ковариантную операцию $\widetilde{\nabla}^*$ дифференцирования так, что $\widetilde{\nabla}^*_\alpha v_\beta = \widetilde{\partial}_\alpha v_\beta - \left\{\begin{matrix}\widetilde{\lambda}\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} v_\lambda$; $\left\{\begin{matrix}\widetilde{\lambda}\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} = \gamma^{\lambda\mu}\left(\widetilde{\alpha\beta, \mu}\right)$, $\left(\widetilde{\alpha\beta, \mu}\right) = {}^1/_2\left(\widetilde{\partial}_\alpha\gamma_{\beta\mu} + \widetilde{\partial}_\beta\gamma_{\mu\alpha} - \widetilde{\partial}_\mu\gamma_{\alpha\beta}\right)$. Эта операция позволяет записать движения пробной частицы в виде: $\widetilde{d}^*\,p_\alpha/dT = m\left[-{}^1/_2\,c^2\widetilde{\partial}_\alpha \log(-g_{44}) + c^2\,\partial_4\left(\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_4}\right) + c\,\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta}\,v^\beta\right] = m\left[c^2\gamma^i\,\Omega_{i\alpha} + c\,\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta}\,v^\beta\right]$, где $\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_4\left[\widetilde{\partial}_\alpha(\gamma_\beta/\gamma_4) - \widetilde{\partial}_\beta(\gamma_\alpha/\gamma_4)\right]$. Такая, ньютоновская по форме, система уравнений позволяет ввести аналоги поля Кориолиса, пространственного вихря и т. д. При этом $p_\alpha = m\,v^\alpha$, $v^\alpha = dx^\alpha/dT$ и T — время в $\sum_x$. А. З. Петров

12057. Метод лоренц-ковариантной аппроксимации в общем релятивизме. I. Керр (The Lorentz—covariant approximation method in general relativity. I. Kerr R. P.), Nuovo cimento, 1959, **13**, № 3, 469—491 (англ.; рез. итал.)

Анализируется метод ковариантной аппроксимации для получения уравнений движения локализированных частиц, взаимодействующих с тяжелыми телами в общем релятивизме; ковариантность понимается в смысле преобразований Лоренца, но не любой группы преобразований. Этот метод напоминает по алгоритму и получаемым результатам известный метод Эйнштейна, Инфельда, Гоффмана квазистатических аппроксимаций, но отличается от него и представляет, по существу, дальнейшую разработку метода аппроксимаций Фока. При этом, имея в виду, что в квантовой теории и электромагнетизме на движение элементарных частиц влияет самопроизвольное излучение, метод строится с возможностью учета и этого фактора; предполагается, что излучение для слабого гравитационного поля макроскопического тела может быть описано непрерывной функцией времени. Так как элементарная частица мыслится как сингулярность поля и последнее не распространяется на нее, то частицы заключаются в трехмерных поверхностях с топологическими свойствами пространственно-временного цилиндра, так что положение p-й частицы изобразится мировой линией $z^{p\mu}\left(\overset{p}{s}\right)$, проходящей внутри p-й поверхности $\overset{p}{s}$ а область около мировой линии (внутренность цилиндра) может быть задана условиями $x^\mu = \overset{p}{z}{}^\mu\left(\overset{p}{s}\right) + \gamma^\mu$ и $\overset{p}{v}{}^\mu\gamma_\mu = 0$, где $\overset{p}{v}{}^\mu$ и γ^μ удовлетворяют ряду условий. Обозначая через $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(-g)^{1.2}$, где $g^{\mu\nu}$ — контравариантные компоненты метрического тензора, автор специализирует систему координат при помощи координатных условий Де Дондера $g^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, характерных для гармонических координат. Вследствие этого, если $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$, где $\eta_i{}^{\mu\nu}$ — компонента метрики Минковского, координатные условия могут быть записаны в форме, указанной Фоком: $\Box\,h^{\mu\nu} = 2\Lambda^{\mu\nu}$, где $\Lambda^{\mu\nu}$ — нелинейные функции от $h^{\alpha\beta}$ и их производных; $h^{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям $\mathrm{mod}(h^{\alpha\beta}) < {}^1/_4$, $\Box\,\overset{(n)}{h}{}^{\alpha\beta} = 2\,\Lambda\,(\overset{(n)}{h}{}^{\alpha\beta})$. Рассматривается разложение $h^{\mu\nu}(\lambda) = \sum_r \lambda^r\,\overset{(n)}{h}{}^{\mu\nu}$ по некоторым неопределенным параметрам λ^r, которые при определении их выбора могут давать различные аппроксимации. Определяются уравнения поля в первой аппроксимации; доказывается теорема: уравнения поля и координатные условия могут быть удовлетворены в n-й аппроксимации, при условии, если они удовлетворяются в каждой предыдущей аппроксимации. Исследуя уравнения движения, автор получает три уравнения для спина и четыре уравнения движения масс. А. З. Петров

12058. Импеданс, сила и новые преобразования посредством модели Минковского лоренцова пространства. Булиндер (Impedance, power, and noise transformations by means of the Minkowski model of Lorentz space. Bolinder E. Folke), Ericsson Techn., 1959, **15**, № 2, 249—283 (англ.)

Показывается, что модели Минковского двумерных, трехмерных и четырехмерных лоренцовых пространств могут быть использованы для геометрического представления таких понятий механики, как импеданс (т. е. комплексное отношение мгновенного значения какой-либо переменной механической силы к мгновенному значению скорости перемещения точки приложения силы), сила и другие величины. Представление реализуется при помощи преобразования комплексной плоскости импеданса и комплексной плоскости отображения коэффициентов на модели Кели — Клейна двумерных и трехмерных гиперболических пространств и последующего отображения на модели Минковского лоренцова пространства методами матричной алгебры. Этим методом изучаются отображения импеданса, силы и дается геометрическая интерпретация спинора, вплоть до графического изображе-

ния и указывается метод для решения ряда конкретных задач. Работа основывается на использовании ряда предшествующих публикаций, относительно которых дается подробная библиография. А. З. Петров

12059. Теория пространства-времени в пределах специальной теории относительности. Опыт реконструктивного анализа. Тёрнебом (The space-time theory within the special theory of relativity. An essay in reconstructive analysis. Törnebohm Hakan), Methodos, 1958, 10, № 40, 243—266 (англ.)

Производится анализ теории пространства-времени в специальной теории относительности в смысле последовательного построения теории из двух основных принципов: 1) «световой принцип» и 2) принцип относительности. Из этих двух принципов, методом математической логики при помощи дедукции, выводятся формулы преобразований Лоренца; отсюда, как следствие, выводятся: относительность расстояний, метрические соотношения, относительность пространственно-временного интервала (и построение этого понятия), относительность одновременности. Дается ряд определений понятий и операций, необходимых для построения теории (координаты, функциональная форма пространственно-временного интервала, метрические свойства и т. д.). Используя понятие одновременности, автор исследует известные парадоксы, возникающие в специальной теории относительности (парадокс самолета, парадокс близнецов). А. З. Петров

12060. Об основах механики специальной теории относительности. Штиглер (On the mechanical foundation of the theory of special relativity. Stiegler K.), Nuovo cimento, 1959, 13, № 5, 873—879 (англ., рез. итал.)

Строится система аксиом, из которой выводятся основные теоремы и законы специальной теории относительности, как например, закон сложения скоростей, лоренцовы преобразования и т. д., причем аксиомы насыщаются физическим содержанием, которое может претендовать на опытную проверку. Система состоит из следующих пяти аксиом: 1) Преобразование пространственно-временных координат для галилеевых систем отнесения S и S' с относительной скоростью v имеет вид: $x' = a_{11}x + a_{12}t$, $t' = a_{21}x + a_{22}t$, $\dot{x} = (dx/dt) = v$, когда $\dot{x}' = 0$, $\dot{x}' = dx'/dt' = -v$, когда $\dot{x} = 0$.) Масса и энергия каждой материальной частицы удовлетворяют соотношениям $E = \varkappa m$, $\varkappa = \text{const}$. 3) Закон движения Ньютона материальных частиц имеет силу: $\mathfrak{F} = dm(|\dot{\mathfrak{r}}|)\,\dot{\mathfrak{r}}/dt$. 4) Во всех галилеевых системах отнесения физические законы должны иметь одну и ту же аналитическую форму (принцип специальной относительности). 5) Компоненты $\mathfrak{F}$ в x и x', вычисленные соответственно для систем S и S', связаны соотношением $dm(\dot{x})\,\dot{x}/dt = dm(\dot{x}')\,\dot{x}'/dt'$. Из этих аксиом выводятся основные формулы специальной теории относительности: $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, $E = m_0c^2/\sqrt{1-(v/c)^2}$, определяются коэффициенты a_{ij}, фигурирующие в аксиоме 1), показывается, что предельная скорость материальной частицы не зависит от относительной скорости двух галилеевых систем S и S' и потому является универсальной (принцип постоянства скорости света). Исследуется вопрос о том, при каких предположениях из этой системы аксиом может быть получена ньютоновская механика. А. З. Петров

12061. Аксиоматизация общего релятивизма. Моулд (An axiomatization of general relativity. Mould Richard A.), Proc. Amer. Philos. Soc., 1959, 103, № 3, 485—529 (англ.)

Исследуется проблема аксиоматики общего релятивизма, исследуется вопрос о методе построения аксиом для этой физической теории, анализируется постановка вопроса Махом, Клиффордом и другими учеными. Предлагается аксиоматика, состоящая из следующих пяти групп аксиом. I группа с аксиомами: 1) Пространство-время есть многообразие Хаусдорфа,) Для всех точек $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $|\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}}| = |\overrightarrow{\bar{b}\,\bar{a}}|$, 3) Для всех точек $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}}$ и $\overrightarrow{\bar{b}\,\bar{c}}$, то $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{c}} \leqslant \overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}} + \overrightarrow{\bar{b}\,\bar{c}}$, 4) Для всех точек $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таких, что $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}} = 0$ смещение $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}}$ принадлежит к числу тех, для которых $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}}$ или $\overrightarrow{\bar{b}\,\bar{a}}$, 5) Для каждой точки $\bar{a}$ и всех точек $\bar{u}$ пространства $\bar{U}$ (но не времени t) $\bar{u} \subset U$, функция расстояния непрерывна во всем промежутке, 6) Для всех точек $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таких, что $\overrightarrow{\bar{a}\,\bar{b}} < 0$, существует одно наименьшее расстояние. Эта группа таким образом связана с понятием непрерывности, перенесения. Из нее делается ряд выводов и доказываются теоремы, касающиеся понятия „предшествования", „между" и т. д.; более двадцати теорем. II группа с аксиомами 7) и 8), касающимися понятия „проектирования" пространств друг на друга. III группа состоит из одной аксиомы, определяющей элемент расстояния при помощи квадратичной формы $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ и IV группа, также состоящая из одной аксиомы, требующей непрерывности и дифференцируемости компонент метрического тензора в некоторой области заданной системы координат и последняя, V группа, состоящая из аксиомы, требующей для ненулевого тензора материи, в определенной системе координат, положительности компоненты T_{44}. Пользуясь этой аксиоматикой, автор доказывает более 5 теорем, лемм и следствий из них, имеющих место в общей теории относительности. А. З. Петров

12062. Чистое электромагнитное поле в общем релятивизме. Марио (Le champ électromagnétique pur en relativité générale. Mariot Louis), Rend. mat. e applic., 1959, 18, № 1-2, 178—266 (франц.)

Исследуется электромагнитное поле в общем релятивизме. В первой главе, имеющей вводный характер, рассматриваются уравнения Максвелла в классической физике: $\partial_0\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{E}$, $\text{div}\,\mathbf{H} = 0$, $(4\pi i/c) + \partial_0\mathbf{E} = \text{rot}\,\mathbf{H}$, $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\mu$, где $\partial_0 = (1/c)(\partial/\partial t)$, и уравнения второго порядка, являющиеся следствиями уравнений Максвелла, как, например, $\Box\,\mathbf{E} = \Box\,\mathbf{H} = 0$, где $\Box = \partial_{00} - \Delta$, $\partial_{00} = (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$, и исследуется проблема Коши, понятие характеристического многообразия, поверхности волны, параметры разрыва для уравнений Максвелла. Исследование характеристических многообразий позволяет сформулировать понятие распространения и возмущения электромагнитного поля и доказать ряд теорем, таких, например, как: Общий интеграл уравнения характеристик (фронт волны) есть огибающая плоских волн, и др. Во второй главе формулируются уравнения Максвелла $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = (4\pi/c)\,I^\beta$, $\nabla_\alpha({}^*F^{\alpha\beta}) = 0$, где ${}^*F^{\alpha\beta} = {}^1/_2\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$, $F^{\alpha\beta}$ — антисимметрический тензор электромагнитного поля и $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор, определяющий элемент объема в четырехмерном римановом пространстве с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ гиперболического типа, где компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ являются функциями класса C^1 и класса C^2 на куске поверхности. В третьей главе проводится алгебраическое изучение электромагнитного тензора энергии-импульса; так как исследование проводится в точке, то автор вводит неголономный ортрепер и для него проводит совместное исследование главных направлений x^α пространства-времени ($g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$) и собственных

векторов симметрического тензора энергии-импульса $\tau_{\alpha\beta}$, что позволяет выяснить его алгебраическую структуру и выделить два характерных случая: 1) регулярный случай

$$(\tau_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} {}^1/_2(\xi^2+\eta^2) & 0 & 0 & \xi\eta_i \\ & -{}^1/_2(\xi^2-\eta^2) & 0 & 0 \\ & & {}^1/_2(\xi^2-\eta^2) & 0 \\ & & & {}^1/_2(\xi^2+\eta_i^2) \end{pmatrix},$$

$\xi^2 - \eta_i^2 \neq 0$ и 2) сингулярный случай $\xi^2 - \eta_i^2 = 0$. В регулярном случае существуют две ортогональные двумерные собственные плоскости, а в сингулярном существует собственная гиперплоскость, касательная к изотропному конусу. Дается физическая интерпретация для каждого из этих случаев в терминах фотонного потока. В четвертой главе для исследования распространения и возмущения электромагнитного поля в общем релятивизме исследуется проблема Коши для такого поля, определяются прерывности электромагнитного поля, формулируются условия для определения начальных данных Коши для регулярного и сингулярного случаев. В пятой главе формулируются условия интегрируемости для обоих случаев, исследуются интегрируемые частные случаи и физические интерпретации их. В шестой главе рассматривается поляризация сингулярного электромагнитного поля. Монография содержит шесть глав и 47 параграфов и библиографию. А. З. Петров

12063. Тензор энергии и пондеромоторная сила обобщенного пространственно-временного поля. Пателли (Tensore energetico e azioni ponderomotrici di campi generalizzati nello spazio-tempo. Pratelli Aldo M.), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 192—199 (итал.)

См. РЖФиз, 1958, 2649.

12064. Пространственное отражение, обращение времени и сопряженные заряды в спинорных полях. Эрикссон (Space reflection, time reversal and charge conjugation of spinor fields. Eriksson H. A. S. Ark. Fys., 1953, 6, 349—358) (англ.)

Автор рассматривает поведение четырехкомпонентных спинорных полей, удовлетворяющих уравнению Дирака, при спинорных представлениях преобразований, соответствующих пространственным отражениям ($x^i = -x^i$, $t = t$, $i = 1, 2, 3$) и обращению времени ($x^i = x^i$, $t = -t$, $i = 1, 2, 3$). Его обозначения нам кажутся намного более запутанными, чем это необходимо в данной проблеме, и отличаются от обозначений, применяемых другими авторами (например, Brauer R., Weyl H., Amer. J. Math., 1935, 57, 425—449; Veblen O., Neumann J., Geometry of complex domains, Inst. Advanced Study, Princeton, 1936; rev. ed. 1955), которые излагают этот вопрос более подробно и полно. А. Н. Taub

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 749.

12065. Новая форма линейного элемента для сферических симметрических решений в общей теории относительности. Бхатт (A new form of line element for spherically symmetric solutions in general relativity. Bhatt M. P.), J. Maharaja Sayajirao Univ. Baroda, 1954, 3, № 2, 119—123 (англ.)

Автор исследует сферические симметрические статические решения уравнений поля с тензором энергии-импульса $\rho v_i v_k$, где v^k равны нулю. Он находит два недиагональных решения, которые оказываются эквивалентными диагональным решениям, найденным ранее Вайдья (Vaidya, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A., 1951, 33, 264—276). F. A. E. Pirani

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 756.

12066. Введение одного тензора четвертого порядка. Бель (Introduction d'un tenseur du quatrième ordre. Bel Louis), C.r. Acad. sci., 1959, 248, № 9, 1297—1300 (франц.)

Рассматривается тензор четвертого порядка, конструируемый при помощи тензора кривизны, метрического тензора и дискриминантного в пространстве V_4 с сигнатурой $(- - - +)$. Целью такой конструкции является получение тензора, обладающего симметрией и нулевой дивергенцией, что позволяет его использовать в вопросе изучения гравитационной радиации (РЖМат, 1960, 6926). Если $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны V_4, определяемый метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) и $\tau_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор, то можно ввести еще три тензорных поля $(*R)_{\alpha\beta\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=} {}^1/_2\tau_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\rho\sigma}_{\lambda\mu}$,

$$(R_*)_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\tau_{\lambda\mu\rho\sigma}R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta},\quad (*R*)_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\tau_{\lambda\mu\gamma\delta}R^{\rho\sigma\gamma\delta},$$

для которых имеют место соотношения $(*R)_{\alpha\beta\lambda\mu} = (R*)_{\lambda\mu\alpha\beta}$, $(*R*)_{\alpha\beta\lambda\mu} = (*R*)_{\lambda\mu\alpha\beta}$ и, кроме того, ряд дифференциальных тождеств, являющихся следствием тождеств Бианки; в том числе будет иметь место соотношение $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta\lambda\mu} = L^{\lambda\mu,\beta}$, где $T^{\alpha\beta\lambda\mu} = R^{\alpha\rho\lambda\sigma}R^{\beta\mu}_{\rho\sigma} + R^{\alpha\rho\mu\sigma}R^{\beta\lambda}_{\rho\sigma} + (*R*)^{\alpha\rho\lambda\sigma}(*R*)^{\beta\mu}_{\rho\sigma} + (*R*)^{\alpha\rho\mu\sigma}(*R*)^{\beta\lambda}_{\rho\sigma} - 2Ag^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu}$, причем $T^{\alpha\beta\lambda\mu} = T^{\beta\alpha\lambda\mu} = T^{\alpha\beta\mu\lambda} = T^{\lambda\mu\alpha\beta}$, а тензор $L^{\lambda\mu,\beta}$ конструируется из метрического тензора и записанных выше тензорных полей. Доказывается теорема: Если V_4 — пространство Эйнштейна, то $L^{\lambda\mu,\beta} = 0$ и, следовательно, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$, т. е. дивергенция тензора T равна нулю. А. З. Петров

12067. Обобщение ковариантных нелинейных лагранжианов. Стивенсон (Generally covariant non-linear lagrangians. Stephenson G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 4, 375—376 (англ.)

Исходя из того, что, решая методом Палатини вариационные задачи: а) $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\tau = 0$ и б) $\delta\int R^2\times\sqrt{-g}\,d\tau = 0$, где R — скалярная кривизна четырехмерного риманова пространства, получим соответственно системы уравнений поля вида а) $R_{ik} - {}^1/_2Rg_{ik} = 0$ $(g^{ik}\sqrt{-g})_{,l} = 0$ (случай, отвечающий общей теории относительности) и б) $R(R_{ik} - {}^1/_4g_{ik}R) = 0$ $(Rg^{ik}\times\sqrt{-g})_{,l} = 0$, автор ставит вопрос о варьировании некоторой функции от R, приходя таким образом к вариационной задаче: $\delta\int F(R)\sqrt{-g}\,d\tau = 0$. Отсюда следуют, как обобщение предыдущих случаев, уравнения: $F'(R)R_{ik} - {}^1/_2g_{ik}F(R) = 0$ и $(F'(R)g^{ik}\sqrt{-g})_{,l} = 0$, где $F'(R)$ — производная от F по R. Так как при свертывании отсюда следует, что $RF'(R) = 2F(R)$, то „уравнение поля" будет иметь вид: $F'(R)[R_{ik} - {}^1/_4Rg_{ik}] = 0$. Если R — постоянная, то возникает возможность таких значений скалярных кривизн, которые приводят к пространствам Эйнштейна и при нелинейных функциях $F(R)$. Так, например, для $F(R) = \sin R$ дело сводится к определению корней уравнения $\operatorname{tg} R = {}^1/_2R$. А. З. Петров

12068. Проблема скачка первого порядка в общей теории относительности. Папапетру, Тредер (Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Papapetrou Achilles, Treder Hansjürgen), Math. Nachr., 1959, 20, № 1-2, 53—66 (нем.)

Исследуется проблема оценки величины прерывности первых частных производных компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в пространстве общей теории относительности в предположении, что поверхность разрыва расположена в свободном пространстве (вне гравитирую-

щих масс), но в то же время имеет место электромагнитное поле. Эту комбинацию внешнего гравитационного и электромагнитного полей авторы записывают уравнениями поля $R_{\mu\nu} = F_{\lambda\sigma} F^{\sigma}_{\nu} - {}^1/_4 g_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$ при законе сохранения $(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$ и $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, где A_μ представляет потенциалы электромагнитного поля. Если поверхность скачка имеет уравнение $z(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$ и $p_\lambda = z_{,\lambda}$ — ковариантные компоненты нормального к этой поверхности вектора, то, разбивая пространство на два V_4^- (для $z < 0$) и V_4^+ (для $z > 0$) и снабжая плюсом или минусом соответственно значения $g_{\mu\nu}$ для этих двух пространств, можно записать, что $g^{+}_{\mu\nu} = g^{-}_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu} f(z) + \gamma_{\mu\nu} h(z) + \ldots$, где

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & z \geqslant 0, \end{cases} \qquad h(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ {}^1/_2 z^2, & z \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $g^{+}_{\mu\nu} = g^{-}_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu} z + {}^1/_2 \gamma_{\mu\nu} z^2 + \ldots$ а величина скачка первой производной выразится $[g_{\mu\nu,\lambda}] = [\partial g_{\mu\nu}/\partial z] p_\lambda = \beta_{\mu\nu} p_\lambda$, а скачок второй производной

$$[g_{\mu\nu,\lambda\tau}] = \beta_{\mu\nu} p_{\lambda,\tau} + \beta_{\mu\nu,\lambda} p_\tau + \beta_{\mu\nu,\tau} p_\lambda + \gamma_{\mu\nu} p_\lambda p_\tau,$$

где $\beta_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu,\rho}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ равняются значению этих функций при $z = 0$. В случае чисто гравитационного поля величины $\beta_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$ удается выразить через некоторые векторы и скаляры, связанные простыми соотношениями. В случае комбинации с электромагнитным полем прерывность первого порядка допускает выражение через аналогичные величины, но задача усложняется за счет наличия поля $F_{\lambda\mu}$. А. З. Петров

12069. Геометрия тяготения и электромагнетизма. **Уиттен** (Geometry of gravitation and electromagnetism. Witten Louis), Phys. Rev., 1959, 115, № 1, 206—214 (англ.)

Дается независимый вывод уравнений, впервые полученных Райничем, которые показывают, как при некоторых условиях комбинированная теория тяготения и электромагнетизма Эйнштейна — Максвелла может быть объединена и описана исключительно геометрическим языком. Приводятся алгебраические соотношения между тензором Риччи, тензором электромагнитного поля и их основными нулевыми векторами. Показано, что в тех областях пространства-времени, где оба инварианта электромагнитного поля обращаются в нуль, единая теория не может быть применена. Такие области или не существуют в природе, или еще не найдено их чисто геометрическое описание. Использовано преимущество соответствия между тензорами и спинорами, чтобы большинство выкладок выполнить в спинорном пространстве. Резюме автора

12070. Сферические гравитационные волны. **Бордман, Бергман** (Spherical gravitational waves. Boardman John, Bergmann Peter G.), Phys. Rev., 1959, 115, № 5, 1318—1324 (англ.)

Так как уравнения поля общей теории относительности допускают решения, которые могут быть интерпретированы как представляющие гравитационную радиацию, то авторы ставят вопрос об изучении сферических гравитационных волн в первой аппроксимации, исходя при этом из того, что линеаризированные решения можно рассматривать как первые приближения соответствующих строгих решений, обладающих такого же рода симметрией. Исследование ведется в рамках общей теории относительности, когда метрика пространства задается формой $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ и $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, где $\eta_{\alpha\beta}$ — компоненты метрики Минковского. В основу исследования кладется изучение тензорного поля, призванного играть роль тензора Герца в электромагнитной теории; таким „суперпотенциалом“ называется тензор $Z^{[\mu\nu]}$ такой, что $Z^{[\mu\nu]}_{\ \ ,\nu} = \Phi^\mu$, где Φ^μ — электромагнитный потенциал, который удовлетворяет условию $\Phi^\mu_{\ ,\mu} = 0$. Решение уравнения сферических волн берется в виде $Z^{[\mu\nu]} = 1/r\, f^{[\mu\nu]}(t - r)$, где r — радиус-вектор и t — время, чем и определяется в специальной системе координат волновой характер решения. Полагая в первой аппроксимации, что $h_{\mu\nu}$ достаточно мало, авторы записывают уравнения поля и вычисляют соответствующее приближение компонент $\gamma^{\mu\nu}$, имея в виду, что $(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}$. При этом выделяются аналоги радиации чисто „электрического типа“, „магнитного типа“, типа „диполь“ и т. д. Высказываются предварительные соображения о потоке гравитационной энергии. А. З. Петров

12071. Волновое решение уравнений поля в единой теории поля Эйнштейна. **Гхош** (On wave solution of field equations in Einstein's unified field theory. Ghosh N. N.), Indian J. Phys., 1959, 33, № 7, 307—315 (англ.)

Исходя из того, что в единой теории Эйнштейна нестатическое решение уравнений поля может быть задано фундаментальным тензором

$$(g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{kk} & 0 & 0 & a_{kl} \\ 0 & S_{mm} & a_{mm} & 0 \\ 0 & -a_{mm} & S_{nn} & 0 \\ -a_{nl} & 0 & 0 & S_{ll} \end{pmatrix},$$

где S_{kk}, S_{ll}, a_{kl} — функции $x_k + \varepsilon x_l$, ε — постоянная и S_{mm}, S_{nn}, a_{mn} ($k, m, n, l = 1, 2, 3, 4$) будут каждая произведением функций от $x_k + \varepsilon x_l$ и функций x_m вида: $S_{mm} = \Phi_{mm}(x_k + \varepsilon x_l) \cdot \psi_{mm}(x_m)$, $S_{nn} = \Phi_{mn}(x_k + \varepsilon x_l) \times \psi_{nn}(x_m)$, $a_{mn} = \Phi_{mn}(x_k + \varepsilon x_l) \sqrt{\psi_{mm}\psi_{nn}}$, автор ставит вопрос о получении волновых решений. Так как решение этого вопроса зависит от структуры функций ψ_{mm}, ψ_{nn}, а полное исследование уравнений поля показывает, что эти функции удовлетворяют уравнениям, включающим некоторый параметр λ, то возникает следующая классификация: 1) $\lambda < 0$, $\psi_{mm} = 1$, $\psi_{nn} = \sin^2 x_m$ — случай сферически-симметрического поля, 2) $\lambda > 0$, $\psi_{mm} = 1$, $\psi_{nn} = \mathrm{sh}^2 x_m$ и 3) $\lambda = 0$, ψ_{mm}, ψ_{nn} — постоянные. Рассматривается специальный случай, когда имеет место только единственный ненулевой кососимметрический тензор $g_{\mu\nu}$, и показывается, что если поле не сферически-симметрическое, то существует нетривиальное волновое решение. А. З. Петров

12072. Заряженные жидкости в бесконечном проводнике. **Фурес-Брюа** (Fluides chargés de conductivité infinie. Fourès-Bruhat Yvonne), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 18, 2558—2560 (франц.)

Для обобщенного релятивизма с метрикой $ds^2 = g_{\alpha} dx^\alpha dx^\beta$, сигнатурой типа $(- - - +)$ и системой координат, для которой $g_{00} > 0$, $g_{ij} x^i x^j < 0$ ($i, j \neq 0$), предпринимается попытка описания электромагнитного поля заряженной жидкости. Для этого антисимметрическому тензору электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ сопоставляется два четырехмерных векторных поля: вектор электрического поля $e_\beta = F_{\alpha\beta} u^\alpha$ и вектор магнитного поля $h_\beta = F^*_{\alpha\beta} u^\alpha$, где u^α — вектор скорости заряженной

жидкости без индукции и ортогональный к e_α и h_α, а $F^*_{\alpha\beta}$ — тензор, сопряженный $F_{\alpha\beta}$ относительно метрики. Автор предлагает обобщение тензора Максвелла, конструируя его в виде $\tau_{\alpha\beta} = (u_\alpha u_\beta - {}^1/_2 g_{\alpha\beta})(\varepsilon e^2 + \mu h^2) - \varepsilon e_\alpha e_\beta - \mu h_\alpha h_\beta + P_{\alpha\beta}$, где $e^2 = -e^\lambda e_\lambda$, $h^2 = -h^\lambda h_\lambda$, $P_{\alpha\beta} = \nu_\alpha u_\beta + \nu_\beta u_\alpha$, $\nu_\lambda = \eta_{\lambda\mu\nu\rho} e^\mu h^\nu u^\rho$, $\eta_{\lambda\mu\nu\rho}$ — дискриминантный кососимметрический тензор, а вектор ν_λ — четырехмерный вектор Пойнтинга. Тогда уравнения Максвелла записываются в виде $\nabla_\alpha H^{*\alpha\beta} = 0$, $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \gamma u^\beta + \sigma e^\beta$, где $H^{*\alpha\beta}$ выражается через указанные выше векторы, γ — плотность заряда и σ — скаляр, характеризующий проводник. Записывая эти уравнения для неголономного ортрепера, ориентированного специальным образом относительно векторов e_α, h_α, u_α, путем свертываний, автор получает инвариантные соотношения, в том числе выражение для нормы вектора Пойнтинга.

А. З. Петров

12073. Модели движений заряженных частиц в общем релятивизме. Эли (Modèles et mouvements de particules chargées en relativité générale. Hély Jean), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 21, 2962—2964 (франц.)

Формулируются две леммы, позволяющие делать выводы, относящиеся к динамике заряженных частиц в общем релятивизме: 1) если E — некоторая функция от r и ${}^3/_4(\gamma - 1) = r^2 \int (E^2 dr/r) - {}^1/_r \int E^2 r^2 dr$, то метрика $ds^2 = \gamma dt^2 - dr^2/\gamma - r^2(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\theta d\varphi^2)$ описывает модель многообразия, отвечающего радиальному электрическому полю E и действию P (определяемому функцией $8\pi P - E^2 = 4\int (E^2/r)\, dr$), которое уравновешивает результирующую силу этого поля во всякой области, где дивергенция $d(r^2E)/r^2 dr$ отлична от нуля, 2) если E — некоторая функция от r, e — постоянная и $3(\gamma - 1)/4e = r^2 \int E dr/r - {}^1/_r \int E dr$, то метрика $ds^2 = \gamma dt^2 - dr^2/\gamma - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ описывает модель многообразия, отвечающего радиальному электрическому полю E и радиальной электрической индукции D, определяемой условием $D = e/r^2$, когда дивергенция $d(r^2D)/r^2 dr$ равна нулю. В частности, полагая для $r < r_0$ $E = 0$ и для $r > r_0$ $E = e/r^2$, при помощи 1-й и 2-й лемм можно показать, что для $r \leqslant r_0$ $\gamma = 1 - (\lambda r^2/3)$ где $(\lambda = e^2/r_0^4)$ и для $r \geqslant r_0$ $\gamma = 1 - (2m/r) - (e^2/r^2)$ (где $m = 2er/sr_0$), т. е. функция γ непрерывна при $r = 0$ и поле определяется неподвижной частицей с инерцией m и зарядом e. Вычисляя для этих моделей тензор Максвелла, записывая уравнения поля и применяя тождества Бианки, автор отмечает, что вдоль мировых линий элемент электрического заряда равен нулю: $dR = 32\pi f_\beta dx^\beta = 0$, где f_β — плотность лоренцовой силы.

А. З. Петров

12074. Геометрия и ядро (пятое измерение). Сиокос Ф. Техника хроника. Диминеа эпистимоники экдосис, 1957, 13, № 393—394, 152—160 (греч.)

Исходя из того, что четырехмерная геометрия пространства-времени специальной теории относительности позволяет трактовать инвариантным образом уравнения электромагнитного поля и записать уравнения Дирака, из того, что этот факт стал, по мнению автора, возможным вследствие привлечения четвертого измерения, он делает попытку привлечь пятое измерение для объяснения ядерных сил, мотивируя это следующими соображениями: 1) существование частиц с постоянной магнитной массой требует признания пятой координаты x^5, и притом как действительной, т. е. пространственной координаты, 2) геометрия гравитационного поля в общей теории относительности, по мнению автора, является внутренней геометрией кривой четырехмерной гиперповерхности в 5-мерном плоском пространстве, 3) допущение пятого измерения позволяет объяснить наличие аномалии магнитных моментов протона и нейтрона, 4) взаимосвязь между геометрией и физикой должна приводить к пятимерной квантовой геометрии, в которой каждой элементарной частице отвечает особая геометрия. Построения теории основано на гипотезах: 1) допустимы лишь такие преобразования координат, при которых пятое измерение не меняется, 2) оптические и электромагнитные явления проявляются на гиперповерхности 4 измерений (пространство-время) эйнштейновой теории, и пятое измерение характеризуется одномерными многообразиями, ортогональными к этой гиперповерхности. Используя мнимые координаты, элемент длины пятимерной плоской геометрии можно записать в виде: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$. При $x^5 = \mathrm{const}$ (случай А) получится геометрия специальной теории относительности; тот же результат будет иметь место в предположении $x^5 = ks$ (случай В), когда $ds_1^2 \equiv (1 - k^2)\, ds^2 = dx'^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ и скорость вдоль пятого измерения $v^5 = dx^5/ds$ будет равна $v^5 = kc\,(\sqrt{1 - (v^2/c^2)}\,/\sqrt{1 + k^2})$, где $v^2 = (dx_1'^2/ds^2) + (dx_2^2/ds^2) + (dx_3^2/ds^2)$. Далее записываются уравнения мезонного поля в терминах этой геометрической конструкции.

Примечание референта. По поводу соображения 2) следует отметить, что в общем случае пространственно-временной континуум общей теории относительности может быть реализован на гиперповерхности 4 измерений, погруженной не менее чем в 10-мерное плоское пространство, а отнюдь не в пятимерное (Эйзенхарт, Риманова геометрия, 1948, стр. 227, там же библиография).

А. З. Петров

12075. Пересмотр теории относительности. Паласиос (Revisión de la teoría de la relatividad. Palacios Julio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1957, 51, № 2, 165—183; № 3, 245—292; № 4, 405—427 (исп.)

Продолжение ранее опубликованной работы (РЖМат, 1960, 3416).

Гл. IV. Релятивистская оптика. Гл. V. Релятивистские формулы в пространстве четырех измерений. Гл. VI. Электромагнитное поле в пустоте. Гл. VII. Общая теория относительности. Заключение.

12076. Об условиях интегрируемости в проблеме движения в общем релятивизме. Моффат (On the integrability conditions in the problem of motion in general relativity. Moffat John), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 5, 771—785 (англ.)

Проблема получения уравнений движения из уравнений поля в общем релятивизме может решаться методом приближений, как это было сделано впервые в совместной работе Эйнштейна, Инфельда, Гоффмана, причем в случае свободного пространства является эффективным получение аппроксимаций при помощи интегрирования по поверхности, причем оказываются существенными однородные приближенные граничные условия типа Дирихле. Автор модифицирует в этом направлении известные методы аппроксимаций и доказывает при определенных ограничениях, что уравнения движения будут единственными. Для метрики $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, где $\eta_{\alpha\beta}$ определяет пространство Минковского, а $h_{\alpha\beta}$ достаточно малы, при уравнениях поля $R_{\alpha\beta} = 0$, вводятся величины $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 1/2\eta_{\mu\nu}\, n^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, после чего уравнения

поля могут быть записаны в виде $\Phi_{00}+2\Lambda_{00}=0$, $\Phi_{0m}+2\Lambda_{0m}=0$, $\Phi_{mn}+2\Lambda_{mn}=0$, где $\Phi_{00}=-\gamma_{00|ss}$, $\Phi_{0m}=-\gamma_{0m|ss}+\gamma_{0s|ms}$, $\Phi_{mn}=-\gamma_{mn|ss}+\gamma_{ms|ns}+\gamma_{ns|ms}-\delta_{mn}\cdot\gamma_{rs,rs}$ и $\Lambda_{\alpha\beta}$ выражается через вторые производные $\gamma_{\alpha\beta}$. Разлагая $\gamma_{\alpha\beta}$ в ряды по параметру λ и вводя интегральные условия типа $\int\Phi_{mk}n_k ds=0$, где $n_k=\cos(x^n,\mathbf{n})$ и $\mathbf{n}$ — вектор нормали, автор строит алгорифм, в значительной степени упрощающий получение последовательных аппроксимаций. Доказывается единственность уравнений движения, полученных таким образом. А. З. Петров

12077. О решении уравнения Эйнштейна $g_{\mu\nu;\rho}^{+-}=0$.

Докур (Sur la solution de l'équation d'Einstein $g_{\mu\nu;\rho}^{+-}=0$. Dautcourt George), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 21, 2159—2161 (франц.)

Первая группа уравнений поля единой теории Эйнштейна имеет вид: $g_{\mu\nu;\ \rho}^{+-}=0$, и для ее решения существуют различные методы. Автор предлагает новый метод, представляющий собой некоторое усовершенствование метода Тоннла и модификацию способа Эйнштеина-Кауфманна и являющийся общим, за исключением того случая, когда между определителями $\gamma=|g_{\mu\nu}|$, $\varphi=|g_{\mu\nu}|$, $g=|g_{\mu\nu}|$ имеет место соотношение $4\gamma+12\varphi=3g$. Как известно, эта теория развивается на фоне пространства аффинной связности с коэффициентами связности Γ^i_{jk}, относительно которой производится ковариантное дифференцирование, с присоединением фундаментального несимметрического тензора $g_{\mu\nu}$. Модернизация заключается в том, что, обозначая результат повторного воздействия тензором $g_{\mu\nu}$ на некоторый тензорный индекс при помощи операций $A_{\hat{\mu}}=g_{\mu\sigma}g^{\sigma\tau}A_\tau$, $A_{\check{\mu}}=g_{\sigma\mu}g^{\tau\sigma}A_\tau$, $A_{\underset{\wedge}{\mu}}=g_{\mu\sigma}g^{\sigma\hat{\tau}}A_{\hat{\tau}}$, ... и обозначая $\Gamma_{\mu\nu\sigma}=\Gamma^\rho_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$, можно записать уравнения поля в виде $g_{\nu\hat{\mu},\sigma}=\Gamma_{\nu\sigma\hat{\mu}}+\Gamma_{\ \sigma\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $g_{\mu\sigma,\nu}=\Gamma_{\mu\nu,\sigma}+\Gamma_{\nu\sigma,\hat{\mu}}$, $g_{\sigma\hat{\nu},\mu}=\Gamma_{\sigma,\hat{\mu}\hat{\nu}}+\Gamma_{\hat{\mu},\hat{\nu}\hat{\sigma}}$ и циклируя операцию $\wedge$, перейти затем к величинам, допускающим безиндексные обозначения $W=\Gamma_{\mu\nu\sigma}$, $X=\Gamma_{\underset{\sim}{\mu}\nu\sigma}+\Gamma_{\mu\underset{\sim}{\nu}\sigma}+\Gamma_{\mu\nu\underset{\sim}{\sigma}}$, $Y=\Gamma_{\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\nu}\sigma}+\Gamma_{\underset{\sim}{\mu}\nu\underset{\sim}{\sigma}}+\Gamma_{\mu\underset{\sim}{\nu}\underset{\sim}{\sigma}}$, $Z=\Gamma_{\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\nu}\underset{\sim}{\sigma}}$, где операция $\sim$ вводится по правилу $A_{\underset{\sim}{\mu}}=A_{\underset{\wedge}{\mu}}+A_{\check{\mu}}$. Это позволяет перейти к уравнениям, которые можно записать без индекса.

Примечание референта. Формулы (3) и (5) неверны. А. З. Петров

12078. О сферически-симметрических решениях в единой теории поля. Ленуар (Sur les solutions à symétrie sphérique de la théorie du champ unifié. Lenoir Marcel). C. r. Acad. sci., 1960, 250, № 6, 981—983 (франц.)

В единой теории Эйнштейна, базирующейся на геометрии пространств аффинной связности с коэффициентами связности L^k_{ij}, тензором Риччи W_{ij}, определяемой условиями:

$$\mathfrak{G}^{ij}_{\mu\nu}=0,\quad L^j_{ij}=0,\quad W_{ij}=\partial_l L^l_{ij}-\partial_j L^l_{il}+L^l_{ij}L^h_{eh}-L^h_{it}L^t_{nj},$$

уравнения поля могут быть получены вариацией интегралов:

$$I=\int_C \mathfrak{G}^{ij}\left[W_{ij}-2/3\,(\partial_l\Gamma_j-\partial_j\Gamma_l)\right]d\tau \text{ и}$$

$$I=\int_C \mathfrak{G}^{ij}\left[L^t_{ih}L^h_{tj}-L^t_{ij}L^h_{th}-2/3\,(\partial_l\Gamma_j-\partial_j\Gamma_l)\right]d\tau,$$

если $\mathfrak{G}^{ij}$ рассматривать как единственные вариационные переменные. Отсюда возникает возможность, заранее задавая некоторые решения уравнений поля, записать соответствующие уравнения Эйлера для данной вариационной проблемы. Эта идея применяется к решению Папапетру, когда метрическая функция задана в виде $\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-(dx^2+dy^2+dz^2)-((1-\alpha)/r^2)\times$ $\times(xdx+ydy+zdz)^2+\alpha dt^2$, $\gamma_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ и варьируемый интеграл приобретает простой вид, а также к решению Боннора. А. З. Петров

12079. Уравнение волны электрона в римановом пространстве. Дирак (The electron wave equation in Riemann space. Dirac P. A. M.), Max — Planck — Festschrift, 1058. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 339—344 (англ.)

Исходя из того, что в специальной теории относительности формулировка уравнения волны электрона через эрмитовы матрицы имеет определенные преимущества, в работе ставится вопрос о решении этой проблемы при наличии гравитационного поля, т. е. для римановых пространства. Так как в специальной теории относительности, при некотором выборе единицы, уравнение волны электрона может быть записано в виде $i(\psi_0+\alpha^r\psi_r)+\beta m\psi=0$, где $\psi_l=(\partial\psi/\partial x^l)$ $(l=0,1,2,3)$ и α^r и β — четырехмерные антикоммутирующие между собой матрицы с квадратами, равными единице, то это уравнение может быть также записано в виде $i\gamma^\mu\psi_\mu+m\psi=0$, где $\mu=0,1,2,3$; $\gamma^0=\beta$, $\gamma^r=\beta\alpha^r$ и $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu}$, таким образом, $\eta^{\mu\nu}$ определяет метрику Минковского. Матрицы α^r и β эрмитовы и, следовательно, оператор ψ эрмитов. В качестве естественного обобщения уравнения волны электрона в гравитационном поле предлагается уравнение того же вида, но при условиях $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$, где справа находятся контравариантные компоненты метрического тензора риманова пространства, отвечающего данному гравитационному полю. В пространстве Минковского для данной проблемы является важной матрица S и ей сопряженная S^*, обладающая тем свойством, что $S^*\beta S=\beta$ и $S^*\alpha^a S=l^a_b\alpha^b$, причем $l^a_c\,l^b_d\,\eta^{cd}=\eta^{ab}$, т. е. $\left(l^a_b\right)$ — матрица преобразования Лоренца. В римановом пространстве вопрос усложняется тем, что оно не допускает существования голономного ортрепера; в статье предлагаются аналоги S и l^a_b, которые выражаются через коэффициенты, выражающие вращение репера при переходе от точки к точке. Дается физическая интерпретация этого построения. А. З. Петров

12080. Общие решения уравнений сохранения в кривых пространствах. Зорский (General solution of the conservation equations in curved spaces. Zorski H.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1959, 7, № 10, 567—571 (англ., рез. русск.)

Тензор энергии-импульса материи $t^{\alpha\beta}$ удовлетворяет законам сохранения $\nabla_\alpha t^{\alpha\beta}=0$ и в плоском пространстве общее решение этой системы n уравнений будет иметь вид $t^{\alpha\beta}=\nabla_\rho\nabla_\lambda F^{\alpha\rho\beta\lambda}$, где тензор F доопределяется алгебраическими условиями $F^{\alpha\rho\beta\lambda}=-F^{\rho\alpha\beta\lambda}=-F^{\alpha\rho\lambda\beta}$

$= F^{\beta\lambda\alpha\rho}$. Автор ставит вопрос об исследовании общих решений этих уравнений в n-мерном пространстве аффинной связности с коэффициентами связности $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, без кручения $\left(\Gamma^{\mu}_{[\alpha\beta]}=0\right)$, предполагая, что это решение имеет вид: $t^{\alpha\beta}=\nabla_\rho\nabla_\lambda F^{(\alpha|\rho|\beta)\lambda}+N^{\alpha\beta}$, где $N^{\alpha\beta}$ — некоторый симметрический тензор. В случае плоского пространства тензор $F^{\alpha\rho\beta\lambda}$ является симметрическим по $\alpha\beta$ автоматически, в рассматриваемом случае этот факт следует заранее потребовать. Доказывается, что $N^{\alpha\beta}$ можно взять в виде $N^{\alpha\beta}=-1/2\,R_{\lambda\rho\omega}{}^{(\alpha}F^{\beta)\omega\rho\lambda}$, но тензор F является не произвольным, а должен удовлетворять n линейным дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. Следовательно, решение будет зависеть от $(n^2(n^2-1)/12)-n$ произвольных функций. В случае римановой связности $N^{\alpha\beta}=-(R/n(n+1))F^{\alpha\beta\rho}_{\rho}$. А. З. Петров

12081. Механика релятивистских жидкостей. Фурес-Брюа (Mécanique des fluides relativistes. Fourès-Bruhat Yvonne), Cahiers phys., 1959, **13**, № 111, 463—468 (франц.)

В рамках общей теории относительности, когда метрика пространства-времени задается формой $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\times$ $\times(\alpha,\beta=0,1,2,3)$ и уравнения поля имеют вид $S_{\alpha\beta}=\varkappa T_{\alpha\beta}\equiv$ $\equiv\varkappa[(\rho+p)u_\alpha u_\beta-pg_{\alpha\beta}]$, при законах сохранения $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=0$ исследуются различные задачи в предположении, что поле определяется релятивистской жидкостью. Уравнения закона сохранения можно разбить на две группы: $\nabla_\alpha[(\rho+p)u^\alpha]-u^\alpha\partial_\alpha p=0$ — уравнения непрерывности и $u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta-(\partial_\alpha p/(\rho+p))(g^\alpha_\beta-u^\alpha u_\beta)=0$ — уравнения движения жидкости. При этих условиях формулируется проблема Коши и указывается метод ее решения в изотермических координатах. В турбулентном случае записываются обобщенные уравнения Гельмгольца в виде $c^\alpha\nabla_\alpha\Omega_{\beta\gamma}=\Omega_{\alpha\beta}\nabla_\gamma c^\alpha+\Omega_{\gamma\alpha}\nabla_\beta c^\alpha$, где $c_\alpha=fu_\alpha$, u_α — 4-скорость, $u^\alpha u_\alpha=1$, $\Omega_{\alpha\beta}=\partial_\alpha c_\beta-\partial_\beta c_\alpha$. Рассматривается случай заряженной жидкости, когда к тензору $T_{\alpha\beta}$ присоединяется тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}=1/4g_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}-F^\rho_\alpha F_{\rho\beta}$, где тензор электромагнитного поля $F_{\lambda\beta}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла $\Delta_\gamma F_{\lambda\mu}+\nabla_\mu F_{\gamma\lambda}+\nabla_\lambda F_{\mu\gamma}=0$ и $\nabla_\lambda F^{\lambda\mu}=I^\mu$, и коротко указывается на пути постановки и решения указанных выше задач в этом случае. А. З. Петров

12082. Об одном общем решении внутренних уравнений Эйнштейна для некоторой группы движений. Бересфорд-Рейнер (Sur une solution générale des équations intérieures d'Einstein pour un mouvement de groupe. Beresford-Rayner Charles), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 19, 2725—2727 (франц.)

Исследуются римановы многообразия V_4 с метрикой, имеющей сигнатуру $(+++-)$, допускающие движение $\nabla_{(\beta}\xi_{\alpha)}=0$, в том случае, когда вектор Киллинга ξ^α имеет отрицательную норму $\left(g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta<0\right)$ и является собственным вектором тензора Эйнштейна $G^\alpha_\beta\xi^\beta=\rho\xi^\alpha$. Сопоставляя вектору Киллинга ξ^α единичный вектор $\lambda_\alpha\left(\xi_\alpha=\nu\lambda_\alpha,\ \lambda^\alpha\lambda_\alpha=-1,\ \nu=\left(-g_{\gamma\delta}\xi^\gamma\xi^\delta\right)^{1/2}\right)$, автор приходит к соотношениям

$$\nabla_\beta\lambda_\alpha+\nabla_\alpha\lambda_\beta=-\varkappa_0\lambda_\beta-\varkappa_\beta\lambda_\alpha, \qquad (1)$$

где $\varkappa_\alpha=\nu^{-1}\nu_{,\alpha}$ — градиентный вектор, откуда следует, что: если тензоры $g_{\alpha\beta}$ и λ_γ удовлетворяют (1), то и тензоры $g'_{\alpha\beta}$, λ'_γ удовлетворяют (1); здесь

$$g'_{\alpha\beta}=\eta g_{\alpha\beta}+(\eta-\zeta^2)\lambda_\alpha\lambda_\beta,\quad \lambda'_\gamma=\zeta\lambda_\gamma,\quad \eta_{,\varepsilon}\lambda^\varepsilon=0.$$

Показывается, что за счет инвариантности преобразований типа $g'_{\alpha\beta}=\eta^6g_{\alpha\beta}-\eta^2(1-\eta^4)\lambda_\alpha\lambda_\beta$, $\lambda'_\gamma=\eta\lambda_\gamma$ всякое решение уравнений (1) можно привести к тому случаю, когда $\eta=\nu$, $\varkappa_\alpha=0$, $\lambda^\alpha=\delta^\alpha_3$, $g_{44}=-1$, $1+g^{44}=$ $=\widetilde{g}_{ij}g^ig^j$, $g^i=\widetilde{g}^{ij}g_j$, $\widetilde{g}_{ij}=g_{ij}+g_ig_j$, $g_i=\psi_{,i}+$ $+1/3\varepsilon_{ijk}\int_{xj}^{xl}\left(h^k+{}^1/_2h^k_{(0)}\right)dx^l$; $h^k=\sqrt{\widetilde{g}}\,g^{kl}\varphi_l$, при этом g^{ij} — трехмерный определенно-положительный тензор, ψ и ν — произвольные скаляры и φ удовлетворяет уравнению $\widetilde{\nabla}_i(\widetilde{g}^{ij}\varphi_{,j})=0$. А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

12083. Геометрические модели и интегральные уравнения. Булиган, Коз (Modèles geométriques et équations intégrales. Bouligand Georges, Coz Marcel), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 7, 635—646 (франц.)

Дается следующий способ конструкции вариационных метрик. Пусть u, v, w — криволинейные координаты в пространстве с аффинными координатами x, y, z, причем $D(x,y,z)/D(u,v,w)\neq0$. Обозначим через $d\sigma(w)$ длину элементарного отрезка с концами $(u+du,\ v+dv,\ w)$ и (u,v,w) и положим $\mu(u,v,du,dv)=\int_{w_1}^{w_2}d\sigma(w)\,dw$. Если $\mu(u,v,du,dv)$ — произвольная вариационная метрика, то задача о представлении ее с помощью этой модели сводится к решению интегрального уравнения вида $\mu(u,v,du,dv)=\int_0^{2\pi}df(u,v,t)\,(\sin^2t\,du^2+\sin t\cos t\times$ $\times\cos e(u,v,t)\,dudv+\cos^2t\,dv^2)^{1/2}$ с неизвестной функцией f. Авторы делают ряд замечаний о разрешимости уравнений такого вида. А. Л. Сницик

12084. О группах алгебраической эквивалентности и алгебраического кручения на келеровых и алгебраических многообразиях. Герарделли (Sui gruppi dell'equivalenza e della torsione algebrica sulle varietà kähleriane e algebriche. Ghèrardelli Francesco), Ann. mat. pura ed appl., 1958, **46**, 71—95 (итал.)

Пусть X — связное комплексное многообразие, U — его универсальное накрывающее пространство, G — фундаментальная группа многообразия X, реализованная в виде группы автоморфизмов накрытия U. Положим $V=U/K$, где K — коммутант группы G. Мероморфная функция f на V называется мультипликативной функцией на X, если она не обращается в 0 и если $|f|$ является однозначной функцией на X. Обозначим через A группу всех мультипликативных функций на X по умножению. Пусть A_0 — подгруппа группы A, состоящая из таких f, что $\sigma^*f=f$ для всех $\sigma\in G$, и A_1 — подгруппа группы A, состоящая из таких f, что $\sigma^*f=f$ для всех элементов σ конечного порядка из G. Группа $G_a=A_1/A_0$ называется группой алгебраической эквивалентности, а $T=A/A_1$ — группой алгебраического кручения многообразия X. Предположим, что X — келерово многообразие,

обладающее тем свойством, что матрица периодов его простых дифференциалов первого рода является матрицей Римана (этим свойством обладают, в частности, алгебраические многообразия). Доказывается, что тогда группа G_a изоморфна q-мерному тору, где q — одномерное число Бетти многообразия X. Если X — алгебраическое многообразие, S — неособый неприводимый дивизор на X, то возникает гомоморфизм группы T в группу T_S алгебраического кручения многообразия S. В некоторых случаях (например, в случае, когда S — плоское сечение) оказывается, что этот гомоморфизм взаимно однозначен. Введенные понятия обобщаются на случай алгебраических многообразий над произвольным полем. В заключение строится пример алгебраического многообразия без особенностей над полем комплексных чисел, имеющего любую наперед заданную конечную абелеву группу T, а также пример алгебраического многообразия без особенностей с любой наперед заданной фундаментальной группой. А. Л. Онищик

12085. Векторные и тензорные поля на симметрических пространствах. Кириллов А. А., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 152—157

На компактном однородном пространстве $\mathfrak{m}$ с полупростой группой движений $\mathfrak{G}$, снабженном мерой и инвариантной относительно $\mathfrak{G}$ метрикой, рассматриваются совокупности скалярных, векторных и тензорных полей с определенным для них скалярным произведением $(V, W) = \int_{\mathfrak{m}} (V(M), W(M))\, d\mu$, где $(V(M), W(M))$ — скалярное произведение, определенное с помощью инвариантной метрики. Рассматривается унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовых пространствах скалярных, векторных и тензорных полей с конечным скалярным квадратом, разлагающееся в прямую сумму конечномерных неприводимых представлений, задаваемых старшими весами. Задача описания весов, которым соответствуют представления, реализующиеся в этих пространствах, в настоящее время не решена.

Доказано распадение множества весов представлений, реализующихся в векторных и тензорных полях на $\mathfrak{m}$ на конечное число „гиперплоскостей", параллельных „пространству" весов представлений, реализующихся в функциях на $\mathfrak{m}$. При этом веса Λ_1 и Λ_2, по определению, принадлежат одной гиперплоскости, параллельной пространству весов представлений, реализующихся в функциях на $\mathfrak{m}$, если существуют веса M_1 и M_2 представлений, реализующихся в функциях на $\mathfrak{m}$, такие, что $\Lambda_1 + M_1 = \Lambda_2 + M_2$. Для симметрических пространств размерности n автором доказано, что веса представлений, реализующихся в тензорных полях ранга k, принадлежат конечному числу „гиперплоскостей" $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l, \ldots \Gamma_r$, каждой из которых поставлены в соответствие вес Λ_l и числа p_l такие, что представление с весом $\Lambda \in \Gamma_l$ реализуется в полях тензоров k-го ранга не более p_l раз, представление с весом Λ, представимым в виде $\Lambda = \Lambda_l + M$, где M — вес представления, реализующегося в функциях на $\mathfrak{m}$, реализуется в тензорах k-го ранга ровно p_l раз и $\sum_{l=1}^{r} p_l < n^k$.

Разобранные примеры показывают, что для представлений в гильбертовом пространстве векторных полей на группе унитарных матриц $(n+1)$ порядка с определителем, равным 1, достигается оценка для $\sum_{l=1}^{r} p_l$, а на n-мерной сфере $(n > 3)$ $\sum_{l=1}^{r} p_l < n$.

В работе также сформулирована следующая гипотеза: Для любого симметрического пространства $\mathfrak{m}$ существует конечное число весов $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l, \ldots \Lambda_r$ таких, что представление с весом Λ реализуется в векторных полях на $\mathfrak{m}$ столько раз, сколькими способами вес Λ представляется в виде $\Lambda = \Lambda_l + M$, где Λ_l — один из весов $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$, а M — вес представления, реализующегося в функциях на $\mathfrak{m}$. Э. Б. Ершов

12086. Об одной теореме Пуанкаре. Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 3, 490—493

Обобщается теорема Пуанкаре о среднем числе вращений на торе. Рассматривается компактное дифференцируемое многообразие M. Не нарушая общности, можно считать, что M снабжено римановой метрикой. Пусть $x \to x_t$ — определенная на M однопараметрическая группа преобразований с инвариантной мерой μ, причем 1) для почти всех $x \in M$ существует $l(x) = dx_t/dt$ и $\int_M |l(x)|\, d\mu < +\infty$ ($|l(x)|$ — длина вектора $l(x)$ в римановой метрике); 2) соответствующая динамическая система эргодична. Фиксируем точку $x \in M$, имеющую односвязную окрестность U, которая пересекается траекторией x_t (исходящей из x) бесконечно много раз (этим свойством обладают почти все $x \in M$). Далее, пусть $t_1 < t_2 < \ldots$, $t_k \to \infty$ $x_{t_k} \in U$. Обозначим через $\gamma(t_k)$ определенный с точностью до гомологичности цикл, состоящий из отрезка пути x_t от x до x_{t_k} и произвольной кривой, целиком лежащей в U и соединяющей x с x_{t_k}. Разложим $\gamma(t_k)$ по одномерной базе целочисленных гомологий $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ многообразия M: $\gamma(t_k) = m_1(t_k)\gamma_1 + \ldots + m_p(t_k)\gamma_p$. Утверждается, что при почти всех $x \in M$ существует не зависящий от x $\lim_{k\to\infty} (m_l(t_k)/t_k) = \lambda_l$. Числа λ_l, определенные с точностью до целочисленной унимодулярной подстановки при дифференцируемом гомеоморфном отображении M на себя, называются средними частотами вращения относительно цикла γ_l. В качестве приложения доказанной теоремы рассматривается поток геодезических на двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Ю. Е. Боровский

12087. Интегрирование дифференциальной формы на комплексном аналитическом подмногообразии. Ле-Лонг (Integration of a differential form on an analytic complex subvariety. LeLong Pierre), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 2, 246—248 (англ.)

Дается точное определение оператора интегрирования $t(\varphi) = \int_W \varphi$ от внешней дифференциальной формы φ на комплексном аналитическом подмногообразии W области D пространства $C^n(z_1, \ldots, z_n)$. Дается теорема существования $t(\varphi)$ и доказывается, что $t(\varphi)$ — замкнутый поток в D.

Определяя далее положительный поток как поток $t(\varphi)$, удовлетворяющий двум требованиям: 1) $t(\varphi)$ — однородный поток степени (q, q) относительно $dz_l, d\bar{z}_l$; 2) для любого комплексного q-вектора A^q, фундаментальная форма которого есть $\Omega(A^q)$, имеет место неравенство $\int t \wedge {}^*\Omega(A^q) > 0$, где ${}^*\Omega(A^q)$ — форма, сопряженная форме $\Omega(A^q)$, — автор доказывает основную теорему: Если W^p есть p-мерное комплексное аналитическое подмногообразие области D пространства C^n, то положительный поток степени (p, p), определенный равенством $t_0(\varphi) = \int_{W_0^p} \varphi$ (где W_0^p есть множество обыкновенных точек W^p и $E_1 = W^p - W_0^p$), сходится в $D - E_1$. Продолжение t потока t_0 есть замкнутый положительный поток $t(\varphi)$ от форм φ с компактным носителем в D. В. А. Гаухман

12088. О вложении V-многообразий в проективное пространство. Бейли (On the imbedding of V-manifolds in projective space. Baily W. L.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 2, 403—430 (англ.)

Основной результат работы состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{D}$ — компактное комплексно-аналитическое V-многообразие. Предположим, что на $\mathfrak{D}$ существует пучок

комплексных линейных пространств такой, что в его характеристическом классе содержится замкнутая положительно определенная форма типа (1, 1). Тогда существует бирегулярное комплексно-аналитическое отображение Φ V-многообразия $\mathfrak{D}$ в комплексное проективное пространство, причем Φ есть гомеоморфное отображение $\mathfrak{D}$ на некоторое алгебраическое многообразие.

Для доказательства автор переносит на V-многообразия теорему Дольбо — Кодаиры (РЖМат, 1954, 3272), а также использует результаты своей предыдущей работы (РЖМат, 1959, 6288). Д. В. Беклемишев

12089. Об аналитических векторах. Яно. Сугаку, 1957, **8**, № 4, 193—206 (японск.)

Хорошо известно, что в компактном келеровом пространстве ковариантный аналитический вектор является гармоническим вектором и обратно (Rham G., Kodaira K., Harmonic Integrals. Princeton, 1950; РЖМат, 1957, 8927). Однако нам не так много известно относительно контравариантных аналитических векторов. Целью работы является объяснение некоторых результатов, касающихся контравариантных аналитических векторов, полученных автором (РЖМат, 1950, 3190 К) и доказательство некоторых новых, относящихся к ним, результатов. A. Kawaguchi

Перевод из Math. Revs, 1959, **20**, № 3, 294.

12090. Пространство тензоров присоединенного типа, связанное с главным расслоенным пространством. Подпространства. Гомоморфизмы. Араньоль (Espace des tenseurs de type adjoint associé à un espace fibré principal. Sous-espaces. Homomorphismes. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 22, 2683—2686 (франц.)

Пусть $\mathfrak{E}$ — дифференцируемое главное расслоенное пространство с базой X и группой G. Группа G действует на своей алгебре Ли $\mathbf{G}$ при помощи присоединенного представления и поэтому с $\mathfrak{E}$ связано расслоенное пространство $\mathfrak{L}^0(\mathfrak{E})$ со слоем $\mathbf{G}$ (пространство тензоров присоединенного типа). Пусть $\mathfrak{L}'^0 \subset \mathfrak{L}^0(\mathfrak{E})$ — расслоенное подпространство, слоем которого является подалгебра алгебры $\mathbf{G}$. Обозначим через L' пучок ростков дифференциальных форм на X со значениями в этом расслоенном пространстве. Доказывается, что $\mathfrak{L}'^0$ является пространством тензоров присоединенного типа для некоторого главного расслоенного подпространства $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{E}$ существует такая связность ω, что кривизна $\Omega(\omega)$ есть сечение пучка L' и что соответствующее ковариантное дифференцирование переводит L' в себя (РЖМат, 1958, 2401). Пусть $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}'$ — главные расслоенные пространства над X с группами G и G' соответственно и пусть заданы гомоморфизмы $\varphi: G \to G'$ и $h: \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$, для которых $h(ys) = h(y)\,\varphi(s)$ $(y \in \mathfrak{E}, s \in G)$. Определяются естественные гомоморфизмы (в обозначениях цитированной выше работы автора): $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}: \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$, $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})}: \mathfrak{L}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{L}(\mathfrak{E}')$, $\varphi_{L(E)}: L(E) \to L(E')$ и $\varphi_{C(E)}: C(E) \to C(E')$.

А. Л. Онищик

12091. Пространство тензоров присоединенного типа. Гомоморфизмы. Араньоль (Espace des tenseurs de type adjoint. Homomorphismes. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 25, 3014—3016 (франц.)

Начало см. реф. 12090.

Автор пользуется обозначениями своей предыдущей заметки. Пусть (φ, h) и (φ_1, h_1) — два гомоморфизма пространства $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{E}'$. Доказывается, что если соответствующие им гомоморфизмы $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})}$, $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}$ и $\varphi_{C(E)}$ совпадают, то существует такой $s \in G$, что $h_1(y) = h(ys)$ $(y \in \mathfrak{E})$. Пусть заданы главные расслоенные пространства $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}'$ над X с группами G и G' и в них заданы связности ω и ω'. Пусть также заданы гомоморфизмы $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})}: \mathfrak{L}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{L}(\mathfrak{E}')$ и $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}: \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$, причем если Δ, Δ' — ковариантные дифференцирования относительно ω и ω', то $\Delta' \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \Delta$ и $\varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)) = \Omega(\omega')$, где $\varphi_{L(E)}$ — гомоморфизм пучков, индуцированный отображением $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})}$. Изучается вопрос о существовании гомоморфизма (φ, h) расслоения $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{E}'$, индуцирующего эти гомоморфизмы. А. Л. Онищик

12092. Пространство тензоров присоединенного типа. Существование гомоморфизмов. Араньоль (Espace des tenseurs de type adjoint. Existence des homomorphismes. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 26, 3124—3126 (франц.)

Доказывается, что если пространство X односвязно, а группа G связна, то вопрос о существовании гомоморфизма (φ, h), поставленный в предыдущей работе автора, решается положительно. При этом выполнено равенство $\varphi_{C(E)}(\omega) = \omega'$. Отсюда вытекает, что главное расслоенное пространство $\mathfrak{E}$ однозначно определяется пространством $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})$, оператором Δ и кривизной $\Omega(\omega)$, индуцированными некоторой связностью ω в $\mathfrak{E}$.

А. Л. Онищик

12093. Пространство тензоров присоединенного типа. Теоремы существования. Араньоль (Espace des tenseurs de type adjoint. Théorèmes d'existence. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 2, 134—136 (франц.)

Пусть $\widetilde{\mathfrak{L}}^0$ — расслоенное пространство алгебр Ли с базой X и слоем $\mathbf{G}$. Обозначим через $\widetilde{L}$ пучок ростков дифференциальных форм на X со значениями в $\widetilde{\mathfrak{L}}^0$. Пусть заданы сечение $\widetilde{\Omega}$ пучка $\widetilde{L}^2$ и эндоморфизм $\widetilde{\Delta}$ пучка векторных пространств $\widetilde{L}$, удовлетворяющие условиям: $\widetilde{\Delta}\,\widetilde{L}^p \subset \widetilde{L}^{p+1}$; $\widetilde{\Delta}(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^p \alpha \wedge \widetilde{\Delta}\theta$ $(\theta \in \widetilde{L}_x$, α — росток формы степени p с числовыми значениями); $\widetilde{\Delta}[\theta, \theta'] = [\widetilde{\Delta}\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, \widetilde{\Delta}\theta']$ $(\theta \in \widetilde{L}^p_x, \theta' \in \widetilde{L}_x)$; $\widetilde{\Delta}^2\theta = [\widetilde{\Omega}, \theta]$ и $\widetilde{\Delta}\widetilde{\Omega} = 0$. Доказывается, что если X односвязно, то существует главное расслоенное пространство $\mathfrak{E}$ с базой X и структурной группой G (алгеброй Ли которой является $\mathbf{G}$), имеющее $\widetilde{\mathfrak{L}}^0$ в качестве пространства тензоров присоединенного типа и допускающее такую связность ω, что $\Omega(\omega) = \widetilde{\Omega}$ и что Δ — связанное с ω ковариантное дифференцирование. А. Л. Онищик

12094. О многообразиях, которые допускают некоторую аффинную связность. Исихара, Обата (On manifolds which admit some affine connection. Ishihara Shigeru, Obata Morio). J. Math., Tokyo 1, 1953, 71—76 (англ.)

Расслоенное пространство аффинных связностей над многообразием n измерений имеет слой, гомеоморфный евклидову пространству E_{n^3} и допускает сечение (Steenrod, Ann Math., 1942, **43**, № 2, 116 — 131). Автор показывает, что симметрические связности, допускающие p векторных полей v_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$, всюду не зависимых на многообразии, таких, что $[v_\alpha, v_\beta] = 0$, в качестве ковариантно постоянных, удовлетворяют некоторым линейным соотношениям, так что остающиеся слои допустимых связностей образуют суженное пространство. Вследствие этого также существуют и линейные связности, удовлетворяющие этим условиям. Рассматривается вопрос о дифференцируемости полученного сечения в зависимости от соответствующих свойств заданных векторных полей. Если M компактно и ориентируемо, класса C^∞ и если $p = n$, то отсюда следует, что p-е число Бетти многообразия M равно C^p_n. A. Nijenhuis

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1,79.

12095. Понятие жесткого движения. Райнер (Le concept d'un mouvement rigide. Rayner C. B.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 4, 478—483 (франц.)

Рассматривается вопрос о жестком движении в римановом пространстве, которое определяется уравнениями $\nabla_\alpha\lambda_\beta + \nabla_\beta\lambda_\alpha - \lambda^\gamma(\lambda_\alpha\nabla_\gamma\lambda_\beta + \lambda_\beta\nabla_\gamma\lambda_\alpha) = 0$, обобщающими уравнения Киллинга; здесь λ^α — векторное поле, касательное к конгруэнции, являющейся траекторией жесткого движения. Для случая определенно-положительного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, формулируется система определений и условий, позволяющих подойти к корректной постановке вопроса. Так, вводятся условия на класс функций и тензоров, участвующих в рассуждении, понятие расслоенности пространства, расстояния между точками $d(x,y)$, расстояния между точкой и кривой $l(x, \lambda)$, понятие местной жесткости и ряд других. Исследуются условия, возникающие при дифференцировании уравнений движения. Эти выводы в принципе применимы к случаю римановой метрики гиперболического типа, но при этом возникают специфические трудности, связанные прежде всего с наличием изотропных направлений и требующие углубления теории.

А. З. Петров

12096. Модификации многообразий в точку. Гуггенхеймер (Modifications of a manifold in one point. Guggenheimer H. Math. Japon., 1956, **4**, 5—11) (англ.)

Автор продолжает изучать топологические свойства модификаций (РЖМат, 1959, 8497). В этой работе он рассматривает модификации $(\bar{M}, \bar{V})$ многообразия M в подмногообразие $V \subset M$ (не обязательно комплексных многообразий), для которых V является просто точкой. В этом случае алгебра когомологий $\bar{V}$ вполне определена, включая и мультипликативное строение ее, а алгебра когомологий $\bar{M}$ определяется алгебрами когомологий $\bar{V}$ и M.

R. C. Cunning

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 664.

12097. Замечания об аналитических расслоенных структурах над компактным келеровым многообразием. Заметка II. Везентини (Osservazioni sulle strutture fibrate analitiche sopra una varietà kählériana compatta. Nota II. Vesentini Edoardo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 5, 505—512 (итал.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 11551. Рассматриваются расслоенные пространства, база которых — n-мерное компактное келерово многообразие V_n, слой — комплексное векторное пространство C_m, а структурная группа $GL(m, C)$. Такое пространство называется C_m-структурой и обозначается W. Пусть φ — гармоническая форма типа (n, p) с коэффициентами в W. Составляются произведения $dz_j'^1 \wedge \ldots \wedge dz_j'^b \wedge \varphi_j$. Здесь $z_j'^a$ — локальные координаты на V_n в координатной окрестности с номером j. Статья содержит формулировку условий, при которых такое произведение не равно тождественно нулю. В число этих условий входит существование в каждой координатной окрестности системы локальных координат, обладающей определенными свойствами. В частности, при выполнении этих условий из $p > n - b$ следует $H^{n,p}(V, W) = 0$. Такие же результаты получены для гармонических форм типа (p, n). Пусть φ — гармоническая форма типа $(0, p)$ (соответственно $(p, 0)$), получены условия для тождественного обращения в нуль произведений $\varphi_j \wedge d\bar{z}_j^a$ (соответственно $dz_j^a \wedge \varphi_j$).

Д. В. Беклемишев

12098. Развертывающиеся семейства гомологий и псевдогомологий. Юза (Familles développables d'homologies et de pseudohomologies. Jůza Miloslav), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, 579—589 (франц.; рез. русск.)

Псевдогомологией проективного пространства S_n $(n \geqslant 2)$ называется неидентичная гомография H, в которой имеются два линейных подпространства S_k и S_{n-k-1} двойных точек (центральные пространства псевдогомологии). При подходящем выборе базиса $A_0, \ldots, A_n$ псевдогомология может быть представлена равенствами

$$HA_i = \rho A_i,\ HA_j = A_j \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = k+1, \ldots, n). \quad (1)$$

Число ρ называется характеристикой псевдогомологии. Если $A_0, \ldots, A_n$, ρ являются функциями некоторого параметра t, то имеют семейство псевдогомологий $\{H(t)\}$. Говорят, что $\{H(t)\}$ имеет огибающую, если для каждого t существует гиперплоскость $\xi(t)$ такая, что для всякой точки $X \in \xi(t)$ имеет место равенство $H^{-1}H'X = \lambda X$, где λ — некоторое действительное число, а производная H' определяется равенством $H'A = (HA)' - HA'$. Плоскость $\xi(t)$ называется плоскостью касания псевдогомологии $H(t)$. Показывается, что необходимо $\lambda = 0$. Рассматриваются два случая:

1) $k = 0$. Псевдогомология становится гомологией. В этом случае огибающая существует тогда и только тогда, когда или точка A_0 (центр гомологии), или гиперплоскость $[A_1, \ldots, A_n]$ (ось гомологии) остаются неподвижными. При этом, если неподвижна ось, то с ней совпадают все плоскости касания гомологий; если неподвижен центр, то при $\rho = \text{const}$ все гиперплоскости касания проходят через него, а при $\rho \neq \text{const}$ эти гиперплоскости не проходят через центр. В каждом случае указывается способ построения семейств гомологий.

2) $0 < k \leqslant n - 2$. В этом случае огибающая существует тогда и только тогда, когда одно из центральных пространств (пусть это будет S_k) остается неподвижным, $\rho = \text{const}$, а многообразие пространств S_{n-k-1} является развертывающимся в том смысле, что его касательное пространство вдоль каждого S_{n-k-1} имеет размерность $n - k$. При этом все гиперплоскости касания проходят через неподвижное центральное пространство.

Н. И. Кованцов

12099. Теорема об аффинных связностях. Хикс (A theoren on affine connexions. Hicks N.), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 2, 242—254 (англ.).

Пусть M — d-мерное многообразие класса C^∞, m — точка в M; M_m — касательное пространство в m; $B(M)$ — пучок базисов над M; π — отображение $B(M)$ на M. Пусть на $B(M)$ посредством пфаффовой формы ω задана аффинная связность расслоенного пространства; эта связность называется полной, если ее геодезические могут быть продолжены неограниченно (в смысле параметра). Полная связность на $B(M)$ позволяет определить отображения $\exp_m : M_m \to M$ для $m \in M$ и $\mathrm{Exp}_b : M_m \to B(M)$ для $b \in B(M)$ следующим образом. Если T_σ — касательное поле к кривой σ, то пусть $p \in M_m$, а σ_p — геодезическая, для которой $\sigma_p(0) = m$, $T_{\sigma_p(0)} = p$; тогда $\exp_m p = \sigma_p(1)$. Пусть затем γ_p — горизонтальная кривая в $B(M)$ такая, что $\gamma_p(0) = b$, $\pi \circ \gamma_p = \sigma_p$; тогда $\mathrm{Exp}_b p = \gamma_p(1)$. Обозначим через Y совокупность всевозможных конечных последовательностей $(r_1, \ldots, r_d)$, $r_i \in R^d$. Зафиксируем базис $b = (m, e_1, \ldots, e_d)$ в $B(M)$ и определим отображения $m : Y \to M$ и $b : Y \to B(M)$. Обозначим через $\delta_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{id})$ единичные точки из R^d, и пусть $c = (p, f_1, \ldots, f_d) \subset B(M)$; пусть l_c — линейное преобразование $R^d \to M_p$, переводящее δ_i в f_i; положим $\exp_c = \exp_m \circ l_b$,

$\mathrm{Exp}_0 = \mathrm{Exp}_{b_0} \circ l_b$; затем индукцией по n определим (r_t — точки из R^d)

$$\exp_{r_1} = \exp_{\exp_0 r_1} \circ l_{\exp_0 r_1},\quad \mathrm{Exp}_{r_1} = \mathrm{Exp}_{\mathrm{Exp}_0 r_1} \circ l_{\exp_0 r_1},$$

$$\exp_{(r_1,\ldots,r_n)} = \exp_{\exp(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n} \circ l_{\exp(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n},$$

$$\mathrm{Exp}_{(r_1,\ldots,r_n)} = \mathrm{Exp}_{\mathrm{Exp}(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n} \circ l_{\exp(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n},$$

и, наконец, также индукцией по n определим $m(r_1) = \exp_0 r_1$, $b(r_1) = \mathrm{Exp}_0 r_1$, $m(r_1,\ldots,r_n) = \exp_{(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n}$, $b(r_1,\ldots,r_n) = \mathrm{Exp}_{(r_1,\ldots,r_{n-1})r_n}$. При этом $m(r_1,\ldots,r_n) = \pi \circ b(r_1,\ldots,r_n)$. Связность на $B(M)$ определяет d^2+d вещественных форм кривизны и кручения Ω_{ij} и Ω_i. Кроме того, мы имеем d векторных полей $Ei(b)$ на $B(M)$ ($i = 1,\ldots,d$), натягивающих горизонтальное подпространство B_b в точке $b \in B(M)$. Если v, w — два касательных вектора к R^d в начале 0, то положим $v = \sum v_k (\partial/\partial u_k)(0)$, $w = \sum w_a (\partial/\partial u_a)(0)$ и образуем d^2+d действительных функций K_{ij} и K_i:

$$K_{ij}(x) = \Omega_{ij}(\sum v_k E^k(b(r_1,\ldots,r_n)),$$
$$\sum w_a E^a(b(r_1,\ldots,r_n))),$$
$$K_i(x) = \Omega_i(\sum v_k E^k(b(r_1,\ldots,r_n)),$$
$$\sum w_a E^a(b(r_1,\ldots,r_n))),$$

где $x = (r_1,\ldots,r_n; v, w) \in X$, $X = Y \times R_0^d \times R_0^d$. В работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть M и $'M$ — два d-мерных односвязных многообразия класса C^∞, каждое из которых обладает полной аффинной связностью. Если после выбора $b \in B(M)$ и $'b \in B('M)$ окажется $K_{ij}(x) = {}'K_{ij}(x)$, $K_i(x) = {}'K_i(x)$ для любого $x \in X$, то существует дифференцируемый гомеоморфизм M на $'M$, сохраняющий связность и отображающий b в $'b$. Если на $B(M)$ задана полная связность, то для $b = (m, e_1,\ldots,e_d) \in B(M)$ определяются формы $\vartheta_i^b = \omega_i \circ d\,\mathrm{Exp}_b$, $\vartheta_{ij}^b = \omega_{ij} \circ d\,\mathrm{Exp}_b$, $\theta_i^b = \Omega_i \circ d\,\mathrm{Exp}_b$, $\theta_{ij}^b = \Omega_{ij} \circ d\,\mathrm{Exp}_b$; при этом, как показывается в теореме 2, формы ϑ_i, ϑ_{ij} определяются формами θ_i, θ_{ij}.

Теорема 3. Пусть M и N — d-мерные связные многообразия класса C^∞, каждое из которых обладает аффинной связностью. Пусть N полно, а φ — локальный дифференцируемый гомеоморфизм N в M, сохраняющий связность. Тогда N служит накрывающим пространством для M.

Теорема 4. Пусть M и $'M$ — два d-мерных односвязных аналитических многообразия, каждое из которых обладает полной аналитической связностью. Если для базисов $b \in B(M)$ и $'b \in B('M)$ имеем $K_i = {}'K_i$, $K_{ij} = {}'K_{ij}$ на X_1 ($X_1 = R^d \times R_0^d \times R_0^d$), то существует аналитический гомеоморфизм M на $'M$, сохраняющий связность и отображающий b в $'b$.

Теорема 5. Пусть M — односвязное многообразие, на котором определена полная аффинная связность нулевой кривизны и с кручением, инвариантным при параллельных трансляциях. Тогда M имеет структуру группы Ли, так что его связность индуцируется левыми трансляциями.

Теорема 6. Пусть M — связное многообразие с полной аффинной связностью, группа голономии которой сводится к тождеству, а кручение инвариантно при параллельных трансляциях. Тогда существует дифференцируемый гомеоморфизм M на однородное пространство G/K, сохраняющий связность, где G — односвязная группа Ли, K — дискретная подгруппа G, G/K — пространство правых классов смежности, а связность в G/K индуцирована левоинвариантными векторными полями на G.

А. П. Широков

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

12100. Абсолютное исчисление отрезков и его метаматематические приложения. Шмелев (Absolute calculus of segments and its metamathematical implications. Szmielew W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 4, 213—220 (англ.; рез. русск.)

В абсолютной геометрии свободный отрезок определяется как класс конгруэнтности отрезков. Свободный отрезок, определяемый диагональю, выходящей из вершины острого угла четырехугольника Ламберта, стороны которого, примыкающие к другому концу этой диагонали, принадлежат свободным отрезкам X и Y, обозначается через $X \oplus Y$. Свободные отрезки X, Y, X', Y', определяемые отрезками, отсекаемыми на сторонах некоторого угла, соответственно, двумя прямыми, перпендикулярными к некоторой прямой, проходящей через вершину угла, считаются составляющими пропорцию $P(XYX'Y')$. Пропорции обладают всеми свойствами евклидовых пропорций, кроме существования четвертой пропорциональной. Для произвольно выбранного единичного свободного отрезка U умножение свободных отрезков $X \cdot Y = Z$ определяется условием $P(UXYZ)$, а сложение $X + Y = Z$ — условием $\sqrt{X} \oplus \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$. Основной результат: полученная система вложима в поле вещественных чисел и изоморфна системе всех положительных вещественных чисел (евклидов случай) или интервалу от 0 до некоторого положительного R (гиперболический случай). В евклидовом случае соотношение P обращается в евклидову пропорциональность. В гиперболическом случае вводятся, в терминах геометрии Лобачевского, гиперболические умножение и сложение и устанавливаются их связи с абсолютными операциями. Второй основной результат: изоморфизм модели абсолютной геометрии с декартовым пространством или пространством Клейна над замкнутым полем вещественных чисел. Доказательства в большинстве случаев только намечены.

Е. Г. Гонин

12101. О поведении расстояния между двумя точечными множествами при одновременной их симметризации. Дингхас (Über das Verhalten der Entfernung zweier Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben. Dinghas Alexander), Arch. Math., 1957, 8, № 1, 46—51 (нем.)

Пусть M будет F_σ-множество в $E_n = \{(x_1,\ldots,x_n)\}$; при постоянном k положим $E_{n-k}(v_1,\ldots,v_k) = \{(v_1,\ldots,v_k, x_{k+1},\ldots,x_n)\}$. Если для всех $(v_1,\ldots,v_k)$ заменить множества $M \cap E_{n-k}(v_1,\ldots,v_k)$ шарами $x_1 = v_1,\ldots,x_k = v_k$; $x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r$ с той же мерой, то получим множество $\widehat{M} \in F_\sigma$, которое получается из M „симметризацией". Величина $d(A, B) = L(A \cup B - A \cap B)$, где L лебеговская (возможно внешняя) мера, может рассматриваться как расстояние между множествами A и B. Автор показывает, что $d(\widehat{A}, \widehat{B}) = d(A, B) - 2L(\widehat{A} - \widehat{B} \cap \widehat{B - A})$ для $A, B \in F_\sigma$. Все рассуждения могут быть непосредственно перенесены на риманово пространство постоянной кривизны.

W. Kleiner

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

12102 К. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. **Александров** (Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Alexandrow A. D. Akademie-Verlag, Berlin, 1955. xvii, 522 pp, 38.50 DM), (нем.)

Перевод с русского (М. Гостехиздат, 1948).

12103. Выпуклость и линейная связность. **Маршо** (Convexité et connexité linéaire. Marchaud André), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 20, 2843—2844 (франц.)

Множество точек проективной прямой называется связным, если никакая пара его точек не разделяется дополнением. Плоское или пространственное множество линейно связно, если его проекция на любую прямую связна. Изучается структура линейно связных множеств проективной плоскости и (трехмерного) пространства. Доказываются теоремы:

1. Общая граница двух линейно связных взаимно дополнительных множеств проективной плоскости, каждое из которых содержит тройку точек, не принадлежащих одной прямой, есть овал или система двух прямых.

2. Общая граница двух линейно связных взаимно дополнительных множеств проективного пространства, каждое из которых содержит четверку точек, не принадлежащих одной плоскости, есть овоид или выпуклый конус, или система двух плоскостей. Р. С. Гутер

12104. Описанные кубы в евклидовом n-пространстве. **Кэрнс** (Circumscribed cubes in euclidean n-space. Cairns S. S.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 5, 327—328 (англ.)

Статья представляет собой предварительное сообщение о получении в E_n новой оценки снизу числа измерений множества n-мерных кубов, описанных вокруг замкнутого ограниченного множества, содержащего $n+1$ линейно независимых точек. П. М. Олоничев

12105. К теории присоединенных выпуклых тел. **Роджерс** (The compound of convex bodies. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 311—318 (англ.)

В работе Малера (РЖМат, 1957, 2670) приведено неравенство:

$$V(K)/\{\prod_{\alpha=1}^{p} V(K^{(\alpha)})\}^{P/p} \geqslant c, \qquad (1)$$

где $K^{(\alpha)}$ — центрально симметричные выпуклые тела в R_n, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$; K — присоединенное к ним выпуклое тело в R_N (реф. 2669, 1957); p — целое число, $1 \leqslant p \leqslant n-1$; $N = C_n^p$; $P = C_{n-1}^{p-1} = pN/n$; c — положительное число, зависящее только от n и p; V — объем соответствующего тела. Малер доказал неравенство (1) только для случаев, когда тела $K^{(\alpha)}$ являются либо повторением одного тела (т. е. все равны друг другу), либо повторением двух тел.

В реферируемой статье неравенство (1) доказывается для общего случая, когда центрально симметричные тела $K^{(\alpha)}$ все различны. Пусть $H^{(\alpha)}$ — результат применения к телу $K^{(\alpha)}$ операции штейнерового симметрирования относительно всех координатных гиперплоскостей последовательно; $\alpha = 1, 2, \ldots, p$; $J = [H^{(1)}, \ldots, H^{(p)}]$ — присоединенное тело к телам $H^{(\alpha)}$. Доказывается неравенство: $V(J) \leqslant c_4^n V(K)$, где $c_4 = (1/2^p) \times \sum_{\nu=1}^{P} C_P^{\nu} P^{\min\{\nu, P-\nu\}}$. Затем строится принадлежащий телу J N-эдр с вершинами на осях координат R_N, с помощью которого получается оценка: $c = \{N! c_4^n \times 2^{N(p-1)}\}^{-1}$.

Примечание референта. В окончательной формуле (10) автором допущена описка: c_3 (здесь c) должно стоять в степени -1. А. С. Лейбин

12106. Об объеме присоединенного выпуклого тела. **Леккеркеркер** (On the volume of compound convex bodies. Lekkerkerker C. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60** № 3, 284—289; Indagationes math., 1957, **19** № 3, 284—289 (англ.)

Статья посвящена тому же вопросу, что и статья Роджерса (реф. 12105) — доказательству неравенства Малера:

$$V(K)/\left\{\prod_{\alpha=1}^{p} V(K^{(\alpha)})\right\}^{P/p} \geqslant c \qquad (1)$$

для случая различных тел $K^{(\alpha)}$. Доказательство основано на применении неравенства Минковского:

$$V(K^{(\alpha)}) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} m_\nu^{(\alpha)} < 2^n, \qquad (2)$$

где $m_\nu^{(\alpha)}$ — последовательные минимумы функции расстояния тела $K^{(\alpha)}$ относительно целочисленной решетки в R_n. Строится специальный N-эдр, принадлежащий телу K; при помощи этого N-эдра и неравенства (2) доказывается неравенство (1). Для числа c автор получает выражение:

$$c = 1/N!\, 2^{N(p-1)}. \qquad (3)$$

Примечания референта. 1) В конце статьи автор допускает ошибку в элементарных вычислениях, в результате чего формула (3) у него имеет вид: $c = 1/N!$. 2) Оценка автора (3) лучше оценки, полученной Роджерсом (реф. 12105), так как в формуле Роджерса в знаменателе правой части есть еще множитель $c_4^n > 1$; например, при $n=6$ и $p=5$ $17 < c_4 < 18$, а при $n=6$ и $p=4$ $2 \cdot 10^4 < c_4 < 3 \cdot 10^4$. А. С. Лейбин

12107. Правильные конфигурации. **Фейеш-Тот** (Szabályos alakzatok. Fejes Tóth László). Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, **7**, № 1, 39—47 (венг.)

Обзорный доклад о новейших достижениях (преимущественно самого автора) в теории правильных конфигураций.

12108. О выпуклых множествах и прямых на плоскости. **Кёйпер** (On convex sets and lines in the plane. Kuiper N. H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60** № 3, 272—283; Indagationes math., 1957, **19**, № 3, 272—283 (англ.)

Результаты автора относятся к вопросу о существовании общих секущих для плоских выпуклых множест. Этот вопрос рассматривался ранее Сантало, Винченсини, Кли, Грюнбаумом, Хадвигером и др. Замкнутое подмножество G вещественной проективной плоскости P называется сильно выпуклым, если его пересечение с любой прямой в P либо пусто, либо является точкой или замкнутым отрезком. Для семейства F сильно выпуклых подмножеств в P рассматриваются следующие два свойства. Свойство B_i состоит в том, что для любых i множеств из F существует общая секущая (т. е. прямая, пересекающая все эти i множеств). Свойство C_j в том, что для любых j множеств семейства F из прямых, пересекающих по крайней мере два из этих множеств, нельзя образовать цикла, гомологичного прямой в P. Основные результаты: свойство B_n (для произвольного n) следует из логической суммы свойств B_3 и C_4, а также из суммы свойств B_4 и C_3. Пример показывает, что сумма свойств B_3 и C_3 недостаточна. Доказательства используют связь между сильной выпуклостью в P и обычной выпуклостью в аффинных плоскостях, содержащихся в P; этот вопрос изучался ранее Д. Деккером (РЖМат, 1956, 6131) и др. Рас-

сматривается также связь свойства C_f с различными другими свойствами, в частности, с одним свойством, введенным в рассмотрение Грюнбаумом в цитированной выше работе из результатов автора вытекают следствия для аффинной плоскости, являющиеся более точными, чем ранее известные результаты. V. L. Klee
Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 7, 762.

12109. Проблема Минковского и ее обобщения для поверхностей с краем. Буземан (Minkowski's and related problems for convex surfaces with houndaries. Busemann Herbert), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 3, 259—266 (англ.)

r—площадью области G на выпуклой регулярной гиперповерхности F n-мерного евклидова пространства называется величина $\sigma(G)=\int_{\omega(G)} s_r\, d\omega(G)$, где S_r — r-я элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны, а интегрирование выполняется по площади сферического изображения G. Для общих выпуклых гиперповерхностей r-площадь вводится предельным переходом от регулярных.

Автор доказывает единственность выпуклой гиперповерхности с данным краем и заданной r-площадью как функцией множеств на сферическом изображении. Доказывается существование выпуклой шапки с заданной $(n-1)$-площадью и краем в данной гиперплоскости, а также единственность этой шапки с точностью до параллельного переноса. А. В. Погорелов

12110. Некоторые характеристические свойства выпуклых многогранников. Клн (Some characterizations of convex polyhedra. Klee Victor), Acta math., 1959, **102**, № 1-2, 79—107 (англ.)

Рассматриваются свойства выпуклых многогранников, выделяющие их из совокупности всех выпуклых тел. Доказываются различные теоремы. Например, каждое из нижеследующих свойств выпуклого тела влечет за собой остальные: 1) K есть пересечение конечного числа полупространств; 2) K ограничено конечным числом граней; 3) K есть выпуклая оболочка конечного числа точек; 4) K есть выпуклая оболочка конечного числа многогранников; 5) K есть линейная комбинация многогранников. См. также РЖМат, 1959, 11560.
А. В. Погорелов

12111. Исследование многообразий ограниченной кривизны посредством изотермических координат. Решетняк Ю. Г., Изв. Сибирск. отд. АН СССР, 1959, № 10, 15—28

Развивается аналитическая теория двумерных многообразий ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова, основанная на возможности введения изотермического линейного элемента в таких многообразиях

$$ds^2=\lambda(z)\,|\,dz\,|^2 \quad (z=x+iy). \qquad (1)$$

Дается исчерпывающая характеристика функции $\lambda(z)$ для многообразий ограниченной кривизны. Доказываются многочисленные теоремы и среди них следующая. Если кривая γ на плоскости комплексного переменного z имеет ограниченной вариации поворот, то соответствующая кривая многообразия ограниченной кривизны с линейным элементом (1) тоже имеет ограниченной вариации поворот и обратно. А. В. Погорелов

См. также: 11159, 11299, 11300, 11318, 11387, 11623

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

12112. Некоторые условия разрешимости задачи Чаплыгина для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Азбелев Н. В., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 30—35

Для системы уравнений $y_k'=f_k(x,y_1,\ldots,y_n)$, $k=1,2,\ldots,n$, указаны условия, при которых $z_k\geqslant y_k$ (соответственно $z_k\leqslant y_k$), где $\{y_k\}$ — решение системы, а $\{z_k\}$ — заданная система функций. Эти условия разрешимости задачи Чаплыгина вытекают из указанных в этой же статье условий неравенства $K_A(x,s)\geqslant 0$, где $K_A(x,s)$ — матрица Коши, соответствующая линейному уравнению $y'=A(x)y$. Я. И. Алихашкин

12113. Об одном условии неограниченной применимости теоремы С. А. Чаплыгина о неравенствах к системам дифференциальных уравнений первого порядка. Раковщик Л. С., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 3, 378—379

Доказана следующая теорема. Пусть функции $u_1, u_2,\ldots,u_n$ удовлетворяют заданным начальным условиям при $x=x_0$ и неравенствам $u_2'-f_i(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ для $x\in[x_0,x_1]$.

Пусть $\theta_i=u_i+\eta_i$ $(\theta_i=u_i-\eta_i)$, где $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ — решение системы $\eta_i'-K\cdot\sum_{r=1}^{n}\eta_r=|\,u_i'-f_i(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)\,|$, обращающееся в нуль при $x=x_0$ и $y_1,y_2,\ldots,y_n$ — решение системы $y_i'=f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ при условиях $y_i(x_0)=y_{i0}$, K — постоянная Липшица для функции f_i. Тогда, если $|\,\theta_i'-f_i(x,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\,|\leqslant|\,u_i'-f_i(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)\,|$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то $u_i\leqslant y_i$ на всем сегменте $[x_0,x_1]$. Б. Н. Бабкин

12114. Численный метод решения дифференциальных уравнений контроля на вычислительных машинах. Андерсон, Болл, Восс (A numerical method for solving control differential equations on digital computers. Anderson W. H., Ball R. B., Voss J. R.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, **7**, № 1, 61—68 (англ.)

Летающие управляемые системы описываются линейными дифференциальными уравнениями и одновременно нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, (контролирующий механизм). Так как аэродинамические системы имеют относительно гладкое поведение, то правые части нелинейных уравнений можно хорошо аппроксимировать полиномами, зависящими от времени. Тогда дифференциальные уравнения могут быть решены аналитически. Далее аналитическое выражение преобразуется в выражение, дающее возможность находить решение „по шагам“. Найденные таким образом формулы программируются. Использование этого метода снижает время вычислений с 50 час. до 1 часа. В. Е. Говоров

12115. Применение метода Чаплыгина для решения некоторых нелинейных задач радиотехники. Каганов В. И., Радиотехн. и электроника, 1959, **4**, № 12, 1990—1992

Показано, как выгодно применить метод Чаплыгина к уравнению $Q(p)x+\varphi(x)=F(t)$, где x — искомая функция, $Q(p)$ — дифференциальный оператор. Рассмотрен один пример. Я. И. Алихашкин

12116. Оценка погрешности для некоторых самосопряженных обыкновенных краевых задач. Бертрам (Eine Fehlerabschätzung für gewisse selbstadjungierte, gewöhnliche Randwertaufgaben. Bertram G.), Numer. Math., 1959, 1, № 4, 181—185 (нем.)

Для краевой задачи

$$L[y]=\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}(p_{\mu}(x)y^{(\mu)}(x))^{(\mu)}=r(x)\quad(y^0=y),$$

$y^{(\mu)}(a)=y^{(\mu)}(b)=0$ $(\mu=0,1,\ldots,m-1)$, где $p_{\mu}(x)$ и $r(x)$ суть действительные непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $p_{\mu}(x)$ неотрицательны и обладают непрерывными производными до μ-го порядка включительно, $p_m(x)\geqslant p>0$ автор дает оценку для максимального значения погрешности

$$|f|=\max_{a<x<b}|v(x)-u(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^{2m-1}}{p(2m-1)[(m-1)!\,2^m]^2}\int_a^b|L[v]-r|\,dx$$

между приближенным решением $v(x)$, полученным каким-либо приближенным способом (методом Ритца, коллокации, итерации, конечных разностей и т. п.), и точным решением $u(x)$. Предполагается, что приближенное решение непрерывно вместе со своими производными до $2m$-го порядка включительно.

Подробно рассмотрен числовой пример.

Н. Я. Лященко

12117. Применение метода релаксации к решению задачи о пространственном заряде. Линдси (Application of the relaxation method to the solution of space charge problems. Lindsay P. A.), J. Electron. and Control, 1959, 6, № 5, 415—431 (англ.)

Исходные уравнения, которые должны выполняться в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими электродами, имеют вид:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad I_l=2\pi r\rho\dot{r},\quad \dot{r}^2=\frac{2e}{m}V+\dot{r}_a^2,\qquad(1)$$

где V — электростатический потенциал, ρ — пространственный заряд, $\dot{r}$ — радиальная скорость электрона, I_e — общий поток, приходящийся на единицу длины электрода, $-e/m$ — отношение заряда электрона к его массе, ε_0 — диэлектрическая постоянная свободного пространства. Уравнения (1) автор сводит к безразмерному, более удобному для численного интегрирования, уравнению $d^2\chi/dx^2=e^x\chi^{-1/2}$, $x=\ln(r/r_a)$, которое на сетке с шагом h представляет в виде

$$\chi_{k-1}+\chi_{k+1}-2\chi_k-h^2\exp(x_k)\chi_k^{-1/2}-{}^1/_{12}\delta^4\chi_k+$$

$$+{}^1/_{90}\delta^6\chi_k+O(h^8)=0.\qquad(2)$$

Система разностных уравнений, соответствующая уравнению ( ), решается методом релаксации, разработанным Сауссвелом. При этом члены более высоких порядков малости ($-{}^1/_{12}\delta^4\chi_k$, ${}^1/_{90}\delta^6\chi_k$) используются при последних итерациях для увеличения точности.

В. К. Саульев

12118. Исследования метода коллокации. Кадинер (Untersuchungen zur Kollokationsmethode. Kadner Horst), Z. angew. Math. und Mech., 1960, **40**, № 1-3, 99—113 (нем.)

Рассматривается линейная полуоднородная краевая задача

$$L(y)\equiv\sum_{\nu=0}^{n}f_{\nu}(x)\,y^{(\nu)}(x)=r(x),\qquad(1)$$

$$U_{\mu}(y)\equiv\sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left[\alpha_{\mu\varkappa}y^{(\varkappa)}(a)+\beta_{\mu\varkappa}(b)\right]=0\quad(\mu=1,\ldots,n)\qquad(2)$$

при следующих предположениях: 1) Коэффициенты $f_{\nu}(x)$ $(f_n\neq 0)$ в области $[a,b]$ вещественны и n раз непрерывно дифференцируемы. 2) Правая часть $r(x)$ $(\not\equiv 0)$ вещественная и непрерывная в $[a,b]$. 3) Однородная задача $(r(x)\equiv 0)$ имеет только тривиальное решение. 4) Граничные условия имеют вещественные коэффициенты $\alpha_{\mu\varkappa}$ и $\beta_{\mu\varkappa}$ и являются линейно независимыми.

Решение задачи (1), ( ) согласно методу коллокации приближенно ищется в виде

$$w_k(x,c_1,\ldots,c_k)=\sum_{j=1}^{k}c_j u_j(x),.\qquad(3)$$

где $u_j(x)$ — вещественные, линейно независимые полиномы, удовлетворяющие однородным граничным условиям ( ) и система $\{u_j^{(\sigma)}\}$ $(\sigma=0,\ldots,n)$ полна в смысле среднеквадратической метрики. Подстановка (3) в (1) приводит к следующему соотношению для невязки $\varepsilon_k(x)$: $L(w_k(x))=r(x)+\varepsilon_k(x)$ или $\varepsilon_k(x)=\sum_{j=0}^{k}c_j r_j(x)$, $[L(u_j(x))=r_j(x)]$. Коэффициенты c_j в (3) могут быть найдены требованием выполнения условия

$$\sqrt{\int_a^b\varepsilon_k^2(x)dx/(b-a)}=\min.\qquad(4)$$

Автор исследует сходимость метода коллокации (3), (4) и устанавливает оценки погрешности. В результате исследования автора оказалось, что в качестве точек коллокации выгоднее брать нули полиномов Лежандра, чем равноотстоящие точки.

На примерах уравнений $((\ )-x^2)y'')''+40y=\ )-x^2$, $y(\pm 1)=y''(\pm 1)=0$, $x^2y'''+4x^2y''+3xy'+{}^1/_2y=x$, $y(1)=y'(2)=y''(1)+y'(1)=0$ показана эффективность метода коллокации.

В. К. Саульев

12119. Оценки погрешностей приближенных решений дифференциальных уравнений пограничного слоя. Никкель (Fehlerabschätzungen zu Näherungslösungen der Grenzschicht-Differentialgleichungen. Nickel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 436 (нем.)

12120. О наилучших разностных схемах. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 3, 185—188

12121. Аналог функции Грина для обыкновенных разностных уравнений. Абдель-Мессих (A Green's function analogue for ordinary linear difference equations. Abdel-Messih M. A.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1958 (1959), № 22, 43—51 (англ., рез. арабск.)

Рассматривается разностный аналог обычной функции Грина, соответствующей обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для разностного уравнения второго порядка $M[u(x)]\equiv a(x)u(x+h)+b(x)u(x)+c(x)u(x-h)=0$ функция Грина $G(x,z)$ как функция переменной x и параметра z $(z=x_0,x_1,\ldots,x_m)$ определяется следующим образом: 1) $M[G_1]=0$, $M[G_2]=0$;) G удовлетворяет данным граничным условиям; 3) $G_2(z,z)-G_1(z,z)=0$; 4) $G_2(z+h,z)-G_1(z+h,z)=-\dfrac{1}{a(z)}$. Здесь через $G_1(x,z)$ и $G_2(x,z)$ обозначена функция $G(x,z)$ соответственно в областях $x_0\leqslant x\leqslant z$ и $z\leqslant x\leqslant x_m$. При помощи разностного аналога функции Грина граничные задачи и задачи на собственные значения для разностного оператора $M[u]=0$ автор сводит к „суммарным“ уравнениям (Суммарные уравнения — аналог интегральных уравнений). Рассматривается вопрос о построении разностного аналога функции Грина для разностных опера-

торов как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Исследуется также случай разностных операторов выше второго порядка. Приведен числовой пример. В. К. Саульев

12122. О численном решении задачи Дирихле. Нехари (On the numerical solution of the Dirichlet problem. Nehari Zeev. Proc. conf. different. equations, College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 157—178) (англ.)

Предлагаются четыре метода для численного решения задачи Дирихле, основанные на разложениях в соответствующие ортогональные системы функций.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 602—603.

12123. Методы релаксационной техники расчета потенциальных полей. Котал (Metódy relaxačnej techniky riešenia potenciálnych polí. Kotal Miroslav), Strojnoelektrotechn. časop., 1958, 9, № 9, 537—550 (словацк; рез. русск., нем.)

Уравнения Лапласа и Пуассона аппроксимируются на равномерной и неравномерной прямоугольных сетках простейшими сеточными уравнениями. Эти сеточные уравнения решаются «ручным» методом релаксации. Рассматриваются различные модификации метода релаксации. В. К. Саульев

12124. Решение дифференциального уравнения Лапласа путем сжатия границы. Милнс, Потс (Boundary contraction solution of Laplace's differential equation. Milnes Harold W., Potts Renfrey B.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 2, 226—235 (англ.)

Для решения задачи Дирихле внутри круга предлагается следующий метод: граничные значения, заданные на окружности, применяются для нахождения значений искомой функции на концентрической окружности меньшего радиуса, отстоящей от границы на малом расстоянии. Затем эти значения применяются для нахождения функции на концентрической окружности еще меньшего радиуса и т. д. Решение уравнения Лапласа на окружности C_{j+1}, если известны значения искомой функции на окружности C_j, дается следующей приближенной формулой:

$$u\left\{r_{j+1}, \frac{2m-j-2}{2N}\pi\right\} = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{2N} u\left\{r_j, \frac{(2n-j-1)}{2N}\pi\right\} \times$$

$$\times \frac{r_j - r_{j+1}^2}{r_j^2 - 2r_j r_{j+1}\cos\left[\frac{2(n-m)+1}{2N}\pi\right] + r_{j+1}^2}, \quad (m = 1, 2, \ldots, 2N) \qquad (1)$$

(r_{j+1}, r_j — радиусы окружностей C_{j+1} и C_j, N — число равных дуг, на которые разбиты окружности), которая получается путем замены интеграла Пуассона на конечную сумму. Показывается, что все собственные значения матрицы системы (1) находятся внутри единичного круга, что обеспечивает устойчивость вычислительной схемы. В статье не делается попытки оценить погрешность предлагаемого метода. В заключение приводится числовой пример. М. А. Алексидзе

12125. О численном решении уравнений динамики атмосферы. Булеев Н. И., Марчук Г. И. В сб.: Некоторые пробл. метеорол. № 1. М., АН СССР, 1960, 13—23

Получающуюся в результате аппроксимации дифференциальных уравнений динамики атмосферы систему двумерных эллиптических сеточных уравнений

$$-a_{ik}\varphi_{i-1,k} - c_{ik}\varphi_{i+1,k} - b_{ik}\varphi_{i,k-1} - d_{ik}\varphi_{i,k+1} + p_{ik}\varphi_{ik} = f_{ik} \quad (0 < a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} \leqslant p_{ik}) \qquad (1)$$

авторы решают при помощи следующего итерационного метода:

$$z_{ik} = \alpha_{ik}z_{i-1,k} + \beta_{ik}z_{i,k-1} + \gamma_{ik}\psi_{ik} + \gamma_{ik}f_{ik}, \qquad (2)$$

$$w_{ik} = \zeta_{ik}w_{i+1,k} + \delta_{ik}w_{i,k+1} + z_{ik}, \qquad (3)$$

$$\varphi_{ik}^{(n+1)} = (1/p_{ik}\gamma_{ik})(\alpha_{ik}w_{i-1,k} + \beta_{ik}w_{i,k+1} + \zeta_{ik}w_{i+1,k} + \delta_{ik}w_{i,k+1} + \gamma_{ik}f_{ik}), \qquad (4)$$

где $\alpha_{ik} = a_{ik}\gamma_{ik}$, $\beta_{ik} = b_{ik}\gamma_{ik}$, $\zeta_{ik} = c_{ik}\gamma_{ik}$, $\delta_{ik} = d_{ik}\gamma_{ik}$, $\psi_{ik} = r_{ik}\varphi_{i-1,k+1}^{(n)} + s_{ik}\varphi_{i+1,k-1}^{(n)} - \theta_{ik}(r_{ik} + s_{ik})\varphi_{ik}^{(n)}$, $r_{ik} = (1/\gamma_{ik})\alpha_{ik}\delta_{i-1}$, $s_{ik} = (1/\gamma_{ik})\beta_{ik}\zeta_{i,k-1}$, $\gamma_{ik}^{-1} = p_{ik} - a_{ik}(c_{i-1,k} + \theta_{ik}d_{i-1,k})\gamma_{i-1,k} - b_{ik}(d_{i,k-1} + \theta_{ik}c_{i,k-1})\gamma_{i,k-1}$, $0 \leqslant \theta_{ik} \leqslant 1$.

Основная идея этого метода заключается в переходе от разностного уравнения второго порядка (1) к системе разностных уравнений (2) и (3) первого порядка (неполная факторизация). Уравнения (2) и (3) устойчивы в силу неравенств $\zeta_{ik} + \delta_{ik} < 1$, $\alpha_{ik} + \beta_{ik} < 1$. Уравнение (4) соответствует методу Либмана. Скорость сходимости метода (2) — (4) тем больше, чем сильнее величина $a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik}$ отличается от p_{ik} и чем больше значение θ_{ik}. Однако при больших значениях θ_{ik} метод (2) — (4) может расходиться. Сходимость метода (2) — (4) строго доказана только при $\theta_{ik} \equiv 0$. Метод (2) — (4) обобщен авторами на трехмерный случай. В. К. Саульев

12126. О некоторых итеративных методах решения эллиптических разностных уравнений. Келлер (On some iterative methods for solving elliptic difference equations. Keller Herbert B.), Quart. Appl. Math., 1958, 16, № 3, 209—226 (англ.)

Рассматриваются системы разностных уравнений, возникающие при решении эллиптических уравнений с помощью пятиточечных сеточных аппроксимаций (область прямоугольная): $\varphi_{ij} - l_{ij}\varphi_{i-1,j} - r_{ij}\varphi_{i+1,j} - b_{ij}\varphi_{i,j+1} - t_{ij}\varphi_{i,j+1} = s_{ij}$, или, коротко $M\Phi \equiv (I - L - R - B - T)\Phi = S$. Представление

$$M = N - P \qquad (1)$$

порождает итеративный метод решения $N\Phi^{(\nu)} = P\Phi^{(\nu-1)} + S$. Изучаются такие представления (1), в которых $N = N(\gamma) = \gamma_0 I - \gamma_1 L - \gamma_2 R - \gamma_3 B - \gamma_4 T$. Подобное представление задается „схемой“ $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. Естественные дополнительные требования: $\mathrm{Det}\, N(\gamma) \neq 0$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 0$. Качество итеративного метода оценивается величиной $R = -(\log|\lambda|_{\max})^{-1}$, где $\lambda = \lambda(\gamma)$ — собственные числа матрицы $N^{-1}P$, т. е. корни уравнения $\Delta \equiv \mathrm{Det}\,[g_0 I - g_1 L - g_2 R - g_3 B - g_4 T] = 0$, при обозначении $g_i = \gamma_i(\lambda - 1) + 1$ $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. $\lambda(\gamma)$ называется собственным числом схемы γ. Приводится новое (принадлежащее Людвигу) доказательство фундаментальной теоремы: если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $\mathrm{Det}\left[I - xL - \frac{1}{x}R - yB - \frac{1}{y}T\right] = \mathrm{Det}\, M$. Следствием является теорема: Если $\lambda'(\gamma')$ есть собственное число схемы γ' и для другой схемы γ число λ удовлетворяет уравнениям $\left(\frac{g_0}{g_0'}\right)^2 = \frac{g_1 g_2}{g_1' g_2'} = \frac{g_3 g_4}{g_3' g_4'} \neq 0$, то λ есть собственное число схемы γ. Собственные числа $\lambda'(\gamma')$ и $\lambda(\gamma) = \lambda$ в этом случае называются образами друг друга. Выделяются классы схем γ таких, что каждое собственное число схемы γ является образом некоторого собствен-

ного числа выбранной схемы γ'. В частности, определяются классы Γ_A, Γ_B, Γ_C, для которых выбранными схемами служат

$$\gamma' = \gamma_A = (1, 0, 0, 0, 0),$$
$$\gamma' = \gamma_B = (1, 1, 1, 0, 0),$$
$$\gamma' = \gamma_C = (1, 0, 0, 1, 0).$$

Схемы класса Γ_A, например, описываются таблицей

γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
$1/\alpha$	0	$1/\beta$	$1/\beta$	0
$1/\alpha$	$1/\beta$	0	$1/\beta$	0
$1/\alpha$	0	$1/\beta$	0	$1/\beta$
$1/\alpha$	$1/\beta$	0	0	$1/\beta$

где α и β — произвольные числа. Между собственными числами λ и λ_A схем $\gamma \in \Gamma_A$ и γ_A существует соотношение $[\lambda - (1-\alpha)]^2 = (\alpha^2/\beta)\lambda_A^2 [\lambda - (1-\beta)]$. Так, при $\alpha = \beta = 1$ получается метод Зайделя (схема γ_A определяет метод простой итерации) и $\lambda = \lambda_A^2$ (или $\lambda = 0$). Аналогичные рассмотрения получаются для классов Γ_B, Γ_C.

Для случая, когда матрицы $L+R$ и $B+T$ коммутируют, оказывается возможным сравнить схемы классов Γ_A, Γ_B, Γ_C между собой. Оказывается, что в последних двух классах имеются схемы лучшие, чем лучшая схема класса Γ_A.

В качестве примера рассматривается решение системы разностных уравнений для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при задании u на границе. Область квадратная. В простейшем случае квадратной сетки с шагом h получаются следующие результаты:

Схема	$\lvert\lambda\rvert_{\max}$
(1, 0, 0, 0, 0)	$1 - {}^1/_5\pi^2h^2$
(1, 1, 1, 0, 0)	$1 - {}^1/_4\pi^2h^2$
(1, 1, 0, 1, 0)	$1 - \pi^2h^2$
(1, 1, 1, 1, 0)	$1 - {}^1/_2\pi^2h^2$

и при надлежащем выборе α:

Схема	$\lvert\lambda\rvert_{\max}$
$({}^1/\alpha, 1, 0, 1, 0)$	$1 - \sqrt{2}\,\pi h + \pi^2h^2$
$({}^1/\alpha, {}^1/\alpha, {}^1/\alpha, 1, 0)$	$1 - 2\pi h + 2\pi^2h^2$

Если для схемы класса Γ_A положить $\alpha = \beta$, то, кроме указанных автором собственных чисел $\lambda = 1 - \alpha(1-\lambda_A^2)$, имеется еще собственное число $\lambda = 1 - \alpha$. Это обстоятельство может существенно изменить заключение о сходимости итеративного процесса. М. К. Гавурин

12127. Численный метод решения параболических систем. Дуглас (A numerical method for the solution of a parabolic system. Douglas Jim, Jr), Numer. Math., 1960, 2, № 2, 91—98 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\Delta U + a\Delta V = 0, \quad a\Delta U + \Delta V = b\,(\partial V/\partial t), \qquad (1)$$

возникающая при исследовании двухфазового течения несжимаемой жидкости, где коэффициенты a и b — дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соотношениям $|a(x, y, V)| \leqslant B < 1$, $b(x, y, V) \geqslant m > 0$. Уравнения (1) автор аппроксимирует на квадратной сетке неявными сеточными уравнениями

$$(\delta_x^2 + \delta_y^2)\,u_{n+1} + a_n(\delta_x^2 + \delta_y^2)\,v_{n+1} = 0,$$
$$a_n(\delta_x^2 + \delta_y^2)\,u_{n+1} + (\delta_x^2 + \delta_y^2)\,v_{n+1} = b_n(v_{n+1} - v_n)/\Delta t \qquad (2)$$

и показывает, что $|U_n - u_n| = O(\Delta x)$, $|V_n - v_n| = O((\Delta x)^2)$. Система линейных алгебраических уравнений (2) для каждого n решается методом переменных направлений (РЖМат, 1959, 3239), сходимость (и скорость сходимости) которого устанавливается.

В. К. Саульев

12128. Диффузия из точечного источника в пространство, ограниченное непроницаемой плоскостью. Ловерье (Diffusion from a point source into a space bounded by an impenetrable plane. Lauwerier H. A. Appl. Sci. Res., 1956, 6, 197—204) (англ.)

Рассматривается решение уравнения диффузии в полупространстве с цилиндрической симметрией для случая, когда источник помещен в начале. Физически задача сводится к нахождению концентрации частиц металла, испаряющихся между двумя электродами. Плоскость $z=0$ предполагается отражающей. Решение получается методом источника (помещенного вдоль отрицательной оси z). J. Kestin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 400.

12129. Неявный численный метод для решения двумерного уравнения теплопроводности. Бейкер, Олифант (An implicit, numerical method for solving the two-dimensional heat equation. Baker George A., Jr, Oliphant Thomas A.), Quart. Appl. Math., 1960, 17, № 4, 364—373 (англ.)

Для численного решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a^{-2}\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (1)$$

предлагается девятиточечная сеточная схема типа

$$v_{i,j,k} = f_1(u_{i,j,k-1}, v_{i-1,j-1,k}, v_{i-1,j,k}, v_{i,j-1,k}), \qquad (2)$$
$$u_{i,j,k} = f_2(v_{i,j,k}, u_{i+1,j,k}, u_{i,j+1,k}, u_{i+1,j+1,k}), \qquad (3)$$

где $v_{i,j,k}$ — вспомогательная функция. Сеточные уравнения (2), (3) аппроксимируют уравнение (1) с погрешностью порядка $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ и являются абсолютно устойчивыми. Метод (2), (3) обобщается на нелинейное уравнение $(\partial^2U/\partial x^2) + (\partial^2U/\partial y^2) = h(x, y, U)(\partial U/\partial t)$. В этом случае соответствующие системы сеточных уравнений решаются быстросходящимся методом итераций. Основная идея вывода сеточных уравнений (2), (3) заключается в факторизации неявного девятиточечного сеточного уравнения, аппроксимирующего уравнение (1).

В. К. Саульев

12130. Замечание о решении задачи нейтронной диффузии неявным численным методом. Бейкер (Note on the solution of the neutron diffusion problem by an implicit numerical method. Baker George A., Jr), Quart. Appl. Math., 1959, 17, № 3, 314—316 (англ.)

Неявная сеточная схема, предложенная в работе (реф. 13129) применительно к нестационарному уравнению теплопроводности, распространяется на двумерное стационарное уравнение $\nabla D(r)\nabla\varphi - \chi(r)\varphi + S(r) = 0$, которое для этой цели записывается в виде $\beta\varphi + \nabla^2\varphi + \frac{1}{\beta}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = a^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \beta\varphi + \frac{1}{\beta}\frac{\partial^4\varphi^*}{\partial x^2\partial y^2} + \left(\frac{\chi(r)}{D(r)} - \mu\right)\varphi^* + \mu\varphi - \frac{S(r)}{D(r)} + \frac{\nabla D\nabla\varphi^*}{D(r)}$

В. К. Саульев

12131. Неявный численный метод для решения n-мерного уравнения теплопроводности. Бейкер (An implicit, numerical method for solving the n-dimensional heat equation. Baker George A., Jr), Quart. Appl. Math., 1960, **17**, № 4, 440—443 (англ.)

Результаты работы (реф. 12119), касающиеся линейного двумерного уравнения теплопроводности, обобщаются на n-мерный случай: приводится неявное, абсолютно устойчивое сеточное уравнение, аппроксимирующее n-мерное уравнение теплопроводности $\nabla^2 U = S(X, t) + A^2 U + B^2 \frac{\partial U}{\partial t}$, которое на каждом слое решается точно (а не итерациями). В. К. Саульев

12132. Приближенное интегрирование системы двух нелинейных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа с двумя переменными методами С. А. Чаплыгина. Меннам Ким, Успехи матем. наук, 1960, **15**, № 1, 239—240

12133. О приближенном решении линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью разностных уравнений. Крейсс (Über die approximative Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. Kreiss Heinz-Otto. Kungl. tekhögskolans handl., 1958, № 128, 19 S.) (нем.)

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu \left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \qquad (1$$

с начальным условием при $t = 0$ $u(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x_l < +\infty$, $l = 1, 2, \ldots, s$ аппроксимируется соответствующей системой сеточных уравнений

$$u(x, t + k, k) = (I + \lambda Q(t, k))\, u(x, t, k),$$
$$u(x, 0, k) = f(x). \qquad (2)$$

Здесь $(x, t) = (x_1, \ldots, x_s, t)$ — точка в вещественном $(s+1)$-мерном пространстве, $u' = (u_1, \ldots, u_n)$ и

$$P_\nu\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\substack{\sum \nu_l = \nu \\ \nu_1, \ldots, \nu_s}} A(t) \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_s^{\nu_s}}$$

— однородный дифференциальный оператор ν-го порядка. В сеточном уравнении (2) Q означает сеточный (разностный) оператор вида

$$Qu = \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s = -r}^{r} a_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s}(t, k) u(x + h e_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s}, t, k),$$

где $e_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s} = \sum_{l=1}^{s} \gamma_l e_l$, e_l — l-й единичный вектор; $a_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s}(t, k)$ — квадратные матрицы порядка n с элементами, непрерывно зависящими от t; h, k, λ — параметры, для которых имеет место соотношение $kh^{-m} = \lambda = \text{const}$ (k — шаг в направлении оси t).

Автор выводит два необходимых и достаточных условия устойчивости системы (2) с постоянными коэффициентами (одно условие алгебраическое, другое функционально-аналитическое). При этом под устойчивостью понимается следующее. Система (2) называется устойчивой, если существует такая постоянная K, что для всех k и всех решений системы (2), определяемых начальным значением $u(x, t_1)$, $t_1 \in (0, T)$, имеет место неравенство

$$\| u(x, t_2, k) \| < K \| u(x, t_1, k) \|, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T.$$

Если система (2) устойчива при каждом фиксированном t ($t \in (0, T)$), то при выполнении некоторых условий регулярности относительно переменной t система (2) с переменными коэффициентами также будет устойчивой. Далее, для каждой корректно поставленной задачи Коши для уравнения (1) с постоянными коэффициентами автор показывает, как можно построить устойчивую систему сеточных уравнений, решение которой сводится к решению данной задачи Коши. Эти результаты затем обобщаются на случай, когда коэффициенты уравнения (2) зависят от t. Отмечается, что известный критерий Неймана является только необходимым, но не достаточным. В. К. Саульев

12134. О решении задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с частными производными при помощи разностных уравнений. Часть 1. Устойчивые системы разностных уравнений. Крейсс (Über die Lösung des Cauchyproblems für lineare partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. Teil 1: Stabile systeme von Differenzengleichungen. Kreiss Heinz-Otto), Acta math., 1959, **101**, № 3-4, 179—199 (нем.)

Работа близко примыкает к другой работе автора (реф. 12133). Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + b(x, t) =$$
$$= P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + b(x, t), \qquad (1)$$

где обозначения те же, что и в реф. 12133. Относительно коэффициентов этой системы предполагается, что они во всем (x, t)-пространстве определены, достаточно много раз дифференцируемы по всем переменным и что все эти производные в каждой конечной (t)-области равномерно ограничены. Начальные значения принадлежат некоторому банахову пространству. Изучаются устойчивые разностные уравнения

$$u(x, t + k, k) + [I + \lambda Q(x, t, h)]\, u(x, t, k) + kb(x, t), \quad (2)$$

решение которых аппроксимирует с любой степенью точности решения задачи Коши для уравнения (1). Для разностных уравнений с переменными коэффициентами вводится понятие сильной устойчивости: уравнение (2) называется сильно устойчивым, если существует постоянная C, не зависящая от t, u, k, такая, что $\| u(x, t+k, k) \| \leqslant (1 + Ck) \| u(x, t, k) \|$. Сначала рассматривается случай системы (1) с постоянными коэффициентами, затем с переменными. При этом во втором случае вводится обобщенная норма $(u, Bu)^{1/2}$ вместо обычной $(u, u)^{1/2}$. В конце работы исследуются разностные уравнения, соответствующие эрмитовым системам дифференциальных уравнений. Библ. 13 назв. В. К. Саульев

12135. О разностной аппроксимации высокой точности в начальных задачах для дифференциальных уравнений с частными производными. Крейсс (Über die Differenzapproximation hoher Genauigkeit bei Anfangswertproblemen für partielle Differentialgleichungen. Kreiss Heinz-Otto), Numer. Math., 1959, **1**, № 4, 186—202 (нем.)

В другой работе автора (см. реф. 12134) подробно исследован вопрос об аппроксимации системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = F(x, t) \qquad (1)$$

системой разностных уравнений $u(x, t + k, k) - (I + \lambda Q(x, t, h))\, u(x, t, k) = kF(x, t)$. При этом для любой достаточно гладкой функции v имеет место

$$\left\{\frac{v(x, t + k) - v(x, t)}{k} - \frac{\lambda}{k} Q(x, t, h) v\right\} -$$
$$- \left\{\frac{\partial v}{\partial t} - P\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) v\right\} = O(k^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

т. е. локальная погрешность (погрешность аппроксимации) пропорциональна k^{α}. В данной работе автор строит системы устойчивых разностных уравнений, аппроксимирующие данную систему дифференциальных уравнений (1) с погрешностью, пропорциональной k^{α}, где α — любое положительное число. При этом автор ограничивается „для простоты" параболическими системами и симметричными системами дифференциальных уравнений первого порядка. Искомые системы разностных уравнений имеют вид

$$u(x, t+k, k) - u(x, t, k) - \sum_{\mu=-1}^{r} \lambda Q_{\mu} u(x, t-\mu k, k) = \\ = kG(x, t, k), \qquad (2)$$

где λQ_{μ} — соответствующий разностный оператор. Оценки погрешностей, возникающих в решении при замене системы (1) на систему (2), не приводятся.

В. К. Саульев

12136. Исследование численного решения двумерной гидродинамической задачи. Блэр, Метрополис, Нёйман, Тауб, Цингу (A study of a numerical solution to a two-dimensional hydrodynamical problem. Blair A., Metropolis N., Neumann J. von, Taub A. H., Tsingou M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 67, 145—184 (англ.)

Изучается движение двух несжимаемых жидкостей в вертикальной плоскости xoy под действием гравитационной и гидродинамической сил. В эйлеровых координатах x и y это движение описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — компоненты скорости, p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, t — время. В начальный момент $t = 0$ плотность ρ имеет разрыв (в одной части данной области $\rho = 1$, в другой $\rho = 1/8$). На внешней границе жидкости скорость в направлении нормали к границе равна нулю ($u\cos(x, n) + v\cos(y, n) = 0$). Вдоль кривой, на которой ρ имеет разрыв, выполняется соотношение $[u]\cos(x, n) + [v]\cos(y, n) = 0$, где $[f] = f(x^+, y^+) - f(x^-, y^-)$. Исходя из уравнений (1) — (4), авторы получают уравнение для функции тока ψ

$$-(\rho\chi_x)_x - (\rho\chi_y)_y = -\omega, \qquad (5)$$

где $\chi = -\psi_t$, $\omega = -\rho_x(g - I^1) + \rho_y I^2 + \rho I^3$, $I^1 = \psi_x\psi_{xy} - \psi_y\psi_{xx}$, $I^2 = \psi_x\psi_{yy} - \psi_y\psi_{xy}$, $I^3 = \psi_x\lambda_y - \lambda_x\psi_y$, $\lambda = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ с граничным условием $\psi = 0$. Если функция тока ψ найдена, то компоненты скорости u и v можно найти из уравнений $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$, которые следуют из (4), давление p можно вычислить из уравнения (1) или (2), а плотность ρ определяется из уравнения (3), которое можно записать в виде

$$\rho_t = \psi_y\rho_x - \psi_x\rho_y. \qquad (6)$$

Основные сеточные уравнения, аппроксимирующие в узлах прямоугольной сетки $(i\Delta x, j\Delta y)$ уравнения (5) и (6), имеют вид

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\left[-\rho^h_{i+1/2,\,j}\left(\chi^h_{i+1,\,j} - \chi^h_{i,\,j}\right) + \rho^h_{i-1/2,\,j}\left(\chi^h_{i,\,j} - \chi^h_{i-1,\,j}\right)\right] + \\ + \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[-\rho^h_{i,\,j+1/2}\left(\chi^h_{i,\,j+1} - \chi^h_{i,\,j}\right) + \right. \\ \left. + \rho^h_{i,\,j-1/2}\left(\chi^h_{i,\,j} - \chi^h_{i,\,j-1}\right)\right] = -\omega^h_{i,\,j}, \qquad (7)$$

$$\rho^{h+1}_{i,\,j} = \rho^h_{i,\,j} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \times \\ \times \begin{Bmatrix} \left(\rho^h_{i,\,j} - \rho^h_{i-1,\,j}\right), \text{ если } (\psi_y)^{h+1/2}_{i,\,j} < 0 \\ \left(\rho^h_{i+1,\,j} - \rho^h_{i,\,j}\right), \text{ если } (\psi_y)^{h+1/2}_{i,\,j} \geqslant 0 \end{Bmatrix} (\psi_y)^{h+1/2}_{i,\,j} - \\ - \left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right) \begin{Bmatrix} \left(\rho^h_{i,\,j} - \rho^h_{i,\,j-1}\right), \text{ если } (\psi_x)^{h+1/2}_{i,\,j} \geqslant 0 \\ \left(\rho^h_{i,\,j+1} - \rho^h_{i,\,j}\right), \text{ если } (\psi_x)^{h+1/2}_{i,\,j} < 0 \end{Bmatrix} (\psi_x)^{h+1/2}_{i,\,j}. \qquad (8)$$

Система, соответствующая сеточным уравнениям (7), $A\chi = \omega$ (матрица A положительно определенная) решается „лучшим" методом итераций согласно алгорифму $\gamma_l^{k+1} = 2b_{k+1}\left[\gamma_l^k - \gamma_l^{k-1} + \frac{2}{a+b}(\omega - A\gamma_l^k)\right] + \gamma_l^{k-1}$, где $b_1 = 1$, $b_{k+1} = \frac{1}{2 - (1-\varepsilon)^2 b_k}$, $\varepsilon = \frac{2a}{a+b}$, a и b — соответственно нижняя и верхняя грани собственных значений матрицы A. Для системы сеточных уравнений (8) проводится анализ устойчивости. В частности, для устойчивости шаг Δt должен удовлетворять неравенствам $|\psi_y| \leqslant \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $|\psi_x| \leqslant \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Численные расчеты проводились на машине МАНИАК 1; при этом использовалась сетка с 624 узлами. Время, затрачиваемое машиной на просчет одного шага по оси t, равно 18 сек. на каждый итерационный цикл плюс 100 сек. на все остальное. Это составляет около часа (200 итераций) при точности в шесть знаков или около получаса (100 итераций) при точности в три десятичных знака. Около 40% этого времени тратится на пересылку информации из внутреннего запоминающего устройства во внешнее и наоборот. Результаты приведены в виде трех графиков.

В. К. Саульев

12137. О «лучшем» тринадцатиточечном разностном аналоге бигармонического уравнения. Пэн Цинцюань (Peng C. C.), Наньцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Nanjing daxue xuebao. Ziran kexue, Acta Univ. nankin. scient. natur., 1959, № 4, 11—16 (кит.; рез. англ.)

Автор показывает, что сеточное уравнение

$$20u_0 - 8(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + 2(u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \\ + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = 0 \qquad (1)$$

на квадратной сетке является лучшим для аппроксимации бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является лучшим в том смысле, что среди всех тринадцатиточечных сеточных уравнений, аппроксимирующих уравнение (2), оно является наиболее точным.

В. К. Саульев

12138. Изменение показаний приборов (манометров) при вибрации. Сычев А. Д. В сб.: Расчеты на прочность. Вып. 4. М., Машгиз, 1959, 375—394

Задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения вынужденных колебаний шестого порядка

$$Lw \equiv \frac{\partial^6 w}{\partial \beta^6} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{mR^4}{EJ}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2 \partial t^2}\right) = \Phi(w), \quad (1)$$

где

$$\Phi(w) = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial^6 w}{\partial \beta^6} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) + \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)\left(\frac{\partial^5 w}{\partial \beta^5} + \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}\right)\right] + \frac{mR^3}{EJ}\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w\right) + \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + 3\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2w\right)\frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial t^2}\right].$$

Уравнение (1) с соответствующими граничными условиями решается методом итераций. В первом приближении решается линейное уравнение $Lw_1 = 0$, а затем осуществляется метод последовательных приближений согласно формуле

$$Lw_{k+1} = \Phi(w_k). \quad (2)$$

Решение уравнения $Lw_1 = 0$ ищется в виде $w_1 = \Phi \sin \omega t$. В результате для амплитудной функции Φ (Φ — функция от β) получается уравнение $\Phi^{VI} + 2\Phi^{IV} + (1 - (mR^4\omega^2/EJ))\Phi'' + (mR^4\omega^2/EJ)\Phi = 0$, общий интеграл которого имеет вид $\Phi = C_1 \cos \lambda_1 \beta + C_2 \cos \lambda_2 \beta + C_3 \cos \lambda_3 \beta + D_1 \sin \lambda_1 \beta + D_2 \sin \lambda_2 \beta + D_3 \sin \lambda_3 \beta$, где λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2 — положительные корни бикубического уравнения $\lambda^6 - 2\lambda^4 + (1 - K)\lambda^2 - K = 0$ ($K = mR^4\omega^2/EJ$). Величина w_2 ищется из (2) при $k = 1$, где $\Phi(w_1) = -\frac{1}{2R}(1 - \cos 2\omega t) \times \times \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} C_i C_j \lambda_i (\lambda_j^2 - 1)\left[\lambda_j^2\left(\lambda_j^2 - 1\right)\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + 1\right) - \frac{mR^4\omega^2}{EJ}\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 1\right)\right] \sin \lambda_i \beta \cos \lambda_j \beta$, в виде $\omega_2 = a \cos \beta \sin \omega t + B \sin \omega t + f \cos 2\omega t\, \varepsilon$. Здесь B, f и ε — некоторые функции, подлежащие определению при условии удовлетворения уравнения (2) и граничных условий. Искомая величина ε, определяющая среднее смещение показаний прибора при вибрации, имеет вид $\varepsilon = K_1(a^2/R)$, где K_1 — коэффициент, зависящий только от параметра $K = \omega m R^4/EJ$; ω — частота вынужденных колебаний трубки прибора; m — погонная масса единицы длины трубки; R — ее радиус; EJ — жесткость пустотелой трубки. В. К. Саульев

12139. К численному рассмотрению внутренней задачи Неймана и задачи Робина. Мартенсен (Zur numerischen Behandlung des inneren Neumannschen und des Robinschen Problems. Martensen E.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 377—380 (нем.)

Предложен численный метод решения внутренней задачи Неймана для случая двумерной односвязной области посредством замены соответствующего интегрального уравнения для потенциала простого слоя системой линейно зависимых уравнений по формуле прямоугольника. Полученная алгебраическая система уравнений имеет матрицу с нулевыми диагональными элементами; это означает, что для метода требуются только первые производные от функций $x(t)$, $y(t)$ — параметрического представления границы области. На конкретном примере дается сравнение численного решения системы линейно зависимых уравнений с точным решением, а также с решением «почти линейно зависимой» системы, получаемой по формуле прямоугольника непосредственно из интегрального уравнения. Н. Я. Лященко

12140. Применение вариационных методов к расчету передачи тепла излучением. Спарроу (Application of variational methods to radiation heat-transfer calculations. Sparrow E. M. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, № A-120, 6 pp., ill.) (англ.)

Автор применяет метод Ритца для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, к которому сводится задача передачи тепла излучением. Подробно рассмотрен пример передачи тепла излучением для системы двух бесконечных параллельных пластин конечной ширины, показано хорошее согласие приближенного и точного решений. Н. Я. Лященко

12141. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений профиля, непрерывно стекающего в цилиндрическое русло реки, потока. Формика (Sull'integrazione approssimata dell'equazione differenziale dei profili di rigurgito delle correnti permanenti gradualmente variate defluenti in alvei cilindrici. Formica Gianni), Ist. Lombando Sci. Lett. Rend. Cl. sci. mat. nat., 1956, **21**, № 3, 78—88 (итал.)

Квадратурная формула Гаусса и ее модификация применяются в задачах гидравлики. Модифицированная квадратурная формула Гаусса требует знания нулей и полюсов интегрируемой функции на вещественной оси. Из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 236.

12142. Квадратурные формулы, включающие производные от интегрируемой функции. Хаммер, Уик (Quadrature formulas involving derivatives of the integrand. Hammer Preston C., Wicke Howard H.), Math. Comput., 1960, **14**, № 69, 3—7 (англ.)

Показывается существование квадратурных формул типа

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\sum_{i=0}^{(k-1)/2} f^{(2i)}(0)/(2i+1)! + \sum_{j=1}^{m} a_j[f^{(k)}(x_j) - f^{(k)}(-x_j)] + R_{m,k}(f)$$

(k — нечетное положительное целое число),

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\sum_{i=0}^{(k-2)/2} f^{(2i)}(0)/(2i+1)! + \sum_{j=1}^{m} a_j[f^{(k)}(x_j) + f^{(k)}(-x_j)] + R_{m,k}(f)$$

(k — четное положительное целое число). Эти формулы точны для полиномов степени $\leqslant 4m + k$ при k нечетном и полиномов степени $\leqslant 4m + k - 1$ при k четном. В. К. Саульев

12143. Таблицы для использования в квадратурных формулах, включающих производные от интегрируемой функции. Страбл (Tables for use in quadrature formulas involving derivatives of the integrand. Stroble George), Math. Comput., 1960, **14**, № 69, 8—12 (англ.)

Приведены таблицы значений a_j и x_j в квадратурных формулах, рассмотренных в работе (реф. 12142) для $k = 1$ и 2, $m = 1(1)10$. Для этих же значений k и m протабулирована величина $C_{k,m}$, определяемая соотношением:

$$R_{k,m} = C_{k,m} f^{(4m+k+1)}/(4m+1)! \text{ при } k \text{ нечетном},$$

$$R_{k,m} = C_{k,m}\, f^{(4m+k)}/(4m)! \text{ при } k \text{ четном},$$

где $R_{k,m}$ — остаточный член (реф. 12142). В. К. Саульев

12144: Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов. Георгев (в подлиннике Георгиев Георгий) (Georgev Georg), Rozpr. mat., 1955, № 8, 72 s., il. (русск.; рез. англ.)

Обозначая через $C_n^{(m)}$ множество всех полиномов $P(x_1,\ldots,x_m)$ действительных переменных $x_1,\ldots,x_m$, степень которых не превышает n, и через R — область пространства $x_1,\ldots,x_m$, в которой существуют интегралы

$$I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}=\iint_R\ldots\int x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}\,dx_1\ldots dx_m$$

$$(k_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^{m}k_i<n),$$

автор ищет формулы механической кубатуры вида

$$\iint_R\ldots\int P(x_1,\ldots,x_m)dx_1,\ldots,dx_m=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i P(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}) \qquad (1)$$

и

$$\iint_R\ldots\int P(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m=$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{N}P(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}), \qquad (2)$$

которые выполнялись бы для всякого полинома $P\in C_n^{(m)}$ При этом число N должно быть минимальным из всех возможных, а выбор чисел λ_i, $x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}(i=1,\ldots,N)$ в формуле (1) и чисел $\lambda, x_1^{(i)},\ldots, x_m^{(i)}$ $(i=1,\ldots,N)$ в (2) не должен зависеть от полинома $P(x_1,\ldots,x_m)$. Приведены формулы вида (1) и (2) для множеств $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ и $C_1^{(3)}, C_2^{(3)}$ относительно произвольной области R и для множеств $C_3^{(2)}, C_3^{(2)}$ для R_1, симметричной относительно одной точки. Основные результаты работы:

1. Для множества $C_1^{(2)}$ относительно произвольной области R существует только одна формула вида (1) с $N=1$, являющаяся одновременно формулой вида (2), причем

$\lambda_0=I_{00},\ x_0=I_{10}/I_{00},\ y_0=I_{01}/I_{00}$ $(I_{kl}=\iint_R x^k y^l dxdy)$.

2. Формулы вида (1) для $C_2^{(2)}$ относительно произвольной двумерной области R трехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида, зависящее от трех произвольных параметров. Числа x_iy_i $(i=1,2,3)$ суть решения системы трех уравнений

$$F(x_k,y_k;\ 1;\ x_r,y_r,\ 1)=0\ (k<r;\ k,\ r=1,\ 2,\ 3),$$

где

$$F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}0 & z & x & y\\ \zeta & I_{00} & I_{10} & I_{01}\\ \xi & I_{10} & I_{20} & I_{11}\\ \eta & I_{01} & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}I_{00} & I_{10} & I_{01}\\ I_{10} & I_{20} & I_{11}\\ I_{01} & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix},$$

а $\lambda_i>0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ равны $\lambda_i=[F(x_i,y_i,1;\ x_i,y_i,1)]^{-1}$.

3. Для множества $C_2^{(2)}$ существует бесконечное множество формул вида (2) относительно произвольной области R. Эти формулы трехчленны, причем $\lambda=I_{00}/3$, а точки $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ лежат на эллипсе E $F(x,y,1;\ x,y,1)=3/I_{00}$ и удовлетворяют трем уравнениям

$$F(x_k,y_k,1;\ x_r,y_r,1)=0\ (k<r;\ k,r=1,\ 2,\ 3).$$

4. Формулы вида (1) для $C_3^{(2)}$ относительно двумерной области R, симметричной относительно начала координат, четырехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида, зависящих от двух параметров u,v, подчиненных единственному условию $f(u,v;\ u,v)>1$, где

$$f(x,y;\xi,\eta)=-\frac{I_{00}}{\delta}\begin{vmatrix}0 & x & y\\ \xi & I_{20} & I_{11}\\ \eta & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix}I_{20} & I_{11}\\ I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}.$$

Числа $\lambda_i>0$ $(i=1,\ldots,4)$ равны $\lambda_i=I_{00}/2f(x_i,y_i;\ x_i,y_i)$, а точки $M_i(x_i,y_i)$ являются вершинами параллелограмма, описанного около эллипса $f(x,y;\ x,y)=1$.

5. Для множества $C_3^{(2)}$, если R симметрична относительно начала координат, существует бесконечное множество четырехчленных формул вида (2), в которых $\lambda=I_{00}/4$, а $M_i(x_i,y_i)$ суть вершины параллелограмма, описанного около эллипса $f(x,y;\ x,y)=1$ и вписанного в эллипс $f(x,y;\ x,y)=2$. Каждая точка последнего эллипса является вершиной одного такого параллелограмма.

6. Для множества $C_1^{(3)}$ относительно произвольной области R существует одна формула вида (1) с $N=1$, являющаяся одновременно формулой вида (2), причем

$$\lambda=I_{000},\ x_0=I_{100}/I_{000},\ y_0=I_{010}/I_{000},\ z_0=I_{001}/I_{000}.$$

7. Для множества $C_2^{(3)}$ формулы вида (1) относительно произвольной трехмерной области R четырехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида, которое зависит от шести произвольных параметров. Точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\ldots,4)$ суть решения системы шести уравнений

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,\ 1;\ x_r,y_r,z_r,\ 1)=0\ (k<r;\ k,r=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

где $\Phi(x,y,z,t;\ \xi,\eta,\zeta,\tau)$ — некоторый определитель пятого порядка, а $\lambda_i=[\Phi(x_i,y_i,z_i,\ 1;\ x_i,y_i,z_i,\ 1)]^{-1}>0$. $(i=1,\ldots,4)$.

8. Для множества $C_2^{(3)}$ существует бесконечное множество четырехчленных формул вида (2) относительно произвольной трехмерной области R, причем $\lambda=I_{000}/4$, а точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ лежат на эллипсоиде $\Phi(x,y,z,\ 1;\ x,y,z,\ 1)=4/I_{000}$ и удовлетворяют шести уравнениям

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,\ 1;\ x_r,y_r,z_r,\ 1)=0\quad (k<r;\ k,r=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

9. Формулы вида (1) для $C_3^{(3)}$ относительно трехмерной области R, симметричной относительно начала координат, шестичленны. Существует бесконечное множество формул этого вида, зависящее от пяти произвольных параметров. Даются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\ldots,6)$, чтобы (1) была верна для каждого $P\in C_3^{(3)}$ и выражения для $\lambda_i>0$ $(i=1,\ldots6)$.

10. В случае симметричной относительно начала координат трехмерной области R для множества $C_3^{(3)}$ существует бесконечное множество шестичленных формул вида (2), причем $\lambda=I_{000}/6$, а точки $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,\ldots,6)$ удовлетворяют определенным уравнениям.

Изложение иллюстрировано несколькими примерами.

Н. Я. Лященко

12145. Расчет удельной поверхности порошковых веществ при помощи логарифмической бумаги. Фудзино Киёси. Кагаку когаку, Kagaku kogaku, Chem. Engng (Japan), 1960, 24, № 2, 121—123 (японск.)

Речь идет о вычислении интегралов типа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma}\int_0^{x'} e^{-\frac{(\ln x-\ln x_m)^2}{2\ln^2\sigma}} d(\ln x),$$

$$\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma}\int_0^{x'} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x-\ln x_m)^2}{2\ln^2\sigma}} d(\ln x),$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_m} e^{-2{,}303(\ln x-\ln x_m)}.$$

12146. О численном гармоническом анализе. Занден (Zur numerischen harmonischen Analyse. Sanden H. von), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 7-8, 327—328 (нем.)

Рассматриваются вопросы практического гармонического анализа для периодической функции с периодом 2π. Вывод формул базируется на замене интегралов в формулах Эйлера суммами по квадратурным формулам на $2n$ равноотстоящих ординат и группирования членов.

И. Ф. Шелихова

12147. Простой метод вычисления поправки для ускорения силы, проистекающей от рельефа поверхности. Голомб (O uproszczonym sposobie obliczania poprawki dla przyspieszenia ziemskiego pochodzącej od uwzględnienia nierówności terenu. Gołąb Stanisław). Zesz. nauk. Akad. górn.-hutn., 1959, № 17, 15—33 (польск., рез. англ.)

Речь идет о приближенном вычислении интеграла типа

$$\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{h^2(r)+r^2}}.$$

12148. Решение систем линейных уравнений методом Дулиттля. Бетельман (Resolução de sistemas de equações lineares o método Doolittle. Betelman Rubens), Matemática, 1959, **4**, № 12, 33—38 (порт.)

12149. Практическое решение линейных уравнений. Лангефош (On the practical solution of linear equations. Langefors Börge. Techn. Notes. Svenska Aeroplan A. B., 1955, **35**, 24 pp.) (англ.)

12150. Решение алгебраического уравнения четвертой степени. Хампль (Řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně. Hampl Miloslav), Aplikace mat., 1959, **4**, № 6, 463—465 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автор применил метод, при котором уравнение четвертой степени сводится путем линейного преобразования к обобщенному обратному уравнению; благодаря подходящему порядку вычислений ему удалось добиться того, что достаточно найти только один произвольный корень соответствующей кубической резольвенты, а затем решить обратное уравнение (при помощи решения трех квадратных уравнений).

M. Fiedler

12151. Расчет зернохранилищ. Ухань дасюэ цзижань кэсюэ сюэбао, Wuhan daxue ziran kexue xuebao, 1959, № 8, 75—77 (кит.)

Решаются системы вида

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij}=a_j,\ j=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_{il}=b_l,\ l=1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j=\sum_{l=1}^{n} b_l,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=\sum_{l=1}^{n} y_{il},$$

$$i=1,2,\ldots,k,\quad x_{ij}\geqslant 0,\quad y_{il}\geqslant 0.$$

12152. Систематизация прямого метода вычисления определителей. Агрест М. М., Сохумис сахелмцифо педагогиури институтис шромеби, Тр. Сухумск. гос. пед. ин-та, 1958, 10—11, 475—480

Приведен алгорифм для непосредственного вычисления буквенных определителей высокого порядка. Сущность алгорифма заключается в расположении определителя по совокупностям его членов, содержащих одинаковое число элементов главной диагонали.

Из резюме автора

12153. Новый прямой метод решения алгебраической задачи на собственные значения. Фальк (Neue Verfahren zur direkten Lösung algebraischer Eigenwertprobleme. Falk Sigurd. Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges., 1954, **6**, 166—194) (нем.)

12154. К вопросу о решении одного векового уравнения. Гофман Ш. М., Сб. научн. статей. Ташкентск. ин-т инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 9, 73—77

Рассматривается вековое уравнение $F(\lambda)=|K+\sqrt{\lambda}L-\lambda E|=0$, где K и L — симметричные матрицы, K — положительно определенная, L — неотрицательная. Доказана сходимость следующего итерационного процесса для определения λ: $|K-\lambda^{(1)}E|=0$, $|K+\sqrt{\lambda^{(\nu-1)}}L-\lambda^{(\nu)}E|=0$.

В. Е. Говоров

12155. К вопросу об определении основной частоты собственных колебаний упругих систем со многими степенями свободы. Гофман Ш. М., Сб. научн. статей. Ташкентск. ин-т инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 9, 61—72

Рассматривается вопрос о нахождении наибольшего собственного значения λ_{max} векового уравнения $|AM-\lambda E|=0$, где A — симметричная положительно определенная матрица, M — диагональная матрица. Задача сводится к нахождению наибольшего собственного значения матрицы $M^{1/2}AM^{1/2}$, которая симметрична и положительно определенна. В дальнейшем дается способ нахождения наибольшего собственного значения λ_{max} векового уравнения $|A-\lambda E|=0$. Рассматривается последовательность матриц $A=\|a_{ik}\|, A^2=\|a^2_{ik}\|, \ldots, A^{2^l}=A^r=\|a^{(r)}_{ik}\|$.

Показано, что

1. $\sqrt[r]{\sum_{i,k} a^{(r)}_{i,k}/n}=\lambda^{(r)}\leqslant\lambda_{max}$;

2. $\lambda^{(1)}\leqslant\lambda^{(r)}\leqslant\ldots\leqslant\lambda^{(r)}\leqslant\ldots\lambda_{max}$;

3. $|\lambda_{max}-\lambda^{(r)}|\leqslant\lambda_{max}(\sqrt[r]{n}-1)$, т. е. $\lim_{r\to\infty}\lambda^{(r)}=\lambda_{max}$.

Более быструю сходимость дает следующий способ:

$$\omega^{(r)}=\sqrt[r]{\sum_{i,j} a^{(2r)}_{ij}/\sum_{i,j} a^{(r)}_{ij}},\quad \omega^{(r)}=\lambda^{(2r)^2}/\lambda^{(r)}$$

и, следовательно, $\lim_{r\to\infty}\omega^{(r)}=\lambda_{max}$.

В. Е. Говоров

12156. О вычислении характеристик упругой колебательной системы с n степенями свободы. Скотто (Sul calcolo ed affinamento delle caratteristiche delle vibrazioni dei sistémi elastici ad n gradi di libertà. Scotto Lavina Giovanni. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., Ist. Lombardo Sci. Lett., 1956, **21**, 89—106) (итал.)

Рассматривается итерционный метод (аналогичный методу Келлога) для вычисления собственных значений

и собственных векторов вещественной положительно определенной матрицы.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 676.

12157. Доминирующие собственные векторы одного класса тестовых матриц. Ломонт, Уиллоуби (Dominant eigenvectors of a class of test matrices. Lomont J. S., Willoughby R. A.), SIAM Rev., 1959, 1, № 1, 64—65 (англ.)

В физике элементарных частиц возникает следующая матричная задача на собственные значения. Дана нераспадающаяся система $\sigma=(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ трех эрмитовых матриц, удовлетворяющих циклично условию $[\sigma_x, \sigma_y]=i\sigma_z$. Найти собственные значения и доминирующие собственные векторы матрицы $k\sigma=k_x\sigma_x+k_y\sigma_y+k_z\sigma_z$, где k — вещественный вектор, а σ состоит из $(2s+1)$-мерных матриц (σ_x и σ_y — якобиевые матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали; σ_z — двудиагональная матрица).

Автор получает точные выражения для нормализованных доминирующих собственных векторов матрицы $k\sigma$ в виде

$$u_m^{(s)}=\left(\frac{k+\varepsilon k_z}{2k}\right)^s\binom{2s}{s+m}^{1/2}\left(\frac{k-\varepsilon k_z}{\varepsilon l^*}\right)^{s-m}$$
$$(m=s, s-1, \ldots, -s).$$

В. К. Саульев

12158. Циклический метод Якоби для вычисления собственных значений комплексной матрицы. Форсайт, Хенрич (The cyclic Jacobi method for computing the principal values of complex matrix. Forsythe G. E., Henrici P.), Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, № 1, 1—23 (англ.)

Пусть $\varphi=\varphi_k\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ — вещественные углы и $(i, j)=(i_k, j_k)$ — пара целых чисел такая, что $1\leqslant i_k<j_k\leqslant n$. Тогда матрица $U_k=\{u_{pq}\}$, определяемая соотношениями $u_{pp}=1\ (p\neq i, j)$, $u_{ii}=\cos\varphi$, $u_{ij}=\sin\varphi$, $u_{ji}=-\sin\varphi$, $u_{jj}=\cos\varphi$, остальные $u_{pq}=0$, является ортогональной. Для данной матрицы A определим последовательность матриц $A_k=\{a_{pq}^{(k)}\}$ при помощи равенств

$$A_0=A,\ A_{k+1}=U_kA_kU_k^*\ (k=0, 1, \ldots). \qquad (1)$$

Если матрица $\Lambda=\lim A_k$ существует и является диагональной или если существуют перестановочные матрицы P_k такие, что

$$\lim_{k\to\infty}P_kA_kP_k^{-1}=\Lambda \qquad (2)$$

существует и является диагональной, то элементы главной диагонали диагональной матрицы Λ являются собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Если определить матрицы U_k согласно правилу: индексы (i_k, j_k) выбираются так, чтобы

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right|=\max_{p\neq q}\left|a_{pq}^{(k)}\right| \qquad (3)$$

и φ_k выбираются так, чтобы $a_{ij}^{(k+1)}=0$ (метод Якоби), то соотношение ( ) имеет место. Реализация на быстродействующих вычислительных машинах выборки из $n(n-1)/$ чисел максимального по модулю числа (см. равенство (3)), особенно при больших значениях n, неудобна. С этой точки зрения более удобным является циклический метод Якоби, согласно которому пары индексов (i, j) выбираются в некотором циклическом порядке. Авторы рассматривают два циклических метода Якоби: цикличность по строкам $(i_0, j_0)=(1, 2)$,

$$(i_{k+1}, j_{k+1})=\begin{cases}(i_k, j_k+1), & \text{если } i_k<n-1,\ j_k<n,\\ (i_k+1, j_k+2), & \text{если } i_k<n-1,\ j_k=n,\\ (1, 2), & \text{если } i_k=n-1,\ j_k=n\end{cases} \qquad (4)$$

и цикличность по столбцам $(i_0, j_0)=(1, 2)$,

$$(i_{k+1}, j_{k+1})=\begin{cases}(i_k+1, j_k), & \text{если } i_k<j_k-1,\ j_k<n,\\ (1, j_k+1), & \text{если } i_k=j_k-1,\ j_k<n,\\ (1, 2), & \text{если } i_k=n-1,\ j_k=n.\end{cases} \qquad (5)$$

Для произвольной комплексной матрицы A порядка $n\geqslant 2$ авторы строят две последовательности унитарных матриц $\{U_k\}$ и $\{V_k\}$, определенных при помощи соотношений $u_{pp}=1\ (p\neq i, j)$, $u_{ii}=e^{i\alpha}\cos\varphi$, $u_{ij}=e^{i\beta}\sin\varphi$, $u_{ji}=-e^{i\gamma}\sin\varphi$, $u_{jj}=e^{i\delta}\cos\varphi$, остальные $u_{pq}=0$ $(\alpha-\beta-\gamma+\delta\equiv 0 \pmod{2\pi})$ и $v_{pp}=1\ (p\neq i, j)$, $v_{ii}=e^{i\zeta}\cos\psi$, $v_{ij}=e^{i\eta}\sin\psi$, $v_{ji}=-e^{i\varphi}\sin\psi$, $v_{jj}=e^{i\omega}\cos\psi$, остальные $v_{pq}=0$ $(\zeta-\eta-\varphi+\omega\equiv 0 \pmod{2\pi})$, и вместо (1) рассматривают следующую последовательность матриц $A_0=A$, $A_{k+1}=U_kA_kV_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Основные результаты авторов, касающиеся комплексной матрицы A, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. Если для всех больших k имеет место

$$s_{ij}^{(k)}=\max_{p\neq q}s_{pq}^{(k)},\ s_{ij}^{(k+1)}<ts_{ij}^{(k)}, \qquad (6)$$

где $s_{pq}^{(k)}=|a_{pq}^{(k)}|^2+|a_{qp}^{(k)}|^2$, $0\leqslant t<1$ (t не зависит от k), то существует последовательность перестановочных матриц P_k такая, что

$$P_k\,|A_k|\,P_k^{-1}\to\Lambda\ (k\to\infty),$$
$$(|A_k|=\{|a_{pq}^{(k)}|\}). \qquad (7)$$

Теорема 2. Пусть I — замкнутый отрезок, находящийся внутри открытого интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Если, в дополнение к условиям теоремы 1,

$$\varphi_k\in I,\ \psi_k\in I \qquad (8)$$

для всех больших k, то существует фиксированная перестановочная матрица P (не зависящая от k) такая, что

$$P\,|A_k|\,P^{-1}\to\Lambda\ (k\to\infty). \qquad (9)$$

Теорема 3. Пусть последовательность пар (i_k, j_k) определена согласно (4) или (5). Тогда (9) имеет место, если для всех больших k выполняются условия (6) и (8). Если (8) не выполняется, то (7) может не иметь места.

Теорема 4. Из (7) и (8) следует (9); если (8) не выполняется, (9) может не иметь места. Библ. 14 назв.

В. К. Саульев

12159. Сходимость приближенных собственных векторов в методах Якоби. Кози, Хенрич (Convergence of approximate eigenvectors in Jacobi methods. Causey Robert L., Henrici Peter), Numer. Math., 1960, 2, № 2, 67—78 (англ.)

Для вычисления собственных значений $(\lambda_l=1, 2, \ldots, n)$ и собственных векторов эрмитовой матрицы $A=A_0=\{a_{rc}\}$ порядка n рассматривается следующий алгорифм. Вычисляется последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k=\{a_{rc}^{(k)}\}$, подобных матрице A, при помощи соотношения $A_{k+1}=U_k^*A_kU_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, где $U_k=\{u_{rc}^{(k)}\}$ — специальные унитарные матрицы порядка n. Для каждого значения k имеется пара $\pi_k=(i_k, j_k)=(i, j)$ индексов $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ такая, что матрица

$$V_k=\begin{pmatrix}u_{ii}^{(k)} & u_{ij}^{(k)}\\ u_{ji}^{(k)} & u_{jj}^{(k)}\end{pmatrix}$$

является унитарной. Все другие элементы матрицы U_k удовлетворяют соотношению $u_{rc}^{(k)}=\delta_{rc}$.

Описанный метод (метод Якоби) называется сходящимся, если $A_k \to \Lambda$ $(k \to \infty)$, где Λ — диагональная матрица с элементами λ_i. Для сходимости рассматриваемых авторами методов Якоби (тот или иной вид метода Якоби определяется выбором матриц U_k) необходимо и достаточно, чтобы при $k \to \infty$ $S_k \to 0$ или $\mu_k \to 0$, где

$$S_k = \sum_{r \neq c} \left| a_{rc}^{(k)} \right|^2, \quad \mu_k = \max_{r \neq c} \left| a_{rc}^{(k)} \right|.$$

Если бесконечное произведение матриц $U = \prod_{k=0}^{\infty} U_k = U_0 U_1 U_2 \ldots$ сходится, то $U^* A U = \Lambda$ и столбцы матрицы U суть полная система нормализованных собственных векторов данной матрицы A. Авторы получают границы (выражаемые через S_k и μ_k) погрешности в определении собственных векторов в случае конечного числа шагов в методе Якоби (рассматриваются три метода Якоби: классический, циклический и модифицированный циклический метод Якоби). В. К. Саульев

12160. Ядерные полиномы в линейной алгебре и их численные применения. Штифель (Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications. Stiefel Eduard L.), Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser., 1958, № 49, 1—22 (англ.)

После краткого обзора основных свойств ортогональных полиномов автор определяет „ядерный полином" n-й степени при помощи равенства

$$K_n(\lambda_0, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\lambda_0) P_k(\lambda)}{N_k}, \qquad (1)$$

где $P_k(\lambda)$ — ортогональная на (a, b) система полиномов, а $N_k = \int P_k(\lambda)^2 \rho(\lambda)\, d\lambda$ ($\rho(\lambda)$ — весовая функция). Если $\lambda_0 \in (a, b)$, то полином (1) в точке $\lambda = \lambda_0$ имеет узкий и высокий пик (при больших значениях n), а в остальных точках относительно мал.

Относительно ядерных полиномов устанавливается несколько теорем. Например: 1) ядерные полиномы для фиксированного значения λ_0 образуют ортогональную систему с плотностью $(\lambda - \lambda_0)\rho(\lambda)$; 2) среди всех полиномов не выше степени n, имеющих данное значение a в точке λ_0 полином $cK_n(\lambda_0, \lambda)$ имеет наименьшую норму (c определяется из условия $cK_n(\lambda_0, \lambda_0) = a$).

Цель работы автора — применить ядерные полиномы (1) для ускорения сходимости итерационных методов, используемых для решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = k \qquad (2)$$

и нахождения собственных значений матриц. Итерационный метод для решения системы (2) можно записать в виде

$$x_{i+1} = x_i + r_i/q_i \qquad (x_0 = 0), \qquad (3)$$

где $r_i = k - Ax_i$, а q_i — множители релаксации. Из (3) следует, что $r_n = R_n(A)k$, где

$$R_n(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{q_0}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{q_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{\lambda}{q_{n-1}}\right), \qquad R_n(0) = 1.$$

Задача заключается в выборе оптимальных значений q_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) (оптимальная стратегия), при которых процесс (3) сходится наиболее быстро в смысле малости величины $\int_a^b R_n(\lambda)^2 \rho(\lambda)\, d\lambda$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема автора.

Пусть $a < \lambda < b$ — отрезок, содержащий собственные значения данной матрицы, а $\rho(\lambda)$ — любая функция плотности на (a, b). Тогда множители релаксации q_i, соответствующие оптимальной стратегии, суть корни ядерного полинома (1).

Автор приводит ряд конкретных итерационных методов в зависимости от выбора функции плотности $\rho(\lambda)$ и полиномов $P_i(\lambda)$. В частности, рассматривается итерационный метод, приводящий к точному решению за конечное число шагов. Аналогичные вопросы рассмотрены также в случае задачи на собственные значения. В. К. Саульев

12161. О приближенном вычислении n-го корня. Сканьи (Sul calcolo numerico delle radici n-esime. Scagni Giancarlo. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., Ist. Lombardo Sci. Lett., 1956, **90**, 255—266) (англ.)

Для вычисления n-го корня из числа a предлагается итерационный метод

$$y_{r+1} = y_r \frac{a^2 + \alpha a y_r^n + \beta y_r^{2n}}{\gamma a^2 + \delta a y_r^n + \varepsilon y_r^{2n}},$$

где y_r — последовательные аппроксимации. Наибольшая скорость сходимости имеет место при $\alpha = \delta = (4n-2)/(n+1)$, $\beta = \gamma = (2n-1)(n-1)/[(2n+1)\times(n+1)]$, $\varepsilon = 1$.

Из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 677,

12162. Построение и проведение итерационных методов высшего порядка. Эрман (Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. Ehrmann Hans), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, **4**, № 1, 65—88 (нем.)

Для приближенного нахождения решения ξ (ξ — число) уравнения

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

рассматривается итерационный метод вида

$$x_{n+1} = f(x_n) = G(x_n, F(x_n), F'(x_n), \ldots, F^{(s)}(x_n)) \qquad (2)$$
$$s \geqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Итерационный метод (2) имеет порядок сходимости k, если для любого начального значения x_0 из некоторой окрестности решения ξ уравнения (1) имеет место неравенство

$$f(x) - \xi = O(|x - \xi|^k), \quad k > 1. \qquad (3)$$

Условие (3) выполняется, если $f(x)$ в окрестности ξ обладает производными до k-го порядка, причем

$$f(\xi) = \xi, \quad f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(k-1)}(\xi) = 0.$$

Известно (см., например, Bodewig E., Z. angew. Math. und Mech., 1949, **29**, 44 — 51), что итерационный метод, имеющий порядок сходимости k ($k > 1$), в случае $F'(\xi) \neq 0$ можно записать в виде формулы

$$f(x) = x + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \frac{F^\nu}{\nu!} \left(\frac{1}{F'} \frac{d}{dx}\right)^{\nu-1} \frac{1}{F'}. \qquad (4)$$

Формула (4), в силу ее громоздкости, для практического решения уравнения (1) неудобна.

Автор рассматривает ряд удобных на практике итерационных методов, порядок сходимости которых превышает 2 (при $k = 2$ имеет место случай метода Ньютона) и дает рекомендации относительно их практического применения. В частности, для алгебраических уравнений до пятого порядка целесообразно использовать методы с $k > 2$, а для алгебраических уравнений выше пятого порядка выгодны, с точки зрения числа арифметических операций, итерационные методы с $k = 3$. Исследуются вопросы об оценке погрешности итерационных методов высшего порядка, о числе умножений и делений, необходимых для просчета одной итерации. Приведен обзор известных результатов, касающихся итерационных методов с $k \geqslant 2$. Имеются числовые примеры. Библ. 9 назв. В. К. Саульев

12163. Извлечение наименьшего положительного корня из двух трансцендентных уравнений и его распространение с целью определения минимальной частоты самоколебания конструкции здания гидростанции нового типа, находящейся за плотиной и имеющей при себе водоспуск. Чжао Сун, Цзин Шу-лян, Ли Шу-цин, Чжан Шэн-кай, У Юань-кай, Чжан Цин-да (в подлиннике Чжан Чин-да). Сычуань дасюэ сюэбао [цзыжань кэсюэ], Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 2, 37—54 (кит.)

Речь идет о решении уравнений

$$\frac{B(\alpha_1)}{D(\alpha_1)}=\frac{C(\alpha_2)}{D(\alpha_2)},\quad \frac{\alpha_1 B(\alpha_1)-E(\alpha_1)}{A(\alpha_1)+D(\alpha_1)}=\frac{S_1(\alpha_2)}{B(\alpha_2)},$$

где

$$A(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha\sin\alpha+\operatorname{sh}\alpha\cos\alpha,\quad C(\alpha)=2\operatorname{ch}\alpha\cos\alpha,$$
$$B(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha\sin\alpha-\operatorname{sh}\alpha\cos\alpha,\quad D(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha\cos\alpha-1,$$
$$E(\alpha)=\operatorname{ch}\alpha\cos\alpha+1,\quad S_1(\alpha)=2\operatorname{sh}\alpha\sin\alpha.$$

12164. Интерполяционная проблема Ньютона для целой функции со специальными узлами интерполирования. Дворкин Б. С. Сб. тр. Ставропольск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 10, 67—75

Пусть $f(z)$ — целая функция. Берутся точки $z_i (i=1,2,\ldots)$ комплексной плоскости такие, что $|z_i|<|z_{i+1}|$ и $\lim_i z_i=\infty$. Назовем $M(r)$ максимум $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$ и $N(r)$ число точек z_i, лежащих внутри круга $|z|=r$. Доказывается теорема: Если при больших r выполняется неравенство

$$M<\exp[N(r/\alpha)\lg(\alpha-1)], \qquad (1)$$

где $\alpha>2$, то интерполяционный процесс для f по ее значениям в точках $z_i\ (i=1,2,\ldots)$ сходится к f равномерно в каждой конечной части плоскости. Автор утверждает, что если $\varphi(x)$ есть непрерывная медленно возрастающая функция ($[\varphi(x)>0$ при $x>0$, монотонно возрастает и $\varphi(2x)/\varphi(x)\to 1\ (x\to\infty)]$ и $z_i=\varphi(i)$, то достаточное условие сходимости интерполирования (1) будет близким к необходимому. При оправдании последнего утверждения автор основывается на том, что если $\varphi(x)$ непрерывна и медленно возрастает, то она при всех $x\geqslant 0$ имеет производную $\varphi'(x)$ и $\varphi'(x)\to 0$, $x\varphi'(x)/\varphi(x)\to 0$, когда $x\to\infty$. При предположениях автора это может не иметь места и рассуждения автора не являются убедительными. В. И. Крылов

12165. Алгорифм для определения полинома наилучшего минимакс-приближения для функции, заданной на конечном точечном множестве. Кертис, Франк (An algorithm for the determination of the polynomial of best minimax approximation to a function defined on a finite point set. Curtis Philip C., Jr, Frank Werner L.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 3, 395—404 (англ.)

Речь идет о построении полинома $p_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, решающего для функции $f(x), x\in E=\{x_1,\ldots,x_N\}$ $(x_1=-1,\ x_N=1)$ задачу наилучшего приближения по чебышевскому принципу минимакса:

$$\max_{i=\overline{1,N}}|f(x_i)-p_n(x_i)|=L(a_0,\ldots,a_n)=\min\ (=\rho_E). \qquad (1)$$

В силу теоремы Чебышева — Маркова (в известном истолковании Кирхбергера — Валле Пуссена) искомый полином наилучшего приближения к $f(x)$ на множестве E является одновременно полиномом наилучшего приближения на некотором $(n+2)$-точечном подмножестве $e=\{u_\nu\}_0^{n+1}\subset E\ (u_0<u_1<\ldots<u_{n+1})$, отличающемся среди других подмножеств этого вида той особенностью, что для него соответствующая величина $(n+2)$-точечного минимакса уклонения $\rho_0=\delta(u_0,\ldots u_{n+1})$ получает наибольшее возможное значение (точно совпадающее с ρ_E). Фактическое отыскание такого экстремального подмножества $e=e^*=(u_0^*,\ldots,u_{n+1}^*)$ позволяет немедленно определить и полином искомого наилучшего приближения задачи (1) — решением системы $n+2$ линейных уравнений с неизвестными $a_0,\ldots,a_n,\ \rho\ (=\rho_E)$ или применением некоторой эквивалентной процедуры лагранжевско-ньютоновой интерполяции.

Предложенный Е. Я. Ремезом в 1934 г. второй из его алгорифмов, применимых к задаче (1), по сути заключается как раз в определении некоторого процесса, быстро приводящего к нахождению e^* путем последовательного решения „элементарных" чебышевских задач, аналогичных (1), в каждой из которых множество E заменяется его очередным $(n+2)$-точечным подмножеством $e^{(k)}\ (k=0,1,2,\ldots)$; причем $e^{(k+1)}$ определяется на основе прямого учета картины уклонений $f(x_i)-p_n^{(k)}(x_i)$, доставляемых решением $p_n^{(k)}(x)$ предыдущей элементарной чебышевской задачи, и определяется именно таким способом, который обеспечивает для $\rho_{e^{(k+1)}}$ значение, существенно превышающее $\rho_{e^{(k)}}$ (РЖМат, 1960, 5925 К).

Авторы статьи предлагают вниманию читателей еще иной вариант процесса, также направленного к отысканию e^*, но заключающийся в последовательных пробах с перемещением одного из элементов наличного $(n+2)$-точечного набора $e^{(s)}=(u_0^{(s)},\ldots,u_{n+1}^{(s)})\ (s=0,1,2,\ldots$ под условием повышения, при переходе к $e^{(s+1)}$, величины ρ_e, определяемой известным выражением

$$\rho_e=\delta(u_0,\ldots,u_{n+1})=\left|\frac{\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu f(u_\nu)\,d_\nu^{(e)}}{\sum_{\nu=0}^{n+1}d_\nu^{(e)}}\right|, \qquad (2)$$

где $d_\nu^{(e)}=(u_\nu-u_0)\ldots(u_\nu-u_{\nu-1})(u_{\nu+1}-u_\nu)\ldots$ $\ldots(u_{n+1}-u_\nu)$.

Упомянутые последовательные пробные перемещения в рассматриваемом варианте процесса группируются в циклы по $n+2$. Так, исходя вначале из произвольно взятого $e^{(0)}$ и соответствующей ему величины $\rho_{e^{(0)}}$, мы прежде всего рассматриваем, скажем, наборы вида $(u_0^{(0)},x,u_2^{(0)},\ldots,u_{n+1}^{(0)})$, где $u_0^{(0)}<x<u_2^{(0)}$, $x\in E$, вычисляя для каждого из них выражение (2), и заменяем $e^{(0)}$ тем из сопоставляемых наборов $e=e^{(1)}$, для которого величина (2) окажется максимальной; если же этот максимум не превосходит $\rho_{e^{(0)}}$, то полагаем $e^{(1)}=e^{(0)}$. Далее, на аналогичной основе сопоставляются наборы вида $(u_0^{(1)},u_1^{(1)},x,u_3^{(1)},\ldots,u_{n+1}^{(1)})$, где $u_1^{(1)}<x<u_3^{(1)}$, $x\in E$, и выбирается набор $e^{(2)}$. 3-й, 4-й, ..., n-й этапы цикла осуществляются совершенно аналогично. На $(n+1)$-м этапе выбор делается между наборами двоякого вида: $(u_0^{(n)},\ldots,u_n^{(n)},x)$, где $u_n^{(n)}<x<1$, $x\in E$, и $(x,u_0^{(n)},\ldots,u_n^{(n)})$, где $-1\leqslant x<u_0^{(n)}$, $x\in E$. Если $e^{(n+1)}$ окажется второго рода, то завершающий $(n+2)$-й этап рассматриваемого цикла I осуществляется на основе сопоставления наборов вида $(u_0^{(n+1)},x,u_2^{(n+1)},\ldots,u_{n+1}^{(n+1)})$. Если же $e^{(n+1)}$ окажется

первого вида, то на завершающем $(n+2)$-м этапе цикла I сопоставляются опять-таки еще наборы двух видов: $(x, u_1^{(n+1)}, \ldots, u_{n+1}^{(n+1)})$ и $(u_1^{(n+1)}, \ldots, u_{n+1}^{(n+1)}, x)$. После этого новый цикл II начинается с пробного перемещения крайнего левого из элементов набора $e^{(n+2)}$, отличных от избранных на последних двух этапах, и процесс продолжается циклически до тех пор, пока обнаружится, что $n+2$ подряд осуществленных этапа оставляют фактически без изменения некоторый достигнутый набор e^{S_0}. Доказывается, что в таком случае $e^{S_0} = e^*$.

Приводятся результаты нескольких примеров, просчитанных на электронной машине УНИВАК. В заключение авторы проводят некоторое сопоставление „метода I", заключающегося в сеточном применении 2-го алгориф а Е. Я. Ремеза, и „метода II", развиваемого в статье, на основе сравнения значений Z_I и Z_{II} общего числа требующихся операций умножения и деления. Если обозначить через r_I число шагов в методе I и через r_{II} число циклов в методе II, то результаты „их подсчетов таковы:

$$Z_I = {}^1/_3 r_I [(n+1)(n+2)(n+6) + 3nN],$$

$$Z_{II} = r_{II} [(n+1)(n+2) + N(7n+9)] + {}^1/_3 (n+2)(n^2+10n+6).$$

Принимая для метода II значение $r_{II} \approx 2$, а для метода I даже значение $r_I \approx 6 \div 8$, авторы приходят к такому выводу: „В области практически интересных случаев — скажем, $n \leqslant 10$ и $N = 100$ — метод I должен, вероятно, лучше проходить. Впрочем для обоих общая затрата вычислительного времени совсем небольшая". Е. Я. Ремез

12166. Общее матричное решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Пфаутс, Фергусон (A matric general solution of linear difference equations with constant coefficients. Pfouts Ralph W., Ferguson C. E.), Math. Mag., 1960, **33**, № 3, 119—127 (англ.)

Однородную часть линейного разностного уравнения второго порядка

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + F(t) \qquad (1)$$

автор записывает в виде

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Общее решение однородного уравнения (2) представляется в виде формулы

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{t-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

где y_1 и y_0 — начальные значения, а λ_1 и λ_2 — собственные значения (корни характеристического уравнения $\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$). Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{t-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Y}_t \\ \bar{Y}_{t-1} \end{bmatrix},$$

где $\bar{Y}_t$ — частное решение уравнения (1), а Y_1 и Y_0 — начальные условия. Если Y_t сходится к $\bar{Y}_t$ при $t \to \infty$ уравнение (1) автор называет устойчивым. Уравнение (1) устойчиво, если и только если λ_1 и λ_2 по абсолютному значению меньше 1 или если выполняются условия $1 - |a_2| > 0$, $1 - a_1 - a_2 > 0$, $1 + a_1 - a_2 > 0$. Эти результаты обобщаются на случай линейного разностного уравнения n-го порядка. В. К. Саульев

12167. Треугольные матрицы, соответствующие треугольным сеткам. Бьерхаммар (Triangular matrices for adjustment of triangular networks. Bjerhammar Arne. Kgl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm, 1956, № 105, 82 pp.) (англ.)

Симметричная матрица системы нормальных уравнений факторизуется в произведение двух треугольных матриц.

Из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 153.

12168. Приближенный метод вычисления общих возмущений. Применение к VIII спутнику Юпитера. Ковалевский (Méthode numérique de calcul de perturbations générales. Application au VIIIe satellite de Jupiter. Kovalevsky Jean), Bull. astron., 1959, **23**, № 1, 1—89 (франц.; рез. англ., нем., русск.)

Результаты численного интегрирования уравнений разлагаются в ряды Фурье методом гармонического анализа. Приводится предварительная орбита, представляющая наблюдения с точностью до 190″, и результат одной итерации при решении уравнений Лагранжа.

Из резюме автора

12169. Полиномиальные приближения в теории переноса нейтронов. Конки (Polynomial approximations in neutron transport theory. Conkie W. R.), Nucl. Sci. and Engng, 1959, **6**, № 4, 260—266 (англ.)

Показано, что среди полиномиальных решений односкоростного уравнения Больцмана в плоской геометрии при изотропном рассеянии полиномы Лежандра и Чебышева занимают предпочтительное место. В задаче Милна с поглощением для линейной экстраполированной длины чебышевское приближение порядка N в большей области рассматриваемых поглощений дает значение, более близкое к точному, чем соответствующее лежандровское приближение. Аппроксимация углового распределения нейтронов полиномами Чебышева ранее была доложена на Второй Женевской конференции 1958 г. О. Аспелундом. Н. Я. Лященко

12170. Вычисление эллиптических функций от рациональной части четвертпериода. Орчард (Computation of elliptic functions of rational fractions of a quarterperiod. Orchard H. J.), IRE Trans. Circuit Theory, 1958, **5**, № 4, 352—355 (англ.)

Описывается модификация одного известного метода вычисления эллиптических функций от аргументов, являющихся рациональной частью четвертпериода. Даются числовые примеры из разных областей применения эллиптических функций. М. А. Алексидзе

12171. Рационализация вычислений. Ватанабэ (Watanabe Akitoshi), Нихон кикай гаккайси, J. Japan Soc. Mech. Engrs, 1958, **61**, № 479, 1434—1435 (японск.)

12172. Расчет распределения ошибок в методе уравнивания. Дун Чжун-линь, Ухань дасюэ цзижань кэсюэ сюэбао, Wuhan daxue ziran kexue xuebao, 1959, № 8, 65—71 (кит.)

12173. Полезная аналитическая аппроксимация множителей рассеяния атомов. Силверман, Саймонсен (A useful analytic approximation to atomic and unitary atomic scattering factors. Silverman J. N., Simonsen S. H.), Acta crystallogr., 1960, **13**, № 1, 50—54 (англ.)

Речь идет об аппроксимациях типа $\ln f_0(x) = \sum_n a_n x^n$, получающихся, в частности, методом наименьших квадратов.

12174. Поправки к статье Бэя «Матричный расчет балок с переменными моментами инерции» («Matrix solution of beams with variable moments of inertia» by Ming L. Pei.—Corrections), J. Struct. Div. Proc. Amer.

Soc. Civil Engrs, 1959, 85, № 10, Part I, 137 (англ.) См. РЖМат, 1960, 10928.

12175. Метод численных операторов. Беллерт (Metoda operatorów liczbowych. Bellert Stanisław), Rozpr. elektro techn., 1959, 5, № 4, 515—586 (польск.; рез. русск., англ.)

Работа состоит из трех частей. В первой части изложен математический метод решения разностных уравнений алгебраическим путем. Элементами описываемой алгебры являются «численные операторы», составляющие специальную категорию чисел. Во второй части работы обсуждается вопрос устойчивости схем импульсного регулирования. Приведены новые результаты, которые могут быть использованы при проектировании и исследовании схем регулирования. В третьей части работы описан численный метод, упрощающий определение переходных процессов в электрических схемах, возбуждаемых более сложными сигналами. Этот метод основан на теории, изложенной в первой части работы.

Резюме автора

12176. Оценка погрешности при помощи теорем о неподвижной точке. Шрёдер (Fehlerabschätzung mit Fixpunktsätzen. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 394 (нем.)

12177. Применение билогарифмической бумаги. Риск (Logarithmic diagrams solve your equations. Riske Gil), Prod. Engng, 1959, 30, № 48, 62—65 (англ.)

Описываются составные номограммы, построенные на билогарифмической бумаге. Как известно, операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня особенно просто номографируются на билогарифмической бумаге, так как при этом требуется построение лишь семейств прямых линий. В заметке описан метод комбинирования таких номограмм.

Х. М. Коган

12178. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Обзор. Форсайт (Numerical methods for high-speed computers—A survey. Forsythe George E.), Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959, New York, 1959, 249—254 (англ.)

Автор высказывает ряд общих соображений относительно численных методов и смежных вопросов. Приводится классификация численных методов, состоящая из 13 основных и нескольких вспомогательных пунктов. Основные разделы этой классификации суть 1) аппроксимация, 2) алгебра и теория чисел, 3) анализ и функциональные уравнения, 4) аналогия. Поясняются такие термины как «численный анализ», «математический анализ», «программирование» или «кодирование» и пр. Отмечается принципиальное различие между прямыми и итерационными методами. В связи с последними методами автор останавливается на вопросах сходимости и оценках погрешностей. Особое внимание уделяется «машинным» числам, псевдооперациям и в связи с этим — погрешностям округления. Несколько подробнее автор останавливается на некоторых актуальных вопросах численного анализа (задача на собственные значения для матриц, задача Дирихле и пр.). В заключение автор приводит названия всех известных ему основных журналов мира, в которых печатаются статьи или рефераты по численному анализу. Библ. 20 назв. В. К. Саульев

12179. Об интерполяционной формуле Грегори. Лонг (On the Gregory interpolation formula. Long C. T.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 9, 801—803 (англ.)

Замечание педагогического характера о выводе интерполяционной формулы Грегори. Я. И. Алихашкин

12180. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Обухов А. М., Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1960, № 3, 432—439

Развит метод статистического анализа эмпирических функций, основанный на применении «естественных» ортогональных разложений. Из резюме автора

12181. Рациональные аппроксимации функций Дебье. Тачер (Rational approximations for the Debye functions. Thacher Henry C., Jr), J. Chem. Phys., 1960, 32, № 2, 638 (англ.)

Приведены соотношения

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t}{e^t-1}\,dt = \frac{24{,}155 - 0{,}2758x + 0{,}08386x^2}{24{,}166 + 5{,}6522x + x^2} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 0{,}00048;$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t}{e^t-1}\,dt =$$

$$= \frac{3754{,}971 - 206{,}8950x + 67{,}79818x^2 - 0{,}400109x^3 + 0{,}0421551x^4}{3754{,}969 + 731{,}8707x + 146{,}41606x^2 + 15{,}897010x^3 + x^4} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 0{,}0000012$$

и аналогичные для интегралов

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt, \quad \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{t^3}{e^t-1}\,dt, \quad \frac{4}{x^4}\int_0^x \frac{t^4}{e^t-1}\,dt,$$

справедливые для $0 \leqslant x \leqslant 10$. Вне этой области ошибка ε может оказаться очень большой, и поэтому в этих случаях следует использовать соответствующие асимптотические представления. В. К. Саульев

12182. Образование ошибок при вычислении непрерывных дробей. Баскервилл (The generation of error in the computation of continued fractions. Baskervill Margaret Malone. Engng Bull. Engng Experim. Stat. Alabama Polytechn. Inst., 1958, № 29, 40 pp.) (англ.)

Автор описывает три метода вычисления n-го отрезка A_n/B_n непрерывной дроби

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \cdots \frac{a_n}{+b_n +} \cdots .$$

Например, первый из них осуществляется по формулам $A_n = b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2}$, $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_n = b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$.

Основной результат автора заключается в оценке (сверху) погрешности, получающейся в силу оперирования с конечным числом разрядов (погрешности округления), при вычислении величин A_n/B_n указанными тремя способами. Эта погрешность удовлетворяет соответствующим разностным уравнениям второго порядка. Приведены числовые примеры. В. К. Саульев

12183. Оптимальная аппроксимация и граница ошибки. Голомб, Вейнбергер (Optimal approximation and error bounds. Golomb Michael, Weinberger Hans F.), On Numerical Approximat. Madison. Univ. Wisconsin Press, 1959, 117—190 (англ.)

Авторы подробно исследуют вопросы в общей постановке об аппроксимации функционалов и границах ошибок (через известную информацию). Результаты теории применяются к численному решению дифференциальных, интегральных и прочих уравнений.

12184. Выбор ординат при помощи функций Планка в качестве базиса. Экснер, Хиршлебер (Auswahlordinatenverfahren mit Planckscher Funktion als Basis. Exner G., Hirschleber A.), Jenaer Jahrbuch 1955, 1, Teil. Jena, Gustav Fischer, 1955, 113—125 (нем.)

Авторы интересуются приближенным вычислением интегралов вида $\int_0^\infty E_s(\lambda, T_1) f(\lambda)\, d\lambda$, где $E_s(\lambda, T_1)$ — спектральное излучение черного тела температуры T_1 с длиной волны λ.

Из Math. Revs, 1956, 17, № 11, 1204.

12185. Простой числовой пример на применение метода «разъединения и объединения» Крона. Хейда (A simple numerical example for the beginner of Kron's method of tearing and interconnecting. Heyda P. G. Matrix Tensor Quart., 1956, 6, 142—145) (англ.)

Приведен числовой пример на применение метода Крона к системе тяжей в эластичной сетке. C. Saltzer

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 10, 824.

12186. «Соприкосновение» высокого порядка. Вон (Osculation of high order. Vaughan Hubert), J. Inst. Acutaries, 1955, 81, 53—57 (англ.)

12187. Чебышевские аппроксимации с усеченными функциями. Коллац (Tschebyscheffsche Approximation mit gebrochenen Funktionen. Collatz L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Univ. Edinburgh, 1958, 77 (нем.)

12188. Оценка точности вычисления собственных чисел аппаратом непрерывных дробей. Стесин (An estimate of the precision of computation of eigenvalues by means of continued fractions. Stesin I. M.), Amer. Math. Soc. Translat., 1959, 12, 149—154 (англ.) Перевод с русского (РЖМат, 1956, 4094).

12189. Теоретико-вероятностное обоснование механического выравнивания и его практическое применение. Еклин, Штриклер (Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung mechanischer Ausgleichung und deren praktische Anwendung. Jecklin H., Strickler P.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1954, 54, 125—161 (нем.)

12190. О методе наименьших квадратов. Чопич (O metodi najmanjših kvadratov. Čopič Milan), Obz. mat. in fiz., 1957—1958(1959), 6, № 3, 108—119 (словенск.; рез. англ.)

Рассматриваются различные критерии, на которых основывается метод наименьших квадратов. Метод геометрически интерпретируется в n-мерном пространстве.

Из резюме автора

12191. Восстановление функции по заданным ее разностям сколь угодно высокого порядка методом наименьших квадратов. Хан (Berechnung der zu einer vorgegebenen Differenzfunktion beliebig hoher Ordnung nach der Methode der kleinsten Quadrate gehörigen Stammfunktion. Hahn E.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 3-4, 120—130 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматриваются функции, изменяющиеся на конечном интервале (x_0, x_n) и равные нулю вне заданного интервала. По заданным значениям центральных разностей $(\delta_\varepsilon^p)_j$ p-го порядка в точках x_j $(j = 1 - p/2, \ldots, n + p/2)$ методом наименьших квадратов восстанавливаются значения функции ε_j $(j = 1, \ldots n)$ в точках x_j. Значения ε_j определяются системой нормальных уравнений. Выводятся рекурсивные формулы для нахождения ε_j.

Я. М. Каждан

12192. Уравнивание с использованием матриц. Чжоу Ця. Цэхуэй тунбао, Cehui tongbao, 1959, 5, № 16, 15—21 (кит.)

12193. Решение нормальных уравнений методом наименьших квадратов. Лю Цин-шань, Цэхуэй тунбао, Cehui tongbao, 1959, 5, № 16, 22—25 (кит.)

12194. Практическое применение методов наименьших квадратов. Маршан (Modalités pratiques d'application de la méthode des moindres carrés. Marchant R. Assoc. Actuair. Belges. Bull., 1956, № 58, 25—37) (франц.)

Обзор различных численных методов для решения переопределенных систем линейных алгебраических уравнений в матричных обозначениях. Более полный обзор автор обещает сделать. D. L. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 676.

12195. Прямое проективное преобразование номограмм. Зенгин А. Р., Научн. тр. Моск. горн. ин-та, 1957, сб. 19, 75—82

12196. О функциях, номограммы которых имеют заданную ответную шкалу. Джемс-Леви Г. Е., Вычисл. математика, сб. 5, 1959, 109—132

Предлагается достаточно простой в теоретическом отношении и весьма эффективный на практике метод номографирования зависимостей вида $f_3(z) K(x, y) + \varphi_3(z) L(x, y) + \psi_3(z) M(x, y) = 0$, где $f_3(z)$, $\varphi_3(z)$, $\psi_3(z)$, а также $K(x, y)$, $L(x, y)$, $M(x, y)$ — линейно независимые между собой функции. Выводятся необходимые и достаточные условия существования номографирующего множителя $A(x, y) \neq 0$. Рассмотрен в общем случае вопрос о бесквадратурном номографировании функции $F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}$. Дается метод построения номограмм из выравненных точек с заданной прямолинейной ответной шкалой $v = f(z)$ ($f(z)$ — монотонная однозначная функция) для уравнения $z = F(x, y)$; устанавливаются необходимые и достаточные условия номографируемости. Предлагается эффективный метод построения таких номограмм. Сформулирован порядок приближенного построения номограмм, имеющих прямолинейную ответную шкалу с заданной характеристикой.

В целях стандартизации всех связанных с построением номограммы вычислений составлена схема расчета, в которой после задания входных данных остается механически произвести дополнение таблицы, чтобы получить координаты точек шкал номограммы. В заключение рассмотрен вопрос о точности локальной аппроксимации произвольной достаточно гладкой поверхности с помощью поверхности, номограмма которой содержит ответную шкалу с заданной характеристикой. Одновременно получен метод построения такой соприкасающейся аппроксимирующей номографируемой поверхности. И. Ф. Шелихова

12197. Решение задач с помощью номограмм. Петров (Решаване на някои задачи с помощта на номограми. Петров Р.), Математ. и физика (Бълг.), 1959, 2, № 2, 1—9 (болг.)

Элементарная заметка, в которой описываются сетчатые номограммы, номограммы из выравненных точек и даны примеры простейших номограмм. Х. М. Коган

12198. Графическое решение уравнений. Улчар (Eine graphische Bestimmung von Gleichungslösungen. Ulčar Jože), Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine, 1955, 6, 18—26 (макед.; рез. нем.)

Рассматривается графическое решение уравнений типа $F[f(x), g(x)] = 0$ и систем уравнений $\Phi[f(x), g(y)] = 0$, $F(x, y) = 0$.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 767.

12199. Графический способ расчета насосной установки системы водоснабжения. Леонтьев М. В., Научн. сообщ. Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 36, 14 стр., илл.

12200 К. Номография. Морита (Nomography. Morita Katuhiko. Tokyo, Tokai—shobo, s. a., 170 pp., 160 yen) (японск.)

Книга имеет десять глав. В ней, в частности, рассматриваются номограммы двух переменных, системы координат, детерминанты, сетки, номограммы трех и более

переменных и пр. В книге почти всюду применяется детерминантный метод.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 237.

12201 К. Лекции по номографии. Бал, Радо (Lecţii de nomografie. Bal Lascu, Rado Francisc. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 179 p., il., 5,65 lei) (рум.)

12202 К. Введение в численные и графические вычисления. Цеули (Introduzione ai calcoli numerici e grafici. 2a ed. Zeuli Tino. Torino, S. Gheroni, 1958, 8 p., ill.—Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 73, № 9, 346 (итал.)

12203 К. Методы релаксации. Аллен (Relaxation methods. Allen D. N. de G. New York, McGraw—Hill Book Co., Inc., 1954, VII, 257 pp.) (англ.)

12204 К. Учебник по арифметике для высших учебных заведений. Дикнетер, Апфельбахер (Rechenbuch für höhere Lehranstalten. Dicknether. München, Lindauer, 1959. Teil 1. 8. Aufl. Bearb. Apfelbacher Karl. 175 S. 4.40 DM. Teil 2—3, 11. Aufl., Bearb. Apfelbacher Karl. 223 S., ill., 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 41, 3061 (нем.)

12205 К. Математика для исследователей и инженеров. Бауле (Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Bd 2. Ausgleichs d. Näherungsrechnung. 6. erw. Aufl. Baule Bernhard. Leipzig, Hirzel, 1959, 101 S., 2.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 48, 3545 (нем.)

12206 К. Релаксационные методы в теоретической физике. Продолжение трактата о релаксационных методах в инженерной науке. Саутуэлл (Relaxation methods in theoretical physics. A continuation of the treatise Relaxation methods in engineering science. Southwell R. V. Oxford, Clarendon Press, 1956, vii, pp. 249—522, ill., 8.80 doll.) (англ.)

Третий том автора о релаксационных методах. Первый — «Релаксационные методы в инженерной науке», второй — «Релаксационные методы в теоретической физике». Настоящий, третий, том является продолжением второго тома. В нем рассмотрены, в частности применение метода релаксации к бигармоническим задачам, задачи на собственные значения, нелинейные задачи гидродинамики и упругости, трехмерная релаксация, уравнение теплопроводности, случай нерегулярной границы, общие краевые условия.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 677.

12207 К. Упорядочивание астрогеодезических сетей триангуляции. Гаскилл (Adjustment of the astrogeodetic triangulation network. Project MO-011. Gaskill I. Washington, Army Map Service, 1956, ii, 64 pp.) (англ.)

Описан метод упорядочивания больших (свыше 1000 нормальных уравнений) сетей триангуляции первого порядка в отдельные блоки при помощи вариации метода координат.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 675—676.

12208 К. Счетная линейка. Теория и практика. Вентола (Il regolo calcolatore. Teoria e pratica. Ventola Federico. Firenze, G. Barbèra, 1959, 59 p., 400 L.), Bibliogr. naz. ital., 1959, 2, № 1, 15 (итал.)

12209 К. Основы вычислений измеренных значений [Цэдинчжи цзисуань цзичу]. Чжан Ци-жэнь, Пекин, Кэсюэ чубаньшэ, 1959, VI, 422 стр., илл., 2.00 юаня. (кит.)

12210 К. Способ наименьших квадратов. [Учебн. пособие для маркшейд. специальностей горн. вузов и геод. фак. геод. вузов]. Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. М., Геодезиздат, 1959, 371 стр., илл., 7 р. 70 к.

12211 К. Численная теория приводимости многочленов. Яковкин М. В. М., АН СССР, 1959, 135 стр., 5 р.

Автор рассматривает приводимость многочленов в поле рациональных чисел. Гл. I книги посвящена некоторым вспомогательным результатам: линейные преобразования полиномов, свойства знакопостоянных и знакочередующихся полиномов, принцип двойственности, оценки численного значения полинома в точке, теоремы единственности для полиномов. В гл. II даются улучшения или обобщения существующих критериев неприводимости, а также доказываются новые критерии. В гл. III изложено решение проблемы приводимости и нахождения всех неприводимых множителей полинома в поле рациональных чисел. Проблема сводится к нахождению простых множителей одного целого числа. Метод изложен для случая знакопостоянных полиномов. В гл. IV изложен метод, не нуждающийся в предварительном преобразовании полинома к знакопостоянному полиному. Гл. V посвящена таблицам целочисленных полиномов. В гл. VI рассматривается приводимость полиномов от многих переменных. Метод, изложенный в гл. III, решает и эту задачу. Библ. 50 назв.

В. Е. Говоров

12212 К. Инженерный анализ; обзор численных методов. Крандалл (Engineering analysis. A survey of numerical procedures. Crandall Stephen H. New York — Toronto — London, McGraw—Hill Book Co., Inc., 1956, x. 417 pp., 9.50 doll.) (англ.)

Рассмотрены следующие основные вопросы. Системы линейных алгебраических уравнений; системы с плохообусловленными матрицами; метод исключения Гаусса; простой итерационный метод и метод Зейделя; общая задача на собственные значения $AX=\lambda BX$, где $A=A'$ и $B=B'$ — положительно определенные матрицы; „теория включения" Коллатца; отношения Релея; вариационная интерпретация; отношения Шварца; прямые и итерационные методы вычисления λ; процесс δ^2-экстраполяции; методы релаксации; неравенство Като; диагонализация матрицы A при помощи метода Якоби (случаи $B=I$ и $B\neq I$). Начальные задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений; разностные методы; метод Эйлера; открытые, замкнутые и типа Кутта методы. Дифференциальные уравнения с частными производными; метод сеток (изложен более подробно); методы релаксации, разработанные Саусвеллом; вопросы погрешности и устойчивости; явные и неявные сеточные уравнения, аппроксимирующее уравнение теплопроводности и уравнение колебаний стержня; метод характеристик для гиперболических уравнений и пр. Книга снабжена большим числом упражнений и содержит богатую библиографию. Она предназначена для инженеров и математиков, имеющих дело с вычислениями.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 674—675.

12213 К. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений. Панов (Příručka k numerickému řešení parciálních diferenciálních rovnic. Panov D. J. Překl. z ruš. Praha, SNTL, 1958, 186 s., 6,70 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 32, 739 (чешск.)

12214 К. Правила вычислений. Дюден (La règle à calcul. 3-e éd. Dudin Raymond. Paris, Dunod, 1959, 163 p., ill., 450 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 39, 983 (франц.)

12215 К. Выравнивание. Часть 2. Метод наименьших квадратов. Часть 3. Систематические ошибки и функциональные зависимости. Бём (Vyrovnávací počet. Č. 2. Metoda nejmenších čtverců. Č. 3. Systematické chyby a funkční závislisti. Böhm Josef. Praha, SNTL, 1959, 281 s., il., 22,30 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1959, № 16, 344 (чешск.)

12216 К. Исчисление краковянов и его применения. Банахевич (Rachunek krakowianowy z zastosowaniami. Banachiewicz T.), Warszawa, Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1959, 404 str.) (польск.)

Исчисление краковянов — своеобразное матричное исчисление, разработанное польским математиком-прикладником, астрономом и геодезистом Т. Банахевичем (1882—1954) и отличающееся от обычной алгебры матриц Кэли — Гамильтона тем, что матрицы-краковяны перемножаются не по правилу «строка на столбец», а по правилу «столбец на столбец». В трудах проф. Банахевича и его школы новое исчисление, во многом обязанное своим возникновением потребностям машинного счета, стало эффективным орудием упрощения вычислительных процессов и способствовало открытию ряда новых алгоритмов (несмотря на отсутствие ассоциативного закона для умножения краковянов, усложняющее теоретические рассмотрения в этом исчислении). Бывшее первоначально достоянием узкого круга польских последователей Банахевича, исчисление краковянов постепенно приобретает все более широкую международную популярность среди специалистов в области приложений математики, особенно к проблемам астрономии и геодезии. Книга состоит из двух частей.

Часть I «Основы краковянного исчисления и некоторые применения краковянов охватывает гл. 1—5. Гл. 1 содержит основные сведения по алгебре краковянов, достаточные, впрочем, для многих случаев применения последних. Гл. 2 иллюстрирует случаи применения сведений по алгебре краковянов; в ней показано, как эти сведения используются в элементарной и высшей алгебре, арифметике, теоретической астрономии и геодезии, кинематике, сферической полигонометрии и других областях. Большая, гл. 3 посвящена важному как в теоретическом, так и в практическом плане вопросу о разложении краковянов на так называемые элементарные множители и делению краковянов. Автор применяет эту специфическую для краковянов теорию к задаче решения системы линейных уравнений, приходя в итоге к формулам, более простым, общим и удобным, чем формулы Крамера. В гл. 4 особенно подробно трактуется важный для практики случай симметрической системы уравнений, когда этот метод приводит к извлечению «краковянного корня» из краковяна коэффициентов уравнений. Материал этой главы адресован главным образом практикам, которые найдут здесь много полезных для себя указаний. В гл. 5 рассматриваются некоторые дополнительные вопросы алгебры краковянов, описывается применение последних к вычислению определителей (что дает в случае определителей порядка выше третьего наиболее простой способ их вычисления), приводится сравнительный анализ характерных черт краковянного и классического матричного исчислений и устанавливаются формулы перехода от выражений в краковянах к выражениям в матрицах и обратно.

Часть II (гл. 6—10) посвящена методу наименьших квадратов и элементам теории обработки наблюдений в краковянной трактовке. Здесь рассмотрен следующий круг проблем: уравнивание косвенных наблюдений (гл. 7), уравнивание прямых условных наблюдений (гл. 8), уравнивание косвенных условных наблюдений (гл. 9) и ряд других вопросов, главным образом относящихся к теории интерполяции (гл. 10). Характерной чертой изложения является то, что автор обходится одними алгебраическими средствами, отказываясь от услуг дифференциального исчисления как ввиду нестрогости обычной (в геодезической учебной литературе) трактовки, основанной на использовании только необходимого условия минимума, так и с целью сделать свое изложение доступным и для лиц, не владеющих высшей математикой.

Кроме основного текста, в книге имеется также два дополнения: в одном из них дан вывод краковянных формул, относящихся к геодезической задаче Хансена, другое посвящено установлению зависимости между косинусами углов между осями двух систем координат и «кватернионными величинами» (термин Клейна и Зоммерфельда) поворота, совмещающего одну из этих систем с другой. Книгу заключает составленная самим автором «Библиография краковянов», доведенная до 1950 г. и систематизированная по географическому и хронологическому принципам.

По рецензии Ю. М. Гайдука в «Новые книги за рубежом» (1960, сер А, № 1).

12217 К. Численный анализ. Кунц (Numerical analysis. Kunz K. S. N. Y., McGraw-Hill, 1957, 381 p.) (англ.)

Книга содержит подробное изложение основных методов прикладного математического анализа. Написанная физиком, книга содержит мало теорем и еще меньше доказательств. Основным ее содержанием является изложение практической стороны прикладных методов, богато иллюстрированное числовыми примерами. Меньшее внимание, уделяемое автором вопросам теории приближенных методов, по сравнению с практической стороной, не является недостатком книги, а лишь характеризует ее направленность. Условия применимости различных методов, вопросы сходимости применяемых процессов всякий раз рассматриваются в книге с достаточной аккуратностью. Достоинством книги является широта охвата материала. Здесь освещены и вычислительные методы линейной алгебры и алгебры многочленов, и вопросы интерполяции, и приближенное решение дифференциальных уравнений различных типов, и др.

Ряд вопросов, подробно рассмотренных в книге, очень мало освещался в нашей литературе. Из них следует отметить задачи обратной интерполяции, интерполяции для функций двух и большего числа переменных, приближенное решение интегральных уравнений и некоторые другие. С большой полнотой разобраны методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными различных типов. Все изложенные методы приближенных вычислений сопровождаются хорошо подобранными примерами их применения. К сожалению, подавляющее большинство их носит числовой характер. Лишь несколько примеров представляют собой решение конкретных задач с физическим содержанием. Увеличение числа примеров такого рода, несомненно, повысило бы интерес к книге и значительно оживило бы изложение.

Все главы книги снабжены хорошо подобранными задачами и упражнениями, однако и здесь можно высказать тот же упрек, что и по поводу примеров, — за редким исключением они не носят характера конкретных задач с физическим содержанием. Изложение различных методов приближенных вычислений сопровождается в книге разбором преимуществ и недостатков каждого. Автор дает также некоторые рекомендации о целесообразности того или иного метода в зависимости от постановки задачи, а также от используемых вычислительных средств.

По рецензии Р. С. Гутера в «Новые книги за рубежом» (1959, сер. А, № 12)

12218 К. Методы практического анализа. Изд. 3-е, перем. и расш. Виллерс (Methoden der praktischen analysis. 3 verb. und erw. Aufl. Willers F. A. Berlin, de Gruyter, 1957, 429 p.) (нем.)

Книга представляет собой систематическое изложение приближенных методов решения математических задач. В отличие от распространенных у нас общих курсов по приближенным вычислениям в книге автора уделено значительное внимание графическим методам; здесь нельзя найти сведений о некоторых математических машинах и приборах как механических (планиметр, интегриметр, арифмометр), так и электромеханических (счетные автоматы типа «Мерседес—Евклид» и др.). В остальном же книга по содержанию похожа на известные курсы методов вычислений.

В гл. 1. «Вычисления и вспомогательные средства» приведены основные правила действий с приближенными

числами (§1). §2 посвящен графическим методам: выбору масштаба, различного вида шкалам (логарифмической, функциональным, проективным) и сеткам (например, логарифмической); §§3 и 5 — описанию логарифмической линейки и счетных машин (автоматической и полуавтоматической); §4 — линейной интерполяции на шкалах и таблицах.

В гл. 2. «Интерполяция» рассмотрены следующие вопросы: интерполяционные формулы, интерполирование с помощью таблиц и счетных машин, применение интерполяционных формул для численного дифференцирования и интегрирования, интерполирование функций многих переменных, кубатуры.

Гл. 3. «Приближенное интегрирование и дифференцирование» знакомит читателя с квадратурными формулами, их применением для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, со способами приближенных вычислений несобственных интегралов, с графическими методами интегрирования и вычислениями с помощью планиметра, интегриметра и интеграфа.

В гл. 4. «Сглаживание. Тригонометрическое интерполирование» включены: метод наименьших квадратов, элементы гармонического анализа, сглаживание с помощью экспоненциальных функций, графические методы (использование при сглаживании функциональных сеток, графические способы отыскания коэффициентов Фурье), описание гармонического анализатора.

Гл. 5 посвящен вычислению корней алгебраических и трансцендентных уравнений и вычислительным методам линейной алгебры: методы вычисления корней описаны достаточно полно; из методов решения систем линейных алгебраических уравнений автор излагает методы Гаусса, итераций, Зейделя, релаксационный и скорейшего спуска. Имеется параграф о линейных разностных уравнениях и их применении для решения некоторых алгебраических задач, например, для вычисления наибольших и наименьших по абсолютной величине корней алгебраических уравнений (способ Бернулли—Якоби).

Гл. 6 «Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений» начинается с изложения графических методов построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Из численных методов изложены методы рядов, Рунге-Кутта, Адамса. Рассмотрен метод конечных разностей, метод Ритца—Галеркина и способ Релея вычисления наименьшего собственного значения.

В книгу включен богатый конкретный материал в виде большого числа примеров, иллюстрирующих применение каждого из изложенных методов. Автор приводит многочисленные ссылки с указанием дополнительной литературы и первоисточников.

По рецензии В. Г. Карманова в «Новые книги за рубежом» (1960, сер. А, № 1).

12219 К. Пособие для вычислителей. Шмидт (Der Rechner. Schmidt Walter. Berlin, Techn. Verl. Herbert Cram, 1955, xix, 200 S., 18.00 DM) (нем.)

Протабулировано произведение mn для $n = 1(1)200$; $p = 0(1)100$; $\theta = 0{,}1(0{,}1)0{,}9$; 1/6, 1/3, 2/3, 5/6, 1/4, 3/4. Здесь $p + \theta = m$.

Из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 517.

12220 К. Методы численного анализа. Нильсен (Methods in numerical analysis. Nielsen Kaj L. New York, Macmillan Co., 1956, xiii, 382 pp., 6.90 doll.) (англ.)

Книга является обзором численного анализа с практической точки зрения; особое внимание уделяется методам, приспособленным для вычислений на настольных вычислительных машинах. Основные темы: таблицы разностей, интерполяция, численное дифференцирование и интегрирование, дифференциальные уравнения, обыкновенные и системы и пр. Книга снабжена многочисленными примерами и упражнениями. После вводной главы, дающей основные понятия, автор рассматривает строение таблиц разностей и их применение для табулирования многочленов и оценки ошибок. Следующие две главы посвящены методам, включающим разности. Сначала рассматриваются классические интерполяционные формулы Ньютона — Грегори, Стирлинга, Эверетта и Бесселя и их остаточные члены; затем следует глава, посвященная разделенным разностям, способу Айткена и двумерной интерполяции. Формулы численного дифференцирования и интегрирования установлены из классических интерполяционных формул, рассмотрены другие формулы, включая метод Симпсона и Уэддля и метод Гаусса. Есть глава, посвященная использованию формулы Лагранжа. Рассматриваются решения обыкновенных уравнений итерационными и рекуррентными методами, включая нахождение комплексных корней. Коротко описан метод Граффе для нахождения квадратного корня. Для систем уравнений рекомендуется метод Кроута и обсуждаются его приложения к обращению матриц и оценке определителей. Есть раздел, посвященный решению системы нелинейных уравнений (все примеры ограничиваются двумя уравнениями). Далее следует глава, посвященная решению обыкновенных уравнений и уравнений с частными производными, в которой тема обсуждается в общих чертах. Методы Эйлера, Милна и Рунге-Кутта даны для обыкновенных дифференциальных уравнений. Бегло рассмотрены итерационные (метод Либмана) и релаксационные методы для эллиптических уравнений и метод „по шагам" для параболических и гиперболических уравнений. Рассматриваются приложения метода наименьших квадратов для приближения многочленами и различные методы, помогающие при вычислениях. В книге имеются таблицы (например, таблицы интерполяции с коэффициентами в интервале от 0.01 до 0,7, таблицы для формул дифференцирования и интегрирования). D. C. Gilles

Из Math. Revs, 1956, 17, № 8, 897—898.

12221 К. Численный анализ. Хартри (Numerical analysis. Hartree D. R. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1958, 302 p.) (англ.)

Книга Хартри «Численный анализ»—одно из классических сочинений в этой области. Автор ее, профессор Кембриджского университета и член Английского Королевского общества (английская академия наук),— один из крупнейших специалистов по численному анализу. Первое издание книги вышло в свет в 1952 г. и имело столь большой успех, что в 1954 г. потребовалась допечатка тиража.

Как указывает автор в предисловии к рецензируемому второму, переработанному изданию, он стремился сохранить характер книги, предназначенной для тех, кто «хочет знать численные методы для использования их на практике, когда реальные числа занимают места буквенных символов в алгебраических формулах». Это стремление дать практически важный и полезный материал и изложить его так, чтобы читатель мог действительно использовать его, проходит красной нитью через всю книгу. Уже во введении автор пишет: «Как уже указывалось, численный анализ имеет дело с процессами. Это — активный предмет, в котором при выполнении вычислительного процесса случаются те или иные вещи, и его нельзя изучить по-настоящему, просто читая о нем, разбирая уже сделанные примеры или даже наблюдая, как они делаются, так же как нельзя научиться играть в гольф, теннис или на скрипке, только наблюдая игру других и не беря в руки клюшку для гольфа, теннисную ракетку или скрипку». Всюду автор дает практические указания по выполнению вычислений, обращает внимание читателя на их особенности, предостерегает от ошибок, отмечая их наиболее частые причины и т. п. Его 35-летний опыт практической вычислительной работы делает эти замечания и указания особенно ценными.

Книга охватывает все классические разделы численного анализа, но не содержит изложения методов обработки материалов наблюдений и статистических данных. Автор указывает, что, конечно, численный анализ нужен для обработки экспериментального материала как статистического, так и полученного из наблюдений, но «сам предмет отличается от этих двух его частных приложений точно так же, как он отличается и от других частных приложений, например, от расчета сверхзвукового потока жидкости или расчета строения атомов или звезд». Книга иллюстрирована многочисленными примерами расчетов, вычислительными схемами, графиками, чертежами и написана ясным, простым и хорошим языком.

По рецензии Д. Ю. Панова в «Новые книги за рубежом» (1959, сер. А. № 9).

ТАБЛИЦЫ

12222. Таблицы для вычисления полиномов Стирлинга. Митринович, Митринович (Tableaux qui fournissent des polynômes de Stirling. Mitrinović D. S., Mitrinović R. S. Publ. Elektrotechn. fak. Univ. Beogradu, Mat. i fiz., 1960, № 34, 23 p.) (франц.; рез. сербо-хорв.)

Приведены точные значения чисел Стирлинга $\left(S_n^{n-m}\ m = 21\ (1)32\right)$, определяемых по формуле

$$S_n^{n-m} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{2m-k} C_m^k,$$

где числа C_m^k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_{m+1}^k = -(2m-k+1)\left(C_m^k + C_m^{k-1}\right),$$

$$C_1^k = 0 \quad \text{для} \quad k > 0 \quad \text{и} \quad C_1^0 = -1.$$

Приведена также таблица значений C_m^k. В. К. Саульев

12223. Статистические таблицы (Tables statistiques), Rev. statist. appl., 1959(1960), 7, № 4, I—VI, I/1—1/26, II/1—II/38, III/1—III/15 (франц.)

Статья состоит из трех частей. В первой части приведены статистические таблицы основных законов. Здесь протабулирована функция $f(u)$ (вместе с $\Delta f(u)$), определяется соотношением

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma} f(u)$$

(нормальный закон распределения плотности вероятности) для $u = 0{,}0(0{,}1)4{,}0$ с четырьмя десятичными знаками; интегральная функция $F(u)$ для $u = 0{,}00(0{,}01)2.99$ и $u = 3{,}0\,(0{,}1)\,4{,}5$; функция u для $P = 1 - F(u) = 0{,}000\,(0{,}001)\,0{,}500$; функции $\Pr(k) = C_n^k p^k (1-p^{n-k})$ и $\Pr(0-c) = \sum_{k=0}^{k=c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ для $n = 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$ (биномиальный закон); функции $\Pr(k) = e^{-m}(m^k/k!)$ и $\Pr(0-c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m}(m^k/k!)$ для $m = 0{,}1(0{,}1)1{,}0(0{,}5)10{,}0(1{,}0)18$ (закон Пуассона). Первая часть заканчивается номограммой для

$$P = \Pr(k \leqslant c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m}(m^k/k!).$$

Во второй части приведены разнообразные статистические таблицы контроля производства. Здесь также рассматриваются случаи нормального и биномиального законов и закона Пуассона. В этой части, в частности, протабулирована функция $\ln(1-\beta)/\alpha$ для $\alpha, \beta = 0{,}001 - 0{,}40$; функции $\ln(p_2/p_1)$ и $\ln(1-p_1)/(1-p_2)$ для $p_1, p_2 = 0{,}1\,\% - 50\,\%$; функция n^2 для $n = 1(1)999$. Заканчивается вторая часть тремя номограммами. В третьей части приведены таблицы, соответствующие закону Стьюдента, Пирсона, Фишера и др. Изложение сопровождается многочисленными примерами. В. К. Саульев

12224. Таблицы показательного интеграла для комплексных аргументов (Tables of the exponential integral for complex arguments. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1958, № 51, xiv, 634 pp.) (англ.)

Приведены таблицы показательного интеграла

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

и близких к нему функций для комплексного аргумента $z = x + iy$. Основную часть книги составляют шестизначные таблицы $E_1(z)$ для $x = 0{,}(0{,}02)4$, $y = 0(0{,}02)3(0{,}05)10$. Промежуточные значения с шестью знаками могут быть получены при помощи квадратичной интерполяции. Далее следуют таблицы $E_1(z) + \ln z$ для $x = 0(0{,}02)1$, $y = 0(0{,}02)1$ с шестью знаками; таблицы $e^x E_1(z)$ для $x = 4(0{,}1)10$, $y = 0(0{,}05)10$ с шестью знаками; таблицы $E_1(z)$ для $-x = 0(0{,}1)3{,}1$, $y = 0(0{,}1)3{,}1$ с десятью знаками; таблицы $E_1(z) + \ln z$ для $-x = 0(0{,}1)1$, $y = 0(0{,}1)1$ с десятью знаками; таблицы $e^z E_1(z)$ для $x = 0(1)20$, $y = 0(1)20$, $-x = 0(0{,}5)4{,}5$, $y = 0(0{,}1)4(0{,}5)10$, $-x = 4{,}5(0{,}5)10$, $y = 0(0{,}5)10$, $-x = 0(1)20$, $y = 0(1)20$ с шестью знаками и, наконец, дополнительные таблицы e^{-x} для $x = 4(0{,}05)10$ с десятью знаками. При вычислении $E_1(z)$ использованы формула $E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n \cdot n!}$ и асимптотическое представление

$$E_1(z) = e^{-z}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \ldots\right).$$

Библ. 10 назв. В. К. Саульев

12225. Таблицы модифицированных функций Бесселя второго рода для аргументов частного вида. Демпси, Бенсон (Tables of the modified Bessel functions of the second kind for particular types of argument. Dempsey E., Benson G. C.), Canad. J. Phys., 1960, **38**, № 3, 399—424 (англ.)

Приведены десятизначные таблицы модифицированных функций Бесселя второго рода $K_n(z)$ и $K_{n+1/2}(z)$ $(n = 1(1)10)$ для аргументов вида $z = (\pi/2)\sqrt{q}$ и $z = (\pi/3)\sqrt{q}$, где $q = 1(1)250$ или $q = 1(1)300$. В основу большинства вычислений положено асимптотическое представление

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}\left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{(8z)1!} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{(8z)^2 2!} + \ldots\right].$$

Использована также рекуррентная формула $K_{n+1}(z) = K_{n-1}(z) + (2n/z) K_n(z)$. В. К. Саульев

12226. Таблицы транспортного интеграла. Добавление. Роджерс, Холл, Пауэлл (Tables of transport integrals: a supplement. Rogers William M., Hall William J., Powell Robert L.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, **B63**, № 1, 23—30 (англ.)

Приведены с шестью значащими цифрами таблицы интеграла

$$J_n(x) \equiv \int_0^x \frac{e^z z^n\, dz}{(e^z - 1)^2}$$

для $n = 18$ и 20 и $x = 0{,}2(0{,}2)50{,}0$.

12227. **Таблица интегралов** $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{(1-e^{-x})^p}{x^{q+1}}dx$. **Лаурикайнен, Вархо** (A table of integrals $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{(1-e^{-x})^p}{x^{q+1}}dx$. Laurikainen K. V., Varho O. Turun yliopiston julkaisuja, 1958, Sar. AI, № 30, 68 pp.) (англ.)

Протабулирован с восемью десятичными знаками (точность последнего знака не гарантируется) интеграл

$$F(a, p, q)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{(1-e^{-x})^p}{x^{q+1}}dx, \qquad (1)$$

встречающийся при решении уравнения Шредингера вариационным методом. Интеграл (1) приведен для значений a=0,0(0,1)12,0; p=1(1)10; $q=-1(1)\min\{(p-1),+6\}$. Функция $F(a, p, q)$ для $q=-3$ и $q=-2$ может быть вычислена согласно формулы

$$F(a, p, q)=$$

$$=(|q|-1)!\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\frac{1}{(a+\lambda)^{|q|}}\quad(q<0).$$

Вычисления интеграла (1) проведены на машине ИБМ-704, принадлежащей Европейскому институту научных вычислений (Париж). При этом использована формула Ньютона — Котеса 6-го порядка. В. К. Саульев

12228. **Новые таблицы логарифмов. Гарсия** (New tables of logarithms. Garcia Juan. Las Ciencias, 1954, **19**, 567—592) (исп.)

Описаны „трехвходные" таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций.

Из Math, Revs, 1957, **18**, № 6, 517.

12229. **Степени 12^n** (Powers of twelve 12^n), Duodecimal Bull., 1959, **13**, № 2, 32 (англ.)

Приведены точные значения величины 12^n для n = 1(1)48.

12230. **Обобщенные функции Штарка для водородных линий. Андерхилл. Уодделл** (Stark broadening functions for the hydrogen lines. Underhill Anne B., Waddell John H. Nat. Bur. Standards Circ., 1959, № 603, 94 pp., ill.) (англ.)

Приведены с 4 — 6 знаками таблицы функций типа

$$f\begin{pmatrix}n_1' n_2' m'\\ n_1\ n_2\ m\end{pmatrix}=\frac{1}{48}\left[\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right]\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{2(n+n')}\times$$

$$\times\frac{1}{(m!)^4}\left(\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)^{2m+4}\frac{(n_1+m)!}{n_1!}\frac{(n_2+m)!}{n_2!}\frac{(n_1'+m')}{n_1'!}\times$$

$$\times\frac{(n_2'+m')!}{n_2'}\left\{\psi_m(n_2, n_1')\,\psi_m(n_2, n_2')-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2\psi_m(n_2, n_2'+1)\right\}^2$$

$$S(d)=\frac{1}{n'^2 f_\pm}\sum\frac{f_k}{c_k}W\left(\frac{\alpha}{c_k}\right).$$

12231. **Таблицы для определения поверхностей влияния для пластинчатой полосы. Кончковский, Журавский** (Tablice do obliczania powierzchni wpływowych dla pasma płytowego. Kączkowski Zbigniew, Żorawski Marek), Rozpr. inż., 1959, **7**, № 1, 39—91 (польск.; рез. русск., англ.)

Приведены пятнадцать числовых таблиц для определения ординат поверхностей влияния геометрических и статических величин для полосы пластинки. При помощи этих таблиц можно определить прогибы, моменты и поперечные силы в пластинке, находящейся под действием сосредоточенных моментов, осесимметричных нагрузок и нагрузок, распределенных равномерно вдоль прямого отрезка. Пользование таблицами поясняется тремя числовыми примерами расчета безбалочного перекрытия. Резюме автора

12232 К. **Числовые таблицы sin θ и sin²θ, применяемые в кристаллографии. Дюриф-Варамбон, Форра** (Tables numériques de sin θ et sin² θ à l' usage des cristallographes, pour l'identification des diagrammes Debye—Scherrer (chambres de 240 mm de diamètre). Durif-Varambon André, Forrat Francis. Paris, Centre nat. rech. scient., 1958, 27 p.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 47, 1212 (франц.)

12233 К. **Пятизначные логарифмические и другие математические таблицы. Мюллер** (Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln. Bearb. 7. Aufl. Müller Fritz. Leipzig, Fachbuchverlag, 1959, VII, 200 S., 6.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 46, 3399 (нем.)

12234 К. **Пятизначные логарифмы и числовые таблицы для 90°-разбиения. Шефер** (Fünfstellige Logarithmen und Zahlentafeln für die 90°-Teilung. 4. durchges. Aufl. Hrsg. Schaefer Werner. München, Lindauer, 1959, 164 S., 4.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 44, 3269 (нем.)

12235 К. **Таблица натуральных логарифмов для аргументов, заключенных между пятью и десятью с шестнадцатью десятичными знаками** (Table of natural logarithms for arguments between five and ten to sixteen decimal places. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1958, № 53, XIII, 506 pp.) (англ.)

12236 К. **Математические таблицы** (Tabele matematice. Bucureşti, Ed. tehn., 1959, 284 p., 15 lei), Bibliogr. RPR, 1959, 8 № 13, 370 (рум.)

12237 К. **Таблицы логарифмов. Ломхольт** (Logaritmetabel. Stereotypitryk. 15. uforandr. opl. Lomholt A. Viborg, Haase, 1958, 35 s., 2,80 kr.), Dansk bogfortegnelse, 1959, **109**, № 1-3, 27 (датск.)

12238 К. **Степени, корни. Длины окружностей и площади кругов для чисел от 1 до 10 000. Шульц** (Potenzen, Wurzeln. Kreisumfänge und Kreisflächen der Zahlen von 1 bis 10 000. Schulz G. Düsseldorf, Triltsch. 1959, 178 S., 12.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1960, **A**, № 2, 107 (нем.)

12239 К. **Пятизначные логарифмические и тригонометрические таблицы (шестидесятеричное разбиение). Гаусс, Гоббин** (Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. <Sexagesimal unterteilter Altgrad>. Gauss F. G. 401.—410. Aufl. Hrsg. Gobbin H. H. Stuttgart, Wittwer, 1959, 186, XXVIII S., 4.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1960, **A**, № 6, 369 (нем.)

12240 К. **Четырехзначные таблицы чисел и логарифмов. Райт** (4-stellige Zahlen- und Logarithmentafeln. Zsgest. Raith Fritz. Frankfurt/M.—Berlin—Bonn, Diesterweg, 1959, 32 S., ill., 4.—), Dtsch. Nationalbibliogr., 1960, **A**, № 5, 307 (нем.)

12241 К. **Математические таблицы. Степени, квадратные и кубические корни, пятизначные мантиссы десятичных логарифмов. Ротман** (Mathematische Funktionstafeln. Potenzen, Quadrat- und Kubikwurzeln, 5 stellige Mantissen d. dekadischen Logarithmen. Vollst. neu errechnet. Hrsg. Rottmann Karl. Mannheim, Bibliogr. Inst., 1959, 204 S., 6.80 DM) Dtsch. Nationalbibliogr., 1960, **A**, № 10, 701 (нем.)

12242 К. **Вычислительные таблицы. Пособие для учителей. Яковкин М. В.** М., Учпедгиз, 1958, 216 стр., 5 р. 60 к.

Книга предназначена для учителей, студентов и для широкого круга читателей, имеющих дело со всевоз-

можными вычислениями. При составлении таблиц принята новая методика, которая позволила уменьшить объем книги в два раза по сравнению с другими существующими таблицами аналогичного типа. Книга состоит из двух частей. В части 1 содержатся точные произведения четырехзначных чисел на однозначные в пределах от 0000×0 до 9999×9. В части 2 приведены точные произведения трехзначных чисел на двузначные в пределах от 000×00 до 999×99. При помощи этих таблиц можно осуществить также умножение и деление многозначных чисел на четырехзначные и трехзначные (эти операции сводятся к операциям сложения и вычитания). М. К. Керимов

12243 К. Таблицы синусов и косинусов для радианных аргументов (Tables of sines and cosines for radian arguments. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1955, № 43, XI, 278 pp.) (англ.)

Основное место (253 страницы из общего числа 278 страниц) занимают восьмизначные таблицы $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 0(0{,}001)\,25.2$. Кроме этого, приведены таблицы $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 0(1)\,100$ (восемь знаков); $x = n \cdot 10^{-p}$, $n = 1(1)9$, $p = 1(1)5$ (пятнадцать знаков); $x = 0(0{,}00001)0{,}01000$ (двенадцать знаков), а также таблицы соотношений между градусами, минутами, секундами и радианами и таблицы значений $\frac{1}{2}p(1-p)$ для $p = 0(0{,}001)1$. Кратко рассмотрены вопросы метода вычислений этих таблиц и прямой и обратной интерполяции. В. К. Саульев

12244. Таблицы кумулятивного биномиального распределения вероятности (Tables of the cumulative binomial probability distribution. Annals of Comput. Lab. Harvard Univ. 35. Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1955, 503 pp., 8.00 doll.) (англ.)

Протабулирована с пятью знаками функция $E(n, r, p) = \sum_{x=r}^{n} p^x \binom{n}{x} (1-p)^{n-x}$ для $n = 1(1)50(2)100(10)200(20)500(50)1000$, $r = 0(1)\,n$ и $p = 0{,}01(0{,}01)0{,}5$.

Из Math. Revs, 1957, **18**, № 6, 517.

См. также: 11748 — 11751, 11795, 11822, 11885.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

12245. «Фортранзит» — универсальная система автоматического программирования для ИБМ-650. Борден («Fortransit» — a universal automatic coding system for the IBM 650. Borden Byron C.), J. Mach. Account., 1959, **10**, № 7, 44—46, 48—49 (англ.)

На примере системы «Фортранзит» рассматривается вопрос об автоматическом программировании, заключающемся в том, что по написанной человеком программе («source program») машина сама составляет программу, которая непосредственно может быть воспринята ею («object program»). Приводятся виды и краткая характеристика программирующих программ («processors»). «Фортранзит» — система автоматического кодирования для машины ИБМ-650. Эта система была разработана для машины ИБМ-704 под названием «Фортран» («Fortran») (Formula Translator). «Фортран» — это система, позволяющая вводить программу, записанную в символическом виде, подобном записи математических формул. В статье описывается символический язык системы «Фортран» и кратко рассматривается структура программирующей программы для ИБМ-650, которая занимает 2000 кодов на магнитном барабане. Указывается, что применение системы «Фортранзит» позволяет ввести универсальный язык для всех математических машин, облегчает программирование и значительно сокращает работу по составлению программы, что уменьшает количество возможных ошибок. А. Н. Чуйкин

12246. Программа для решения проблем общего типа на вычислительных машинах. Ньюэлл, Шоу, Саймон (A general problem-solving program for a computer. Newell A., Shaw J. C., Simon H. A.), Computers and Automat., 1959, 8, № 7, 10—17 (англ.)

В статье обсуждаются принципы программы для решения общих проблем, основанной на применении принципов эвристического вывода. Эта программа применима к задачам символической логики, к выводу тригонометрических тождеств и т. п. Словарь, используемый в этой программе, состоит из следующих частей:

1. Словарь для описания конкретной задачи, содержащий слова типа: объект, оператор, различие, свойство, а также наименования конкретных объектов и операторов.

2. Словарь для характеристики организации процесса решения, содержащий слова типа: цель, метод, вычисление и обозначения конкретных целей, методов и способов вычислений.

Рассматриваемая программа решает задачи путем последовательного достижения серии целей. Эти цели могут иметь следующий тип: 1) найти последовательность операторов, преобразующих объект a в другой объект b; 2) применить оператор q к объекту a. Основной принцип, заложенный в программу, состоит в сведении задачи достижения некоторой цели к достижению более простых похожих целей. Для того, чтобы придать смысл понятию «похожести» целей, вводится понятие различия объектов. Так, в случае, когда объектами являются выражения, определяются следующие разновидности понятия различия: 1) различия в переменных, входящих в два выражения, 2) различие в кратности вхождения данного переменного в оба выражения, 3) различие в знаках у некоторых членов выражений, 4) различие бинарных отношений между парами одинаковых переменных, 5) различие в группировании одинаковых переменных. Так, для вывода тождества применяются такие преобразования одного из выражений, которые последовательно в порядке перечисления уменьшают различия между выражениями. Окончательная цель — преобразование одного объекта (выражения) в другой — заменяется серией более простых целей. Эти более простые цели состоят в преобразовании первого выражения в эквивалентные ему, наименее различающиеся со вторым выражением. Эти общие соображения поясняются в реферируемой статье на примере доказательства тождества: $1 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\sin x \cos x$. Приводятся блок-схемы, поясняющие действие описываемой программы. При разработке программы был использован материал психологических экспериментов. Эти эксперименты состояли в том, что студентам младших курсов давали задачи по символической логике и подробно фиксировали путь, по которому они подходили к решению. Ю. А. Шрейдер

12247. Замечания об округлении чисел, представленных в системе счисления с основанием —2, в арифмометре цифровой машины. Фетт (Uwagi o zaokrąglaniu liczb przedstawionych w postaci rozwinięć przy zasadzie —2 w arytmometrze maszyny cyfrowej.

Fiett Jerzy), Biul. zakł. apar. mat. PAN, 1958, **P1**, № 4, 45—49 (польск.; рез. англ.)

Описываются три метода округления чисел, представленных в виде: $N = k\sum_{i=-m}^{i=-1} a_i(-2)^i$, $k = \pm 1$; $a_i = 0,1$, где происходит асимметричное разделение числового интервала в отношении 1 : 2 относительно нуля ($-2/3 < N < 1/3$): 1) прибавление очередной двоичной цифры с циклически генерированной последовательностью в форме 110110..., 2) прибавление очередной двоичной цифры с последовательности двоичных цифр, генерированной при помощи генератора случайных двоичных цифр и схемы, заменяющей каждую третью единицу нулем, 3) прибавление цифры (1 или 0), значение которой зависит от знака отброшенной части числа.

W. Jaworski

12248. Программирование с помощью вычислительной машины. Уолдо Гордон, Портер (Routine report writing by computer. Waldo W. H., Gordon R. S., Porter J. D.), Amer. Docum., 1958, **9**, № 1, 28—31 (англ.)

12249. Проблемы техники программирования. Замельсон (Probleme der Programmierungstechnik. Samelson K.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 61—68 (нем.)

12250. О логических схемах программ. Ляпунов А. А. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. I. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 46—74

12251. Об автоматизации программирования при помощи программирующей программы. Камынин С. С., Любимский Э. З., Шура-Бура М. Р. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. I. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 135—171

12252. О символике записи вычислительных планов при автоматизации программирования. Булавский В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 5—17

12253. Некоторые особенности логической структуры машины ГИФТИ и программирования в ее коде. II. Гильман А. М. Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 140—155
Часть I см. РЖМат, 1960, 9786.

12254. Линейные преобразования двоичных кодов. Матюхин Н. Я., Автоматика и телемеханика, 1958, **19** № 8, 776—787 (рез. англ.)

12255. Выборка случайной величины на быстродействующих счетных машинах. Раков Г. К. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 485—493

12256. Методы производства арифметических операций для параллельной машины. Бабаян Б. А., Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. I, 214—219

12257. О проведении аналитических выкладок на машинах с программным управлением. Петрова Л. Т., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 95—104

12258. Описание вычислительной машины «Персей». Хант (An explanation of the Perseus system. Hunt P. M.), Automat. Data Process., 1959, **1**, № 5, 33—37 (англ.)

«Персей» — новая большая цифровая вычислительная машина, предназначенная для обработки информации, коммерческих работ и т. п. Машина построена по блочной системе и состоит из ряда стоек. Печатающее устройство может действовать независимо от машины. Ввод данных осуществляется с помощью перфокарт, перфолент и магнитной ленты. Выходные данные печатаются с помощью телетайпа или записываются на магнитную ленту. Внутренняя память машины выполнена на никелевых линиях задержки и содержит 1024 12-разрядных числа. При выборке числа из памяти оно обязательно контролируется. «Персей» может работать с десятичным, двенадцатеричным и смешанным основаниями системы счисления. Это дает возможность не делать двойного двоичного преобразования при вводе и выводе информации. Машина позволяет выполнять ряд логических операций: сравнение, сдвиг и другие. Имеется возможность производить выборку части числа из памяти машины (например, при обработке страховых полисов, когда по одному адресу записывают номер полиса и сумму страхового взноса). Незначащие нули числа перед печатью могут опускаться (например, печатают не 000 000 079 041, а 79 041). Запись и чтение с магнитной ленты осуществляются через блок буферной памяти (32 числа). Запись на магнитную ленту контролируется путем чтения записанной информации и последующего сравнения записанного и считанного результатов. При обнаружении неправильной записи команда повторяется 8 раз. Если все 8 раз команда выполняется неверно, машина останавливается. Ввод информации с помощью перфокарт контролируется их двукратным чтением. Телетайп играет вспомогательную роль. Он может автоматически печатать последовательность всех операций в машине и содержимое всех частей запоминающего устройства при отладке программ. При нормальной работе оператор получает возможность с помощью телетайпа следить за правильностью и последовательностью работы машины.

О. В. Полянин

12259. Автоматическая вычислительная машина ЦРА-1 фирмы «Цейсс». Кеммерер, Кортум, Штраубе (The Zeiss automatic computing machine ZRA 1. Kämmerer W., Kortum H., Straube F.), Monthly Techn. Rev., 1959, **3**, № 8, 170—177 (англ.)

Сообщается о том, что фирма «VEB Carl Zeiss Jena» спроектировала вычислительную машину ЦРА-1 (РЖМат, 1960, 7045), предназначенную для научных и технических расчетов. Макет машины успешно функционировал в течение нескольких месяцев. Сообщается, что скоро будет выпущен промышленный образец новой машины. Особое внимание при проектировании было обращено на обеспечение удобства программирования и гибкости системы команд. Все логические узлы машины выполнены на ферритно-диодных схемах. Генератор тактовых импульсов и усилители магнитного барабана построены на термоэлектронных лампах. Частота тактовых импульсов равна 200 *кгц*. Машина производит операции над 48-разрядными двоичными числами с фиксированной или с плавающей запятой. Входные и выходные данные выражаются в десятичной системе. Ввод осуществляется с помощью перфокарт со скоростью 80 карт (1000 кодов) в 1 мин. Скорость печати выходных данных 150 цифр в 1 мин. Запоминающее устройство на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 12 000 оборотов в 1 мин., имеет емкость 4096 кодов. Плотность записи 3 импульса на 1 *мм*. Зазор между головками и поверхностью барабана равен 30 *мк*. Заполнение барабана числами может быть осуществлено за 4 мин. В машине имеется возможность работать с программой, записанной на барабане, а также с программой, написанной только на перфокарты. В процессе работы возможен автоматический переход с одного вида работы на другой. Код инструкции в машине ЦРА-1 содержит один контрольный разряд и один признаковый разряд. Остальные 46 разрядов разделены на 4 группы. В каждой группе может быть записан код операции определенного типа. К 1-й группе относятся арифметические и логические операции, выполняющиеся в центральном вычислительном блоке с числами, хранящимися в регистрах с малым временем выборки. Во 2-й группе записываются различные операции, позволяющие путем сравнения чисел или выяснения состояния некоторых ключей определить в случае условного перехода поря-

док продолжения вычислений. В 3-й группе записываются операции записи и чтения с барабана, различные операции переходов, операция «стоп». 4-я группа служит для нахождения адреса числа. Специальный блок в машине позволяет выполнять некоторые операции над адресами — модификацию адресов, переадресацию. При таком построении кода инструкции можно получить приблизительно 10^5 различных видов операций. Путем установки переключателей на пульте управления можно выбрать один из трех режимов работы машины: нормальная работа, тестовый режим и ручное управление. В тестовом режиме машина останавливается после выполнения каждой инструкции, что удобно для проверки программы и нахождения неисправностей. При ручном управлении программа выполняется прямо с перфокарт. Магнитный барабан не используется. Время выполнения основных операций над числами с фиксированной запятой составляет для сложения 3,8 мсек., для умножения 7 мсек., для деления 14 мсек. В случае плавающей запятой сложение выполняется за 7 мсек., умножение за 8 мсек., деление за 14 мсек. Подготовительные операции занимают 0,5—2,5 мсек. Среднее время выборки 2,5 мсек. Практически время выполнения операций примерно вдвое меньше, благодаря применяемой структуре кода инструкции, позволяющей производить операции параллельно во времени. Машина занимает 3 шкафа размерами 2,2×1,2×1,3 *м*. В ней используются 660 ламп, 12 000 германиевых диодов и 8500 ферритовых сердечников. Мощность, потребляемая машиной от сети 220 *в*, составляет 12 *квт*. А. Н. Чуйкин

12260. Данные о выпуске больших вычислительных машин фирмы «ИБМ» (Market data-IBM large-scale computers), Electron. News, 1959, **4**, № 179, 34 (англ.)

Приводятся сведения о выпуске машин фирмы «ИБМ» на середину декабря 1959 г. (см. таблицу).

Таблица

Тип	Количество машин, выпущенных или находящихся в производстве	Стоимость в долларах	Месячная арендная плата в долларах
7090	14	2 880 000	64 000
7070	13	900 500	20 350
709	53	2 630 000	55 200
705-III	23	2 063 000	43 000
705-I и 705-II*	147	1 713 000	35 000
704	126	1 994 000	44 000

* II модель машины ИБМ-705 отличается от I модели только объемом памяти (40 000 слов вместо 20 000 слов).

12261. Фирма «ИБМ» близка к окончанию перестройки производства вычислительных машин. Мейлин, Хавинд (IBM near completion on computer change. Maline Morris, Haavind Robert), Electron. News, 1959, **4**, № 179, 1, 34 (англ.)

На заводе фирмы «ИБМ» в Поукипси заканчивается перестройка производства вычислительных машин. Цеха, выпускавшие ламповые машины ИБМ-705 и ИБМ-709, переоборудованы для сборки новых вычислительных машин ИБМ-7070 и ИБМ-7090. На заводе собирается по меньшей мере 12 транзисторных машин ИБМ-7090 стоимостью около 3 млн. долл. каждая; 10 машин ИБМ-7070 стоимостью около 1 млн. долл. каждая находятся в производстве. Две машины ИБМ-7090 уже отправлены на завод фирмы «Сильвания» (РЖМат, 1960, 5926). Первая из машин ИБМ-7070, предназначенная для использования вне фирмы «ИБМ», вероятно будет поставлена в апреле 1960 г. Наибольшие трудности связаны с постановкой производства ферритовых сердечников для запоминающих устройств новых вычислительных машин. В машине ИБМ-7090 время выборки составляет в среднем 2,18 мсек., т. е. в 5 раз меньше, чем в ламповых машинах ИБМ. Такая скорость работы требует сердечников высокого качества. Размеры сердечников уменьшены до 1,27 *мм* (наружный диаметр)×0,76 *мм* (внутренний диаметр). Для лучшего отвода тепла при работе запоминающего устройства оно помещается в масляную ванну. Для контроля сердечников и облегчения сборки плат фирмой построен ряд станков и специальных приспособлений.

12262. Две транзисторные вычислительные машины... (Two transistorized digital computers), Electron. News, 1959, **4**, № 179, 28 (англ.)

Краткое сообщение о выпуске фирмой «Digital Equipment Corp.» (Maynard, Mass.) двух транзисторных вычислительных машин. Машина PDP-1 использует 3000 транзисторов, оперирует со словами в 18 двоичных разрядов и имеет память на 4096 слов. Стоимость ее около 110 000 долл. Машина PDP-3 использует 7000 транзисторов и оперирует со словами в 36 двоичных разрядов. Блок памяти состоит из 4096 слов; в машине может быть использовано до 8 таких блоков. Стоимость машины с одним блоком памяти около 230 000 долл.; каждый дополнительный запоминающий блок стоит около 70 000 долл. В обоих машинах время выборки составляет 5 мсек., время сложения 10 мсек. Время умножения в машине PDP-3 составляет приблизительно 25 мсек.

12263. Электронные цифровые вычислительные машины (Electronic digital computers), Australas. Engr, 1958, May, 75—77 (англ.)

Сообщается о том, что в сентябре 1956 г. Университет технологии в Сиднее установил английскую математическую машину УТЭКОМ (UTECOM), которая является промышленным образцом машины ДЭЮКЕ (DEUCE). В ней содержится около 1300 электронных ламп. Импульсы, представляющие 32-разрядные двоичные числа, следуют через 1 мксек. Оперативная память выполнена на 12 ртутных линиях задержки, в каждой из которых может храниться 32 числа. Кроме того, имеется 10 более коротких линий задержки разной длины, служащих накопительными регистрами и для других целей. Запоминающее устройство на магнитном барабане имеет емкость 8192 кода. На барабане 256 дорожек, которые выбираются с помощью двух блоков из 16 головок, перемещающихся механически в любое из 16 положений за 25 мсек. Благодаря применению оптимального программирования, время выполнения простейших операций составляет 64 мксек. Длительность умножения и деления 2 мсек. Во входном и выходном устройствах используются 80-столбцовые перфокарты. Максимальная скорость ввода — 200 карт в 1 мин. Скорость вывода — 100 карт в 1 мин. Для проверки работы машины разработаны тесты, решаемые при крайних пределах питающих напряжений. Для решения задач на машине разработана библиотека подпрограмм. А. Н. Чуйкин

12264. Обзор британских цифровых вычислительных машин. Часть 2. Де-Керф (A survey of British digital computers. Part 2. De Kerf Joseph L. F.), Computers and Automat., 1959, **8**, № 4, 34—36 (англ.)

Продолжение обзора британских вычислительных машин и фирм, их выпускающих (РЖМат, 1960, 11038).

Фирма «Ферранти» представлена в обзоре вычислительными машинами «Пегас», «Персей» и «Меркурий», фирма «ЛЕО» — машиной ЛЕО-II. Машина «Метровик-1010» фирмы «Метрополит—Виккерс» работает в параллельном коде с двоичными числами длиной в 13 и 44 разряда с плавающей и фиксированной запятой. Одноадресная команда имеет 22 разряда. Одновременно машина может выполнять две и большее число

команд. Имеется 3 44-разрядных сумматора, причем два из них могут сочетаться в сумматор двойной длины, и 8 3-разрядных сумматора. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках имеет емкость 2048 или 4096 44-разрядных чисел и время выборки 3,5 мксек. Запоминающее устройство на магнитном барабане содержит 8192 44-разрядных числа в блоках по 32 числа, причем время выбора блока 10 мсек. Имеется также барабан на 60 000 чисел в блоках по 3 числа с временем выборки блока 100 мсек. Входные устройства работают на 5-дорожечной перфоленте («Метровик-960», 250 букв в 1 сек.), на перфоленте с 5—8 дорожками («Метровик-961», 1000 букв в 1 сек.), на 40-колоночных перфокартах (540 карт в 1мин.), на 80-колоночных перфокартах (600 карт в 1 мин.). Выходные устройства на 5—8-дорожечной перфоленте (300 букв в 1 сек.), печатающее устройство (300 строк по 140 букв в 1 сек.). Машина выполняет сложение и вычитание за 20 мксек., умножение и деление не больше, чем за 200 мксек. Потребляемая энергия от 2 *ква*. Площадь, занимаемая самой машиной 1,8 *м*², вместе со вспомогательным оборудованием до 54 *м*². Цена на машину еще не установлена. Фирма «Пауэрс—Сеймас» выпускает электронный вычислитель ПКК (PCC — Process Control Computer). Работает он в последовательно-параллельном коде с двоично-десятичными 15-разрядными числами. Программа, состоящая не более, чем из 160 двухадресных команд, набирается на наборных панелях. Основное запоминающее устройство на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 2000 оборотов в 1 мин., имеет емкость 160 чисел, записанных на 4 дорожках, и время выборки 10 мсек. Имеется запоминающее устройство непосредственной выборки на 6 чисел, размещенное на отдельных дорожках. Входное и выходное устройства работают на 65- и 80-колоночных перфокартах со скоростью 120 перфокарт в 1 мин. Быстродействующий стилографический печатающий табулятор позволяет печатать выходные данные со скоростью 300 строк по 140 букв в 1 мин. Время сложения и вычитания 0,5 мсек., умножение от 6,5 до 65 мсек. и деление от 25 до 150 мсек. Цена машины без табулятора 20 000 фунтов стерлингов. Всего выпущено около 35 таких машин.

О. В. Бачин

12265. Обзор британских цифровых вычислительных машин. Часть 3. Де-Керф (A survey of British digital computers. Part 3. Concluding part. De Kerf Joseph L. F.), Computers and Automat., 1959, **8**, № 5, 38—39 (англ.)

Части 1, 2 см. РЖМат, 1960, 11038; реф. 12264.

Обзор заканчивается кратким описанием двух английских математических машин «Стантек-ЗЕБРА» и М-2. «Стантек-ЗЕБРА» — двухадресная машина последовательного действия, оперирующая с 33-разрядными двоичными числами. Основное запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 6000 оборотов в 1 мин. и имеет емкость 8192 кода. Среднее время выборки одного кода 5 мсек. 15 кодов, записанных на специальных дорожках, могут выбираться без потери времени на ожидание. Схемы коммутации дорожек работают на транзисторах. Входное устройство на перфоленте вводит данные со скоростью 200 знаков в 1 сек. Выходное устройство на перфоленте может работать со скоростью 25 или 50 знаков в 1 сек. Электрическая пишущая машинка печатает результаты со скоростью 7 знаков в 1 сек. Имеется возможность на входе и на выходе использовать перфокарты. Машина «Стантек-ЗЕБРА» выполняет операции сложения и вычитания (включая расшифровку инструкции) за 0,624 мсек., умножение за 11 мсек., деление за 35 мсек. Машина потребляет мощность 5 *ква* и занимает площадь 18 *м*². Стоимость машины 25000 фунтов стерлингов. Машина М-2 построена на базе машины АПЕ(КС)К. Это также двухадресная последовательная машина, числа в которой содержат 32 двоичных разряда. Запоминающее устройство емкостью 8192 кода выполнено на барабане, имеющем скорость вращения 3000 оборотов в 1 мин. Время выборки числа составляет 10 мсек. 64 кода могут выбираться без потери времени на ожидание. Входное и выходное устройства используют перфоленту и работают со скоростью 75 знаков в 1 сек. Время выполнения операции сложения и вычитания (не считая времени выборки из памяти) 0,5 мсек., умножения и деления от 10 до 20 мсек. Мощность, потребляемая машиной М-2, равна 1,5 *ква*. Площадь, занимаемая машиной, составляет 0,54 *м*². Стоимость машины 8000 фунтов стерлингов. В заключение приводятся некоторые обобщенные сведения обо всех 18 математических машинах, рассмотренных в обзоре. Отмечается, что большая часть машин — последовательные двоичные машины со средним числом разрядов 38. Семь машин одноадресные, 8 — двухадресные и 3 — трехадресные. Четыре машины оперируют с числами с плавающей запятой. Шесть машин построены на транзисторах. В качестве оперативной памяти 6 машин используют линии задержки, 5 машин магнитные сердечники и одна машина диодно-емкостные схемы. Основные запоминающие устройства в 16 машинах выполнены на магнитных барабанах и в двух машинах на магнитных сердечниках. Среднее время выборки числа с барабана составляет 10 мсек. В 12 машинах имеются запоминающие устройства на магнитной ленте и магнитной проволоке. Скорость работы запоминающего устройства на магнитной ленте фирмы «EMI» составляет 20000 знаков в 1 сек. Во входных и выходных устройствах используются перфолента, перфокарты, пишущие машинки и строчные печатающие устройства. Скорость ввода на перфокартах достигает 600 карт в 1 мин., на перфоленте 1000 знаков в 1 сек. Скорость вывода данных достигает на перфоленте 300 знаков в 1 сек. Все машины имеют довольно небольшую скорость вычислений. Например, лишь 4 машины выполняют умножение быстрее, чем за 1 мсек. В настоящее время усилия английской промышленности направлены на выпуск математических машин средних размеров, возможности которых могут быть при желании расширены. Это объясняется тем, что спрос на большие математические машины на европейском рынке пока ограничен.

А. Н. Чуйкин

12666. Вычислительные машины в Великобритании. Эрколи (Calcolatrici elettroniche in Gran Bretagna. Ercoli Paolo), Ricerca scient., 1959, **29**, № 6, 1145—1153 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Описываются некоторые экспонаты выставки вычислительных машин, проходившей в Лондоне в конце 1958 г., и высказывается ряд общих соображений по поводу состояния развития вычислительной техники в Англии.

А. В. Шилейко

12667. Цифровые вычислительные машины в Великобритании. Лиз (Digital computers available in Britain. Compil. Lees C. H.), Brit. Communs and Electron., 1958, **5**, № 12, 942—949 (англ.)

Приводится таблица сравнительных данных вычислительных машин, установленных в Великобритании. Всего имеются данные по 27 типам машин.

О. В. Бачин

12668. Автоматы, 1959 г. Хандел (Automath, 1959. Handel S.), Automat. and Automatic Equipm. News, 1959, **5**, № 1, 16—19 (англ.)

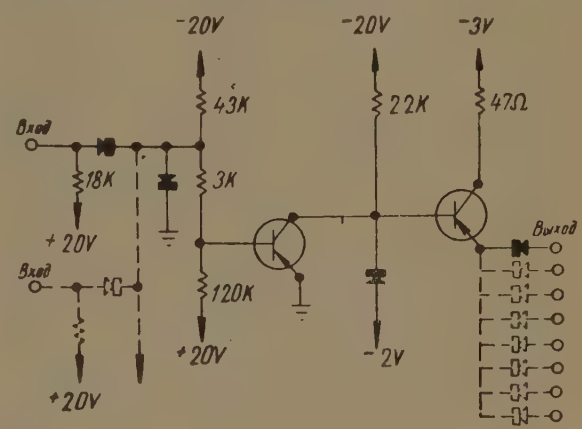
Сообщение о выставке математических машин и оборудования, организованной ЮНЕСКО в июне 1959 г. в Париже, на которой были представлены Бельгия, Германия, Франция, Великобритания, Италия и США. Дается описание некоторых экспонатов. Шведская фирма «Advidabergs» представила на выставку запоминающее устройство на магнитной ленте карусельного типа ECT64, конструктивно представляющее собой колесо диаметром 43,18 *см*, выполненное из легкого сплава и вращающееся вокруг горизонтальной оси, по окружности

которого расположены 64 бобины с магнитной лентой. На каждой бобине помещается 8,4 *м* ленты для 8-канальной записи. Смена бобины занимает 15 сек. Общая емкость этого запоминающего устройства около 5 млн. десятичных цифр. Время выборки одного числа составляет 2 сек. Бобины с лентой и блок записывающих и считывающих головок помещены в пыленепроницаемые контейнеры. Эта же фирма представила устройство ETR-500 для чтения данных с перфоленты, которое может работать с 5-, 6-, 7- или 8-канальной лентой со скоростью 500 строк в 1 сек. Устройство выполнено на транзисторах, применена диэлектрическая читающая головка. Япония демонстрировала машины, выполненные на параметронах: HIPAC-101 фирмы «Hitachi Ltd» и NEAC-1103 фирмы «Nepon Electric Company Ltd». HIPAC-101 имеет 4500 параметронов и производит 250 сложений и 125 умножений в 1 сек. NEAC-1103 выполняет сложение и умножение меньше чем за 1 мсек. Запоминающее устройство этой машины на ферритах емкостью 8192 числа имеет время выборки 25 мксек. Для размещения машины требуется больше 27 $м^2$. Другая машина фирмы «Nepon Electric Company», построенная на транзисторах, имеет габариты 135×67×135 *см*. Компания «Oki» демонстрировала быстродействующее печатающее устройство, скорость работы которого со стандартной лентой 300 строк в 1 мин. по 180 знаков в строке или 600 строк в 1 мин. со специальной лентой. Представленная французской фирмой «Société d'Électronique et d'Automatisme» машина CAB-500 использует в схемах магнитные элементы. В машине около 50 транзисторов. Запоминающее устройство на магнитном барабане имеет емкость 16384 30-разрядных двоичных чисел. Время одного оборота барабана 46 мсек. Скорость выполнения логических операций 3000 в 1 сек., арифметических операций 25 в 1 сек. Во входном и выходном устройствах используется перфолента, имеется специальный построитель кривых. Мощность, потребляемая машиной, равна 1,5 *квт*. Кроме машины CAB-500 фирма «SEA» демонстрировала машину непрерывного действия, являющуюся транзисторным вариантом машины «Repetitive Analogue Computer», позволяющей наблюдать решение задач на экране электронно-лучевой трубки. Точность машины 2%. Французская фирма «Société Nouvelle d 'Électronique экспонировала большую машину дискретного действия KL-901, конструктивно состоящую из 27 основных и 6 вспомогательных блоков и пульта управления. Машина выполнена на обладающих высокой надежностью лампах с применением печатного монтажа. 8 блоков запоминающего устройства на магнитной ленте позволяют запомнить 48 млн. 30-разрядных двоичных чисел. Емкость ферритовой памяти, размещенной в 8 блоках, 245760 чисел. Скорость работы машины 100 000 простых сложений, 10 000 умножений и 3000 операций извлечения квадратного корня в 1 сек. Площадь, требующаяся для размещения машины, составляет 108 $м^2$.

А. Н. Чуйкин

12269. Типовая конструкция полупроводниковых схем для высоконадежной системы наведения управляемых снарядов. Раймонд (A transistor-circuit chassis for high reliability in missile-guidance systems. Raymond G. A., Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 132—135. Discuss., 135 (англ.)

Описываются мероприятия, проведенные фирмой «Ремингтон Ренд-Унивак» при организации производства субблоков особонадежной вычислительной машины для системы наведения управляемых снарядов. В качестве типового универсального элемента была принята весьма простая схема, содержащая логические диодные схемы и полупроводниковые усилители (см. рисунок). Диоды на входе схемы образуют схему ИЛИ, максимальное число входов которой равно 6. Эта схема управляет инвертором, выходной сигнал которого усиливается эмиттерным повторителем. Сигнал, получаемый на выходе эмиттерного повторителя, управляет входами диодных схем И, максимальное число которых может быть 8. Сигналам «1» и «0» в схеме соответствуют потенциалы 0 *в* и —2 *в*. Всего в вычислительной машине используется 3000 таких элементов, что составляет 75% от всего оборудования. Такая степень унификации позволила, повысив надежность типового элемента, значительно улучшить надежность всей машины. Выбор оптимальных параметров схемы типового элемента был произведен на основе анализа вариантов с помощью машины «Унивак Сайнтифик». Выбранные параметры обеспечивают надежную работу схемы при уменьшении B у обоих триодов на 30% от первоначальной величины, при



увеличении обратных токов диодов от 50 *мка* до 400 *мка*, при уходе всех сопротивлений и питающих напряжений в пределах 10% в наихудших сочетаниях. Такие запасы гарантируют работоспособность схемы при максимально возможном старении деталей. Для выбора наиболее надежных типов триодов и деталей были построены и испытаны несколько небольших вычислительных устройств с автоматическим контролем. Все типы триодов и деталей испытывались в работе при изменении температуры, влажности, ударах и вибрации. Особое внимание обращалось на внезапные отказы деталей, которые нельзя избежать, используя профилактический контроль. Окончательный выбор типа деталей и триодов определялся в первую очередь их надежностью, а не электрическими характеристиками. Проверка триодов производилась с помощью специально разработанного автомата. Методика входного контроля деталей была разработана на основе анализа испытаний 60 000 деталей. Для получения желаемой надежности каждый субблок после сборки герметизируется внутри стеклянной оболочки, заполненной сухим газом (смесь гелия с азотом). Относительная влажность внутри оболочки не превышает 1% и контролируется специальным элементом, размещенным в субблоке. Для соединения субблоков с шасси используются особо надежные контакты с двумя независимыми половинками гнезда. Из 10 000 используемых в машине контактов за время наладки и эксплуатации не было обнаружено ни одного плохого. Монтаж схемы производится на плитах из стекловолокна с печатным монтажом. Качество всех паек контролируется после термоцикла в диапазоне температур — 60°С и +55°С. За время эксплуатации машины с мая 1957 г. по март 1958 г. вычислительная машина проработала 1613 час. За это время было зафиксировано 7 сбоев из-за отказа отдельных субблоков. Приводятся причины, вызвавшие эти отказы.

А. Б. Залкинд

12270. Логические элементы в системе управления. Фишер (Logic in control. Fischer G. F., Jr), South. Power and Ind., 1959, 77, № 3, 34—38 (англ.)

Описывается универсальное, электрическое, коммутационное устройство, использующее логические элементы без подвижных деталей. Коммутационное устройство, разработанное для работы в системах управления, включает в себя восемь различных типов логических элементов и вспомогательное оборудование: источник питания, усилители и регуляторы. Первый тип логического элемента является многооперационным устройством выполняющим более 21 комбинации логических операций И, ИЛИ и НЕТ. Он построен на базе магнитного усилителя с двумя устойчивыми положениями. Сигналы, поступающие на входные клеммы *A* и *B*, являются «положительными»; они возбуждают обмотку, которая выполняет операцию «включено» и на выходе устройства появляется постоянный сигнал. Сигналы, поступающие на клеммы *C*, *D*, *E* — «отрицательные», они производят операцию «выключено» (нет выходного сигнала). Сигнал смещения, подводимый к клеммам 1 и 2, так же производит операцию «выключено». При отсутствии входных сигналов на выходе устройства имеется пульсирующий сигнал постоянного тока, который исключает операцию фазирования при объединении ряда коммутирующих устройств. Если алгебраическая сумма входных сигналов положительна или равна нулю, то на выходе устройства будет постоянный сигнал. Если алгебраическая сумма входных сигналов отрицательна, то на выходе устройства сигнала не будет. Второй тип логического элемента является многооперационным устройством, построенным на базе магнитного усилителя с обратной связью. Он выполняет четыре комбинации логических операций с запоминанием конечного результата в случае выключения источников питания. Третий и четвертый типы логических элементов являются блоками запаздывания на 10 и 4 сек. Они работают по принципу регулирования магнитного потока внешним сопротивлением. Блок запаздывания на 4 сек. обладает памятью. Пятый тип логического элемента служит для отключения входного сигнала. Принципиальная схема этого блока аналогична схеме логического элемента первого типа. Шестой и седьмой типы логических элементов являются смесителями типов И и ИЛИ. Первый будет иметь выходной сигнал только тогда, когда имеются в наличии все заданные входные сигналы. Второй будет иметь выходной сигнал, когда присутствует один или более входных сигналов. Восьмой тип логического элемента выполняет функцию переключателя. Операция переключения осуществляется с помощью транзистора, который в проводящем положении (операция замыкания) имеет очень малое сопротивление, а не в проводящем положении (операция размыкания) имеет очень большое сопротивление. Входной сигнал управляет транзистором посредством трансформатора, во вторичной обмотке которого включен выпрямитель. Первые пять типов логических элементов (магнитных) имеют сигнальные лампы, которые светят в положении «включено». Предусмотрена блокировка путем введения общего последовательного смещения. Если один из блоков удален или у него нарушено смещение, то разрывается общая шина и выключается питание. Производится экономическое сравнение статических переключателей с реле и рассматривается применение статических переключателей в системе управления конвейерной линией товарного склада. П. В. Тихонов

12271. Логические схемы вычислительных машин с полупроводниковыми приборами. Зимин В. А. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 204—222

12272. Параллельный сумматор на магнитных сердечниках. Чжэнь Мао-чжао (A magnetic core parallel adder. Chen Mao-Chao), IRE Trans. Electronic. Comput., 1958, 7, № 4, 262—264 (англ.)

Описывается принцип действия параллельного сумматора, собранного на магнитных сердечниках из материала с прямоугольной петлей гистерезиса. Отличительной особенностью его является то, что единица переноса переносится влево до разряда с нулевыми значениями слагаемых за 1 такт и поэтому устраняются недостатки, вытекающие из необходимости затраты дополнительного времени на перенос единиц из младших разрядов в старшие. Каждая ячейка сумматора, предназначенная для суммирования 2 чисел одного разряда и единицы переноса из младшего разряда, собрана на 6 торах и 2 вакуумных триодах. Применение кристаллических триодов в предлагаемой схеме сумматора считается нецелесообразным, так как потребляемые ими токи и мощности выше, чем у электронных ламп. Поэтому они могут искажать *V*-образные выходные импульсы, получающиеся при перемагничивании торов и представляющие в данной схеме число «1» в сумме чисел и в наличие единицы переноса. Поскольку практически *V*-образные импульсы в каждой разрядной ячейке получаются с некоторым запаздыванием по отношению к фронту ведущего импульса, определяющего такт работы, максимальное количество разрядов суммируемых чисел практически ограничено некоторой величиной, зависящей от качества используемых в схеме элементов. Для уменьшения запаздывания импульсов предлагается умечьшать толщину сечения торов и увеличивать их диаметр, а также собирать часть торов (по 3 шт.) в виде концентрической пачки с 1 витком общей выходной обмотки, проходящей через общее отверстие пачки торов. В качестве примера возможных параметров элементов схемы указывается, что на ферритовом торе F-483 фирмы «Дженерал Керамикс» при 2 ампервитках ведущего импульса можно получить выходной импульс на 1 витке выходной обмотки. При использовании диода с высокой переходной проводимостью, например 6AC7, имеющего *g*-7700 микромо, это напряжение может трансформироваться в импульс тока 0,019 *a*. Таким образом, для приведения в действие выходных суммирующих торов ячейки достаточно иметь 100 витков во входных обмотках этих торов. Библ. 11 назв. И. Д. Алимов

12273. Устройства умножения и деления в двоичной системе для автоматических вычислительных машин. Токер (Techniques of multiplication and division for automatic binary computers. Tocher K. D.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, 11, № 3, 364—384 (англ.)

12274. Генератор для случайных чисел. Исаксон (Generator for tilfaeldige tal. Isaksson H.), Teleteknik, 1958, 9, № 4, 175—186 (датск.)

Рассматривается проблема получения последовательностей случайных чисел в цифровых машинах. Отмечается, что последовательности случайных чисел, получаемые программным путем с помощью некоторого алгоритма, часто не удовлетворяют требованиям задачи, решаемой на машине из-за малости периода случайности. В связи с этим автором статьи отдается преимущество физическим методам моделирования случайных чисел. Наиболее эффективным из этих методов автор считает метод получения случайных чисел с помощью выделения их из электрического шума. Отмечается два пути получения случайных чисел таким образом. Первый способ состоит в сопоставлении нулю и единице сигналов шума, обладающих разной амплитудой, второй способ сопоставляет двоичным цифрам сигналы шума разного знака. Автор подробно рассматривает второй способ. Для его осуществления производится равномерное разбиение по оси времени на такие отрезки, длина которых больше наибольшей частоты шума. Положительные или отрицательные значения кривой шума

в точках деления являются случайными значениями. На основе этого метода строится генератор случайных чисел. Приведена блок-схема такого генератора. Разделительные импульсы поступают с генератора импульсов через 50 мксек. Квадрирующий генератор при положительном значении кривой шума в точке разделения дает на выходе 0 *в*, а при отрицательном значении кривой шума 10 *в*. В зависимости от этого на вход мультивибратора либо поступает, либо не поступает входной сигнал. В силу моностабильности применяемого мультивибратора на выходе схемы образуется случайная последовательность сигналов. В статье подробно рассмотрена принципиальная схема такого генератора, временная диаграмма его работы и основные характеристики. Подобный генератор случайных чисел применяется в датской машине ДАСК (DASK) Библ. 7 назв.

Д. А. Поспелов

12275. Феррорезонансные контуры для цифровых вычислительных машин. Ньюпорт, Белл (Ferroresonant circuits for digital computers. Newport C. B., Bell D. A.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1957, **17**, № 11, 619—630 (англ.)

12276. Безднодный магнитный сдвиговый регистр на трансфлюксорах. Прайуэс (Diodeless magnetic shift registers utilizing transfluxors. Prywes Noah S.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, **7**, № 4, 316—324 (англ.)

Обычно в сдвиговых регистрах, построенных на магнитных сердечниках, используются диоды для развязки каскадов. Описывается принцип действия регистра, в котором на каждый разряд устанавливается по 2 трехапертурных (т. е. имеющих по 3 отверстия) трансфлюксора. Развязка каскадов в таком регистре обеспечивается за счет магнитных свойств элементов схемы. Подробно рассматривается работа трехапертурного трансфлюксора. Анализируется процесс передачи информации между элементами схемы регистра. Приводятся соображения о возможности создания сдвиговых регистров и элементов задержки, выполненных на полосках или кольцах магнитного материала с высеченными для образования трансфлюксоров отверстиями под обмотки. В качестве примера указывается, что трансфлюксор фирмы «РСА», в котором напряженность переключающего магнитного поля в 3 раза превосходит коэрцитивную силу материала, имеет время переключения 0,3 мксек. Сдвиговый регистр, построенный на таких трансфлюксорах, работал на частотах свыше 500 *кгц* и имел время переключения 0,8 мксек. Библ. 7 назв.

И. Д. Алимов

12277. Переключающие схемы в ячейках подготовляют данные для ввода в машину (Packaged switching circuits prepare data for computer input), Nat. Bur. Standards Techn. News Bull., 1959, **43**, № 10, 184—185 (англ.)

Национальным бюро стандартов разработаны логические схемы на транзисторах для предварительной обработки данных перед вводом в вычислительную машину. Всего имеется 7 типовых схем: триггер, диодная схема совпадения, генератор одиночных импульсов, сборка-инвертор, сигнальный индикатор, аналоговый переключатель и мощный вентиль. Эти схемы согласуются друг с другом и могут работать на частоте до 50 *кгц*. Схемы изготовляются печатным монтажом на типовых ячейках размерами 100×125 *мм*.

И. К. Волков

12278. Дистанционный ввод данных в электронную память быстродействующих вычислительных машин (Long distance data input for electronic brain of high-speed computers), Electr. Engng, 1959, **78**, № 4, 399—400 (англ.)

Компания «Вестерн Электрик» (США) демонстрировала новое устройство для передачи информации по телефонным проводам в вычислительные машины, обрабатывающие деловые данные. Устройство обеспечивает также одновременную передачу информации из центра обработки данных в сотни контрольных пунктов. Электронная аппаратура в приемном центре будет воспринимать данные, посылаемые по телефонным проводам со многих разбросанных точек, при помощи небольших дешевых приемников. Информация, поступающая с этих точек, может автоматически быть записана на перфоленту или перфокарты, которые могут быть непосредственно введены в вычислительную машину. Первое испытание системы дистанционного обмена информацией будет производиться между штатами Нью-Йорк и Иллинойс с контролем правильности передач на перфокартах.

Г. Х. Новик

12279. Анализ работы стабилизатора напряжения на вычислительной машине. Прескотт (Computer analyzes voltage — regulator performance. Prescott H. L.), Westinghouse Engr, 1958, **18**, № 3, 76—79 (англ.)

12280. Источники питания электронных вычислительных машин требуют усиленного воздушного охлаждения (Electronic computer requires large cooling air supply), Air Condit. Heat. and Ventilat., 1957, **54**, № 3, 62—63 (англ.)

12281. Аналого-цифровые преобразователи. Розман (Les convertisseurs analogiques numériques. Rosmann F.), (France), 1958, № 21, 141—145 (франц.) См. РЖМат, 1959, № 4, 7625.

12282. Применение электронных вычислительных машин для расчета орбиты американского искусственного спутника «Исследователь» (L'impiego di calcolatori elettronici per la previsione dell'orbita del satellite americano «Explorer») Automazione e automatismi, 1958, **2**, № 1, 33—35 (итал.)

Описывается система сбора и обработки данных, использовавшаяся для расчета элементов орбиты американского искусственного спутника «Исследователь» (Explorer). Система состоит из ряда радиоприемных станций, расположенных в различных точках земного шара, и электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-704, установленной в Вашингтоне. Приводятся некоторые данные машины ИБМ-704.

А. В. Шилейко

12283. Исследование условий работы оператора в замкнутой цепи управления самолетной бортовой цифровой вычислительной машиной. Беннетт (Experiments on the relation of the operator to the control loop of an airborne digital computer. Bennett C. A.), IBM J. Res. and Developm., 1959, **3**, № 3, 275—281 (англ.)

Во многих полуавтоматических системах управления (в частности, в бомбардировочных и навигационных) роль оператора сводится к удерживанию отметки цели в перекрестии с помощью подачи управляющих команд. При использовании в системе управления цифровой вычислительной машины управляющие сигналы воспринимаются машиной только в дискретные моменты времени и изображение на экране индикаторного устройства изменяется также дискретно, что затрудняет работу оператора. Описываются результаты трехлетних исследований влияния такой дискретности на работу оператора, проведенных с целью определения допустимой минимальной частоты выдачи решений цифровой машиной. В большинстве экспериментов подопытному оператору ставилась задача совмещать с точностью ±1,5 *мм* перекрестие с хаотически прыгающей на величину до 2,5 *см* меткой цели и замерялось время, потребовавшееся для совмещения при различной дискретности съема управляющих сигналов и различной частоте сканирования развертки на экране. Снимаемый с двухкоординатной ручки управления сигнал использовался как позиционный или как скоростной. В последнем случае он пропускался через интегрирующий элемент. Обнаружено, что по мере уменьшения

частоты съема управляющих сигналов с ручки увеличивается время, требующееся для совмещения цели с перекрестием. По мере увеличения этой частоты время совмещения асимптотически приближается к времени, требующемуся при непрерывном съеме сигналов, практически совпадая при частоте 10 *гц*, если задается скачкообразное изменение положения отметки цели, или при частоте 5 *гц*, если задается скачкообразное хаотическое изменение скорости перемещения отметки цели. Особое влияние на величину времени совмещения имеет передаточное отношение от органа управления к индикатору, причем эта зависимость имеет *U*-образный вид с явно выраженным минимумом. Поэтому для каждого комплекса конкретных условий может быть установлена оптимальная чувствительность управления, дающая минимум времени совмещения. Исследовалось влияние запаздываний информации, вызываемых ограниченным быстродействием цифровой вычислительной машины, инерционностью элементов системы управления и ограниченной частотой сканирования. Если запаздывание передачи информации равно 1 периоду выдачи решения машиной, то при частоте съема сигналов 2 *гц* это эквивалентно запаздыванию на 0,5 сек. В таких условиях разница условий работы оператора по сравнению с работой без запаздывания исчезает при частоте выдачи решений в 20 *гц*. При экспериментах установлено, что дискретность съема управляющих сигналов и дискретность обзора секторов экрана (т. е. ограниченность частоты сканирования) влияют на работу оператора совершенно независимо. Однако при очень малых частотах соответствующая синхронизация этих процессов может снизить влияние обоих этих видов дискретности на работу оператора. Делается вывод о том, что при непрерывном съеме управляющих сигналов позиционное управление имеет преимущества перед скоростным. При дискретном съеме управляющих сигналов позиционное управление менее подвержено влиянию изменения частоты съема сигналов, чем скоростное управление. Наиболее существенным недостатком дискретного позиционного управления является «квантизация» — ограничение разрешающей способности оборудования. При позиционном управлении разрешающая способность преобразователя управляющих сигналов из аналоговой формы в цифровую должна быть в 2 раза выше требуемой общей точности слежения. Рассматриваются 3 различных варианта системы управления с цифровой машиной, отличающиеся методом выполнения операции интегрирования. Предлагается схема управления, в которой цифровая машина вынесена в дополнительную ветвь канала управления и поэтому для оператора вся система ведет себя как непрерывная. Библ. 6 назв.

И. Д. Алимов

12284. Применение вычислительных машин в случаях, когда методы моделирования кажутся предпочтительнее цифровых. Гомпертс (Computing applications where analogue methods appear to be superior to digital. Gomperts R. J.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1957, 17, № 8, 421—428 (англ.)

При решении научных и технических проблем в первую очередь формулируется математическое выражение, описывающее эту проблему, а затем в каждом конкретном случае определяются методы для решения задачи, выбор которых зависит как от специфики задачи, так и от имеющегося оборудования.

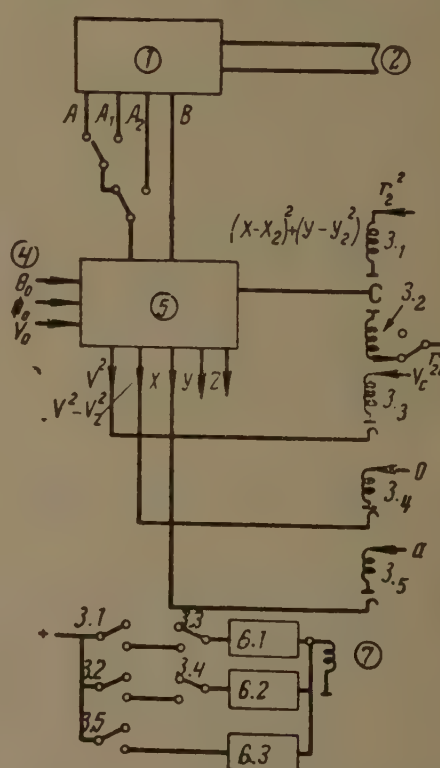
Универсальные вычислительные машины непрерывного действия имеют ряд преимуществ по сравнению с цифровыми вычислительными машинами: 1) более легкое программирование и легкость изменения программы, 2) возможность работать в масштабе истинного времени с действующими объектами; 3) легкость управления в процессе работы; 4) возможность физического выбора важнейших параметров и наблюдения эффекта изменения параметра; 5) легкость обслуживания и простота нахождения ошибок; 6) возможность увеличения машины путем простого подсоединения новых блоков.

Имеется целый ряд задач, для которых применение вычислительных машин непрерывного действия более выгодно, например, задача распределения температуры в нагреваемой пластине, частотный анализ шума и т. д.

Одним из важнейших преимуществ цифровых вычислительных машин является использование метода Монте-Карло. Во многих случаях входные сигналы или параметры задачи даются статистически. Решение в таких случаях почти всегда не может быть выражено аналитически и дается также статистически. Можно иметь систему произвольно меняющихся входных сигналов и проводить решение для каждого из них. По полученным данным можно судить об общем решении задачи, например о девиации, спектре, возможном распределении и т. д. Чем больше входных сигналов, тем полнее выходная статистика. Таким путем можно установить предельную точность орудия, управляемого радаром, поражающую силу управляемого снаряда, детали процесса рассеивания в ядерном реакторе.

В статье рассматривается процесс столкновений нейтронов в ядерном реакторе. Быстрые нейтроны, освобождающиеся в реакторе, могут сталкиваться с атомами графита, могут вылететь из реактора, могут быть снова поглощены ураном, а могут стать в результате множества столкновений тепловыми.

Вычислительная машина непрерывного действия, схема которой показана на рисунке, определяет поведение



1 — Читающее устройство. *2* — Магнитная лента. *3* — Реле. *4* — Начальные условия. *5* — Вычислительная машина. *6* — Счетчики. *7* — Реле остановки вычислений.

нейтрона, от освобождения его до поглощения теплового нейтрона ураном, при котором происходит новое деление.

Рассматриваются два произвольных процесса: частота столкновений и угол рассеивания нейтронов. На магнит-

ной ленте в канале A записаны временные интервалы процессов рассеивания, которые зависят от сечения материала, и соответствуют движению быстрых нейтронов в графите, в канале B записано произвольное распределение углов рассеивания. Импульс с канала A, соответствующий столкновению, открывает вентиль, и выход канала B поступает в машину, давая угол и изменение энергии. Это дает новую составляющую скорости частице, которая после интегрирования определит вектор положения нейтрона в любой момент времени.

Скорость и координаты частицы непрерывно контролируются для установления момента попадания частицы в специальные области. Если установлено, что частица находится в уране, то включается реле 1 и подключается вход канала A_1, который представляет интервалы столкновений для быстрых нейтронов в уране. Если вычислено, что нейтрон попал в воздушный канал или его скорость уменьшилась, то реле 3.2 и 3.4 включат реле остановки вычислений, и эта операция запишется в счетчике. Аналогично имеются реле, из которых показано лишь реле 3.5, которые отмечают выход нейтрона за пределы реактора, что записывается в счетчике 6.3.

Если скорость нейтрона достигнет тепловой скорости, эффективное сечение нейтрона в графите изменится и должен применяться канал A_2, соответствующий столкновениям медленных нейтронов в графите. Эти столкновения записываются в счетчике 6.1.

В ходе работы машины может быть установлено число столкновений нейтрона за время его жизни и его последнее место при данном начальном угле и данной конфигурации реактора.

Установлено, что среднее число столкновений за время жизни нейтрона колеблется от 400 до 1000. Запись ленты легко может читаться со средней частотой импульсов 100 *гц*. Поэтому каждый шаг вычислений будет занимать не более 10 сек. Вычисление 100 шагов для каждой системы начальных условий является вполне достаточным для статистики. Следовательно, для каждой системы начальных условий вычисления займут 15—20 мин. Если имеется 10 начальных значений угла вылета нейтрона в вертикальной плоскости Θ и 10 начальных значений угла вылета нейтрона в горизонтальной плоскости φ, то общая программа вычислений займет от 25 до 35 час. машинного времени. Учитывая время на замену ленты и на контроль, общее время вычислений оценивается двумя рабочими неделями. О. В. Бачин

12285. Выставка электронных вычислительных машин. III. (Electronic Computer Exhibition. N III.), Engineer, 1958, **206**, № 5368, 922—925 (англ.)

Окончание серии статей (РЖМат, 1960, 2385, 4638) о выставке электронных вычислительных машин, состоявшейся в Лондоне с 28 ноября по 4 декабря 1958 г. Фирма «Инглиш электрик» кроме цифровой машины ДЭЮКЕ выставила два моделирующих устройства. Универсальное моделирующее устройство ЛАКЕ (LACE), которое может решать уравнения 12-го порядка, предназначено для изучения систем автоматического регулирования, вибрации авиаконструкций, распределения нейтронных потоков в цилиндрическом реакторе. Другое устройство предназначено для моделирования ядерного реактора. Оно имеет размер $0{,}6\times0{,}6\times1{,}8$ *м* и разделено на три секции. В верхней секции размещается 5 операционных усилителей и устройство умножения. В средней секции имеется устройство управления для ввода различных параметров, таких, как движение управляющих стержней, источники нейтронов, вид топлива, поток охлаждения, температура вводимого газа. На передней панели имеются приборы, показывающие избыточную реактивность, положение управляющих стержней, период реактора, ядерную мощность и температуру поверхности топлива. В нижней секции расположены источники питания.

Моделирующее устройство универсального типа было выставлено также фирмой «Фэри» (Fairey Aviation Co.). Это устройство содержит 96 операционных усилителей. Для установки начальных условий используется цифровой вольтметр. Основной блок машины содержит 12 операционных усилителей, и на нем может быть осуществлено выполнение многих линейных и нелинейных математических операций. Решение задачи наблюдается или записывается на многоканальных катодных осциллографах, на быстродействующих записывающих устройствах или на устройствах, записывающих графики в зависимости от требований заказчика. Кроме того, моделирующее устройство для исследований в области авиационной баллистики, решающее уравнение с 6 неизвестными, построила фирма «Саундерс-Роэ» (Saunders Roe), а фирма «Шорт» (Short Brothers and Harland) экспонировала компактное моделирующее устройство, предназначенное как для решения дифференциальных уравнений, так и для моделирования физических задач. Фирма «Томсон—Хаустон» (British Thomson—Houston Co.) представила систему для контроля линейного механического положения по цифровому входному сигналу, предназначенную для управления станками. Система, названная «Helisyn», состоит из короткого цилиндра, двигающегося вдоль другого длинного цилиндра, причем на обоих цилиндрах имеются спиральные проводящие линии. На один из элементов подается электрическое напряжение, соответствующее входному числу, которое индуктирует сигнал на другом элементе. Путем сравнения сигналов устанавливается взаимное положение цилиндров. Экспериментальное устройство позволяло получать установку с точностью до нескольких микрон. Фирма «EMI Electronics» экспонировала вычислительную машину ЭМИДЕК-1100, часть вычислительной машины ЭМИДЕК-2400 и моделирующее устройство ЭМИАК II. Эта же фирма представила на выставке магнитный барабан на 8000 чисел, имеющий 128 дорожек, дополнительные дорожки тактовых импульсов и запасные дорожки, и лентопротяжное устройство со скоростью бумажной ленты от 12.7 до 3048 *м/сек*. Всего выставку посетило около 40 000 человек из 41 страны, включая СССР, Чехословакию и ГДР. О. В. Бачин

12286. Оптимальное программирование для электронных моделирующих устройств. Герман (Optimales Programmieren für elektronische Analogie-Rechenmaschinen. Herrmann Horst), Ann. Assoc. internat. calcul analog., 1958, **1**, № 1, 4—23 (нем.)

Быстрое и качественное решение задачи на вычислительной машине непрерывного действия зависит от правильного составления структурной расчетной схемы и соответствующего выбора констант. В первую очередь необходимо, учитывая особенность конкретного вычислительного устройства, так преобразовать исходную систему уравнений, чтобы решение достигалось кратчайшим путем. Вторым подготовительным этапом является выбор масштабов, постоянных времени интеграторов и вспомогательных параметров. Приводятся примеры структурных схем различной степени сложности для элементарных действий и решения отдельных дифференциальных уравнений. Статья имеет обзорный характер. А. А. Крюков

12287. Электронная модель изгибно-крутильных колебаний крыла самолета. Орданович А. Е., Стрелков С. П., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 181—188

Приводится краткое описание специализированной электронной модели, предназначенной для изучения изгибно-крутильных колебаний прямого крыла большого удлинения. Приводится система дифференциальных урав-

нений, связывающих вертикальные перемещения оси жесткости и углы поворота сечений, исходя из представления балки-крыла в виде дискретной механической модели из 8 ячеек, а также структурная схема модели, состоящей из набора усилителей постоянного тока. Диапазон частот последних от 20 *гц* до 5 *кгц*. Модель состоит из 32 интеграторов и 48 сумматоров и фазоинверторов, имея в основной схеме 288 ламп (144 колбы). Приведены результаты испытаний модели и сравнения экспериментальных данных с расчетными. Эти данные свидетельствуют о том, что расчеты для чистого кручения дискретной модели хорошо совпадают с экспериментальными, а для систем с непрерывно распределенными параметрами расчеты дают хорошее совпадение только для первого и второго тонов. Для изгибных колебаний расчеты подтверждаются экспериментально лишь для первого тона. Результаты испытаний модели свидетельствуют о ее пригодности для исследования изгибно-крутильных колебаний консольного крыла. Точность модели достигает 2—3% и является достаточной для практических применений. Уменьшение ошибки для высших тонов возможно путем увеличения числа ячеек. Библ. 8 назв. Б. Ш. Берковин

12288. Быстродействующее вычислительное устройство для интерпретации гравиметрических явлений. Недялков, Стайнов, Орманджиев, Илиев (High-speed computing device for interpretation of gravity anomalies. Nedialkov I. P., Stainov G. Z., Ormandjiev S. I., Iliev I. D.), Докл. Болг. АН, 1959, **12**, № 1, 37—40 (англ., рез. русск.)

Решается прямая задача гравиметрии и магнитометрии при помощи электролитической ванны. Полученная при этом точность удовлетворительна для практических применений. Кроме того, решается и обратная задача гравиметрии.

При решении обратной задачи сравнение аномалий искомого рудного тела и аномалии тела-модели делается без промежуточного вычерчивания изаномалий. Сравнение делается с помощью электронного устройства, которое вычисляет среднюю квадратическую ошибку интерпретации. Резюме автора

12289. Интегрирующие усилители на полупроводниковых триодах. Грошев А. А., Радиотехн. и электроника, 1959, **4**, № 6, 1038—1046

Приведены выражения коэффициента передачи и постоянной времени интегратора на полупроводниковых триодах.

Рассмотрено влияние входного сопротивления триода на точность интегрирования. Дана схема интегрирующего усилителя с входным сопротивлением, большим сопротивления коллектора. Резюме автора

12290. Синусоидально-косинусоидальный функциональный преобразователь. Шмид (Function generator for sines or cosines. Schmid H.), Electronics, 1959, **32**, № 4, 48—50 (англ.)

Описывается функциональный преобразователь непрерывного действия, выходное напряжение которого изменяется как синус входного напряжения. С помощью модулятора вырабатывается последовательность импульсов, длительность которых пропорциональна входной переменной. Эти импульсы открывают ключи, через которые на интегрирующую цепь поступает синусоида того же периода, что и последовательность управляющих импульсов. С выхода интегрирующей цепи снимается выходная переменная преобразователя. Функциональный преобразователь выполнен полностью на полупроводниковых триодах. Включение усилителя-ограничителя в цепь обратной связи входного усилителя постоянного тока позволило осуществить модуляцию длительности импульсов на новом принципе, не требующем выработки пилообразного напряжения и нечувствительного к нестабильности опорной синусоиды. Так как полупроводниковые элементы работают в импульсных режимах, схема обладает высокой стабильностью по отношению к изменениям температуры питающих напряжений и параметров компонент.

Статическая точность ±0,1% полной шкалы; нелинейные искажения 0,2%; частота опорной синусоиды до 10 *кгц*. Ф. П. Тарасенко

12291. Решающие элементы электронных счетно-решающих машин непрерывного действия, постоянного тока. Кэлушицэ (Elemente rezolvatoare pentru calculatorii analogi electronici de curent continuu. Călușiță Mioara), Automat. și electron., 1959, **3**, № 2, 68—76 (рум.; рез. русск., нем., франц., англ.)

Рассматриваются решающие элементы счетно-решающих машин непрерывного действия, постоянного тока. Автор пытается наметить направление развития и характерные типы этих элементов и тем самым содействовать установлению соответствующей терминологии на румынском языке. Резюме автора

12292. Создание логики для распознавания печатных знаков при помощи моделирования. Гринайас, Хоппел, Клумок, Осборн (The design of a logic for the recognition of printed characters by simulation. Greanias E. C., Hoppel C. J., Kloomok M., Osborne J. S.), Discuss. 473—475, Proc. Instn Electr. Engns, 1956, **B 103**, Suppl. № 3, 456—462 (англ.)

12293. Электрическое интегрирующее устройство «Елтинор» для оптической промышленности. Бонке, Шеплиц (Die elektrische Integriervorrichtung «Eltinor» des VEB Rathenower Optische Werke. Bonnke H., Scheplitz H.-G.), Feingerätetechnik, 1958, **7**, № 1, 28—33 (нем.)

12294. Аналоговый метод построения кривой. Уотерс (An analog method for constructing a curve. Waters William E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1959, **8**, № 1, 68 (англ.)

Показан способ построения в фазовой плоскости кривых с заданной кривизной как функцией длины дуги. Путем несложных преобразований исходное уравнение можно представить в виде, для моделирования которого требуется лишь один функциональный потенциометр. И. К. Волков

12295. Вычерчивание кривых с помощью гармонического анализатора. Слёйс (Krommen geproduceerd door de harmonische analysator. Sluis A. van der), Simon Stevin, 1958, **32**, № 1, 39—41 (гол.)

12296. Вычисление произведений и сумм произведений на табуляторе Т-5 (метод цифровых цепей для управления работой машины). Эпштейн В. Л. В сб.: Механиз. инж.-техн. расчетов при проектир. сооруж. М., Госстройиздат, 1959, 130—146

Описывается разработанный институтом Стальпроект метод цифровых цепей управления работой табулятора, который позволяет реализовать циклические программы, допускающие самопреобразования без остановки вычислительного процесса.

Статья иллюстрирует возможности метода цифровых цепей на примере вычисления произведений и сумм произведений. Рассматриваемая программа вычислений с учетом использования внутренних цепей машины позволяет осуществить весь вычислительный процесс на одном табуляторе без привлечения дополнительных селекторов; вычисление произведении в этом случае может быть выполнено с точностью до двух единиц седьмого знака. Управление селекторами частных передач основано на использовании внутренних цифровых цепей табулятора; подробно рассматриваются устройства управления и схемы коммутации, приводится машинное время при выполнении расчетов по различным методам. В частности: 1) по методу И. Н. Янжула $T_1 = (0{,}6qn + 5q + 0{,}5)$ сек.; 2) печать по методу комплементного представления цифр множителя: $T_2 = (5{,}4\ n + 2{,}5)$ сек.; 3) по методу цифро-

вых цепей: $T_5=(5n+4)t_n+nt_k=(2{,}9n+2)$ сек., где n — число карт в группе, q — число десятичных разрядов множителя. А. С. Вавилова

12297. Сортировка карт по модулям. Лемер (Sorting cards with respect to a modulus. Lehmer D. H.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 1, 41—46 (англ.)

12298. Матричный манипулятор (Matrix manipulator), Nat. Bur. Standards Techn. News Bull., 1958, 42, № 5, 87—89 (англ.)

При вычислениях с использованием матриц часто бывает необходимо производить перестановку столбцов или строк матрицы. В статистической лаборатории Национального бюро стандартов изготовлено механическое устройство для обработки двоичных матриц. Матрица набирается из пластмассовых кубиков черного и белого цвета, представляющих «1» и «0» элементов матрицы. В каждом кубике имеются два пересекающихся горизонтальных отверстия, и через каждый столбец или строку матрицы может быть пронизан металлический стержень, изъят из матрицы и заменен другим. Таким образом, например, очень просто может быть решена задача установления идентичности двух матриц. О. В. Бачин

12299. Практический способ получения частотного спектра периодической функции времени. Хёриг (Ein praktisches Verfahren zur Gewinnung des Frequenzspektrums einer periodischen Zeitfunktion. Hörig J.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, 3, № 3-4, 195—200 (нем.)

Пусть $f(t)$ — периодическая функция времени с периодом T_0, составленная из кусков простейших кривых, прямых, экспоненциальных кривых, синусоидальных дуг и т. п. Описывается простой прибор, с помощью которого легко определяются амплитудный и фазовый спектры таких кривых. Прибор (см. фото) устроен следующим образом. На круглой шкале-шаблоне нанесены спектры импульсов простейших форм: прямоугольного, пилообразного, экспоненциального и т. д. Подвижная шкала, установленная позади шкалы-шаблона, является масштабом. Импульсы, спектры которых нанесены на шаблон, исследуются весьма просто. После установки шкалы-шаблона в положение, соответствующее исследуемому импульсу, масштабная шкала устанавливается в соответствии со скважностью импульса. Остается лишь прочитать параметры и привести их к истинным масштабам. Установка нуля для каждой формы импульса строго определена. Исследование кривых $f(t)$, составленных из форм, имеющихся в шаблоне, требует предварительного приведения аргумента.

В. А. Михайлов

12300. Распределение корней алгебраического уравнения на комплексной плоскости и механизм для решения алгебраических уравнений высших степеней с вещественными и комплексными коэффициентами. Королев Н. И., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1958, 14, 213—221

12301. Применение поводковых передач в качестве функциональных генераторов для вычислительных устройств малых габаритов. Арчибалд (The application of pinwheel gears as function generators in lightweight computers. Archibald J. L.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 254—256 (англ.; рез. франц.)

12302. Вычислительная машина условной вероятности (A conditional probability computer), Electron. Engng, 1958, 30, № 365, 435 (англ.)

На открытом дне физической лаборатории в Теддингтоне демонстрировалась вычислительная машина (в. м.) условной вероятности, находящаяся в стадии экспериментальной разработки. Машина имеет 5 входных каналов и состоит из 31 одинакового блока, в которых накапливается статистическая информация. Когда информация накоплена и один или несколько входных каналов возбуждаются, в. м. устанавливает, не является ли заданная информация присущей информации какого-либо канала либо группы каналов. Если это так, то в. м. указывает нужный канал. 31 блок представляют собой по существу счетчики: из них 5 считают число возбуждений в одном из пяти входных каналов, 10 считают число одновременных возбуждений двух любых входных каналов, 10 считают одновременные возбуждения трех каналов, 5—одновременные возбуждения четырех каналов и 1 считает одновременные возбуждения всех пяти входов. Основой счетчика служит запоминающий конденсатор, который имеет некоторую утечку специально для того, чтобы в. м. более четко реагировала на более позднюю информацию. Условная вероятность того, что информация, приходящая в каналы K и T, присуща каналу n, определяется как частное от деления числа счетчиков каналов K, T, n на число счетчиков каналов K и T. Если это частное превышает определенное пороговое значение, в. м. делает вывод о принадлежности входной информации каналу n. При демонстрации в. м. управляла устройством, определяющим границу между черной и белой областями, независимо от того, справа или слева был тот или иной цвет. Промышленное применение подобной машины в настоящее время еще очень сложно. О. В. Бачин

12303. Моделирование процессов распознавания образцов и обучения по методу проб и ошибок с помощью машины, вычисляющей условную вероятность. Атли (Imitation of pattern recognition and trial-and-error learning in a conditional probability computer. Uttley Albert M.), Revs Mod. Phys., 1959, 31, № 2, 546—548 (англ.)

Сообщается об опытах, проводимых в Национальной Физической лаборатории (Англия), имеющих целью моделирование процессов распознавания образцов и обучение машины. Подчеркивается, что опыты проводились не на универсальной, а на специализированной машине, позволяющей вычислять условную вероятность событий. Использование специализированных математических машин для выполнения действий, присущих животным и человеку, по мнению автора, может натолкнуть на некоторые мысли об организации нервной системы. Описывается принцип работы машины, которая была использована для опытов. Эта машина может фиксировать все возможные совпадения дискретных сигналов, поступающих по входным каналам. Кроме того, машина может регистрировать сочетания входных сигналов, расположенных во времени различным образом. Подсчитывая и запоминая количество всех совпадений, машина может вычислить вероятность появления того или иного совпадения при наличии определенных входных сигналов (условная вероятность). Отмечается, что, вероятно, нахождение условной вероятности это одна из многочисленных задач, выполняемых клетками нервной системы живого организма. А. Н. Чуйкин

12304. **Электрохимический запоминающий элемент.** **Назаров А. А., Петров Ю. П.**, Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1958, № 6, 50—53

Электрохимический запоминающий элемент состоит из трех электродов, погруженных в насыщенный раствор сернокислого цинка с добавкой закисной сернокислой ртути. Один электрод цинковый, два других (рабочий и стандартный) — амальгамированные ртутью пластинки рафинированной меди. Цинковый и стандартный электроды могут быть общими для большого числа элементов. Для записи к рабочему электроду прикладывается отрицательное напряжение в 1,5 *в* или больше относительно цинкового электрода. В процессе чтения измеряется э. д. с. между рабочим и стандартным электродами (1,1 *в*); чтобы при чтении не происходило разрушения информации, входное сопротивление усилителя чтения должно быть порядка 100 *ком*. Время записи получается порядка 30 *мсек*., время стирания — порядка 20 *мсек*., токи записи и стирания не приведены. Физический объем одного элемента в макете 1 *см*^{3}. Предлагается использовать элементы в релейных вычислительных машинах и специализированных машинах, где не требуется высокого быстродействия. При этом выбор адресов мог бы осуществляться тоже релейными схемами. М. А. Карцев

12305. **Имитирование генетических систем при помощи автоматических цифровых вычислительных машин. 1,2. Фрейзер** (Simulation of genetic systems by automatic digital computers. 1,2. Fraser A. S.), Austral. J. Biol. Sci., 1957, **10**, № 4, 484—491, 492—499 (англ.)

12306. **Сочинение музыки электронными вычислительными машинами. Нёйман, Шаппert** (Komponieren mit elektronischen Rechenautomaten. Neumann P. G., Schappert H.), Nachrichtentechn. Z., 1959, **12**, № 8, 403—407 (нем.; рез. англ.)

Описывается следующий способ сочинения музыки электронными вычислительными машинами. Машина вырабатывает случайные числа, каждое из которых соответствует так называемым «правилам композиции», содержащим не только известные положения учения о гармонии, но и, например, статистические данные, характеризующее частоту появления определенного звука. Правила могут быть заданы двояким образом. Во-первых, правила предварительно вводятся человеком; во-вторых, машина по вводимым в нее музыкальным произведениям вырабатывает правила. Возможны, как отмечается, «смешанные» способы задания правил: а) часть правил вводится предварительно, и другая часть вырабатывается машиной, б) определенные правила, предварительно введенные в машину, в процессе решения могут быть изменены программным путем. Составление машиной музыкального произведения по правилам называется «синтезом», а получение машиной правил по вводимым в нее музыкальным произведениям называется «анализом». В Иллинойском университете для машины ИЛЛИАК была составлена программа сочинения музыки, которая использовала только «синтез». Машиной была составлена пьеса в форме струнного квартета в четырех частях. Подробнее авторы останавливаются на программе, осуществляющей как «синтез», так и «анализ», которая была составлена Бруксом (F. P. Brooks), Гопкинсом (A. L. Hopkins), Нейманом (P. G. Neumann) и Райтом (W. V. Wright) в вычислительной лаборатории Гарвардского университета для машины МАРК IV. Теоретические положения, на основе которых была составлена программа, принадлежат Шеннону (C. E. Shannon), использовавшему теорию марковских процессов. На машине МАРК IV были статистически исследованы 37 хоральных мелодий и найдены частоты появления отдельных нот и последовательностей нот, т. е. был проведен так называемый «марковский анализ». При «марковском анализе» порядка m для всех последовательностей из m нот, которые совпадают в первых $(m-1)$ нотах, определяется, как часто появляется каждая из возможных m-х нот. Полученные значения относительных вероятностей используются в дальнейшем при «синтезе». В работе рассматривается способ кодирования нот, вопросы, связанные с гармонией, тональностью, ритмом, размером такта и т. д. Для задания ритма и размера такта, в частности, был использован так называемый «тактовый скелет». После однократного анализа 37 исходных мелодий были проведены различные «марковские синтезы» порядков 1÷8, в результате которых было получено около 600 мелодий. При синтезе 1-го порядка мелодии содержали неестественные интервалы и вследствие этого их было трудно петь (рис. 1). При синтезе порядка 8 полученные мелодии состояли из кусков исходных мелодий. Оптимальным оказался порядок 6 (рис. 2). В заключение отмечается следующее:

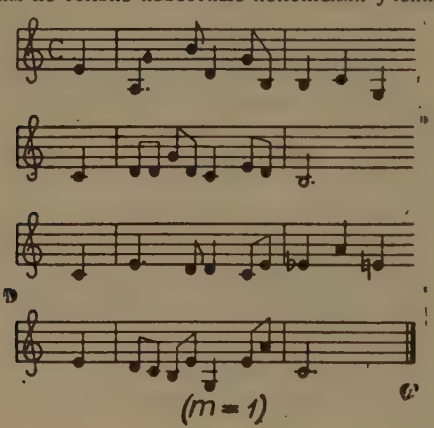


Рис. 1

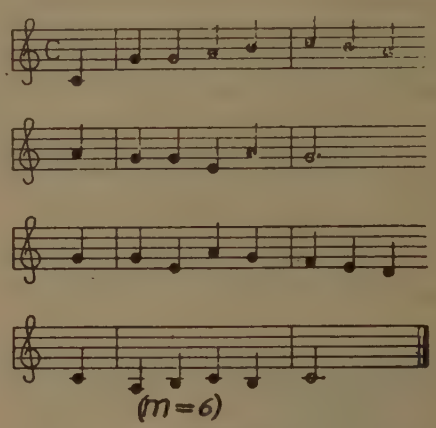


Рис. 2

1. Исходный материал (музыкальные произведения) должен быть, с одной стороны, достаточно однородным для того, чтобы обладать некоторой общей структурой, и, с другой стороны, он должен быть достаточно разнородным для того, чтобы была необходимая свобода при «синтезе».

2. Исходный материал должен быть достаточно обширным.

3. Для данного исходного материала должен быть найден оптимальный порядок «анализа» и «синтеза».

И. Б. Рохлина

12307. **Простой логический процесс машинного перевода с русского на английский. Уолл, Нихаус** (Russian to English machine translation with simple logical processing. Wall Robert E., Jr, Niehaus

Udo K.), Commun. and Electronics, 1958, № 34, 709—714 (англ.)

12308. Быстрый поиск информации. Деннис (Rapid retrieval of information. Dennis Bernard K.) Computers and Automat., 1958, **7**, № 10, 8—9 (англ.)

12309. Последние достижения в вычислительной технике. Бём (The next generation of computers. Boehm George A. W.), Fortune, 1959, **59**, № 3, 132—135, 143—144, 148, 150 (англ.)

Популярный обзор последних достижений и новейших тенденций в вычислительной математике и технике. Отличительными чертами современной вычислительной техники являются параллельный принцип действия, широкое внедрение методов автоматического программирования и объединение нескольких вычислительных установок в единую взаимосвязанную систему. Система обработки данных, разработанная в Национальном бюро стандартов (США), под названием «Pilot» служит типичным примером в этом отношении. Она состоит из трех вычислительных машин, из которых первая предназначена для выполнения арифметических операций, вторая, меньшая по размеру, действует в качестве регулировщика программы и вспомогательного устройства для первой машины, наконец, третья машина служит для управления и передачи входных и выходных данных, осуществляя их поиск одновременно на нескольких магнитных лентах, переводя эти данные в соответствующий код и передавая их в первичный вычислитель точно в заданные моменты времени. Систему «Pilot» предполагалось ввести в строй летом 1959 г. Сложность логических и монтажных цепей современных машин, а также приближение к практическому частотному пределу обычных электронных схем заставляют конструкторов все чаще прибегать к моделированию новых машин при помощи уже имеющихся. Так система «Pilot» была промоделирована на ИБМ-704. Подобным же методом фирмой «Ремингтон Ренд» конструировалась машина ЛАРК, вторая по быстродействию машина в США после машины СТРЕТЧ, рассчитанной на 1 млн. операций в 1 сек. Из новых математических методов отмечены линейное программирование, нашедшее успешное применение в экономике и нефтехимии в задачах со многими входными величинами, и метод Монте-Карло, позволивший, в частности, производить оценку эффективности расщепляющегося материала. Этот метод получает все большее применение в теории игр. О размерах вычислений в конкретных задачах нефтепереработки с привлечением линейного программирования можно судить по следующим данным: вычислительная машина должна иметь дело с матрицами из 200 строк и 1000 столбцов и произвести свыше 80 млн. умножений, не считая других промежуточных операций. Намечается тенденция к полному вытеснению программистов автоматическим программированием. Большие работы проведены по автоматизации перевода с русского языка на английский и по созданию шахматных программ. Нейрофизиологом Леттвином (Lettvin) из Массачусетского института предложена модель нейрона, которая, по его мнению, может быть меньше по величине, чем нейрон человека, если применить недавно изобретенные приборы — криотрон и сверхминиатюрный переключатель. В заключение рассмотрена возможная модель организации нейронной цепочки и передачи информации по ней, предложенная математиком Линкольновской лаборатории Селфриджем (O. Selfridge).

А. Ф. Смирнов

12310. Логическая структура электронных вычислительных машин. Амброзио, Ревильо (Struttura logica dei calcolatori elettronici. Ambrosio Silvano, Reviglio Giuseppe), Antenna, 1958, **30**, № 9, 402—413 (итал.)

Продолжение статьи авторов (РЖМат, 1960, 5987), описывающей принцип действия электронных цифровых вычислительных машин. Рассматривается выполнение отдельных операций и структура арифметических устройств, запоминающих устройств и устройств управления. Даются различные методы логической организации цифровых вычислительных машин, структуры и временные последовательности выполнения команд. Библ. 7 назв.

А. В. Шилейко

12311. Принципы действия электронной цифровой вычислительной машины. Херст (Principles of operation of an electronic digital computer. Hirst Frank), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 40—44 (англ.)

Популярная статья.

12312. Устройство управления цифровой вычислительной машины. Хемминг (Controlling the digital computer. Hamming R. W.), Scient. Monthly, 1957, **85**, № 4, 169—175 (англ.)

Популярная статья.

12313. Развитие и использование новых вычислительных машин. Нёйман (Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen. Neumann John von), Veröff. Arbeitsgemeinsch. Forsch. Landes Nordrhein-Westfalen. Naturwiss., 1955, № **45**, 7—27. Diskuss., 47—65 (нем.)

12314. Физическое программирование. Тун (Physikalische Programmierung. Thun Rudolph), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 168—170, 226 (нем.; рез. англ.)

12315. Универсальная аналого-цифровая вычислительная система. Бауэр, Уэст (A system for general-purpose analog-digital computation. Bauer Walter F., West George P.), J. Assoc. comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 12—17 (англ.)

12316. Словарь терминов по вычислительной технике и программированию (Glossary of computer engineering and programming terminology), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 6, 14—16; № 9, 17—20; № 10, 13—17; № 11, 15—16 (англ.)

См. также РЖМат, 1959, 9571.

12317. Использование больших цифровых вычислительных машин. Хилл (Uses of large-scale digital computers. Hill G. W.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 45—48 (англ.)

12318. Цифровые интегрирующие машины. Майоров Ф. В. В сб.: Вычисл. техн. М., АН СССР, 1958, 21—81

12319 К. Технология и расчет систем управления, регуляторов и сервомеханизмов. Наслен (Technologie et calcul pratique des systèmes asservis (régulateurs et servomécanismes). 2-e éd. entièrement refondue et augm. Naslin P. Paris, Dunod, 1958, 447 p., ill.) (франц.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

12320. Автоматический анализатор осматриваемого пространства и вычислительная машина. Олтерман (The automatic position survey analyzer and computer. Alterman Francis J.), IRE Nat. Convent. Rec., 1959, **7**, № 4, 231—241 (англ.)

Описываемое оборудование служит для определения астрономических координат любого места на наблюдаемой части земной поверхности с точностью до 0,1″. Комплекс оборудования состоит из 4 блоков: 1) Блок обзора представляет собой астролябию с фиксированным углом наклона 60°, которая может вращаться по азимуту на 360°. Программа работы позволяет использовать для ориентации до 200 звезд. На азимутальной оси расположен преобразователь угла в цифру для передачи значения азимута в вычислительную машину. 2) Гиросистема для определения направления на север. Время установления гиросистемы для углов до 60° не

превышает 45 мин. 3) Электронные часы, отсчитывающие время с точностью до 1 мсек. В момент прохождения звезды через меридиан время, показанное часами, передается в вычислительную машину. 4) Вычислительная машина APSAC, которая управляет работой всей системы и выполняет необходимые вычисления. APSAC представляет собой параллельную машину, оперирующую с 36-разрядными (включая знак) числами в двоичном коде. Система команд одноадресная. Ферритовая память имеет емкость 512 чисел. Время выборки одного числа 20 мксек. Ферриты помещены в термостат с постоянной температурой 60°С. В запоминающем устройстве на магнитной ленте плотность записи составляет приблизительно 1 код на 3 *мм*. Скорость движения ленты 63,4 *см/сек*. Запись производится по 7 дорожкам. Для контроля записи и считывания используется 1 контрольный разряд. Основная тактовая частота машины 50 *кгц*. Время выполнения основных операций: сложения и сравнения 0,12 мсек., умножения 1,52 мсек., печати 12 букв или цифр 1,92 сек., чтения или записи 16 кодов магнитной ленты 80 мсек. Машина занимает объем 0,0617 $м^3$ и весит 200 *кг*. Потребляемая мощность составляет 450 *вт*. Для построения схем машины использованы одинаковые блоки («логические блоки»), меняя связи между которыми можно получать различные логические схемы. Конструктивно на одной панели из материала на стеклянной основе размещено 24 логических блока и выполнен печатный монтаж. Размер панели 47,6×16,16×1,9 *см*. Связь между блоками осуществляется посредством соединительных проводов со штеккерами. Схема логического блока содержит один транзистор, диоды, сопротивления и конденсаторы. Блок рассчитан на работу в диапазоне температур от 0° до 55° при относительной влажности 95%. Транзистор включен по схеме с заземленным эмиттером и работает либо в режиме насыщения, либо в режиме отсечки. Приводятся примеры построения схем И, ИЛИ, триггеров, счетчиков и сдвигающих регистров. А. Н. Чуйкин

12321. Обработка в реальном масштабе времени сведений, необходимых для управления воздушным движением, ведущегося диспетчерской службой Комитета гражданской авиации США. Фенимор (Real-time data processing for CAA air-traffic control. Fenimore G. E.), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington. D. C.). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 169—172 (англ.)

Движение воздушного транспорта условно может быть разделено на 2 части: а) движение в зонах аэродромов и б) движение на воздушных трассах. Кратко описываются применяемые в США методы диспетчерского обеспечения полетов по трассам. Каждый диспетчер управляет движением самолетов в выделенной ему зоне. Полученные по радио сведения о плане полета каждого самолета и о пролете контрольных ориентиров он заносит на отдельную полоску бумаги и вычисляет ориентировочное время пролета последующих контрольных ориентиров. В часы «пик» на диспетчерском центре, расположенном в Нью-Йорке, составляется до 1500 таких карточек в час. В 1956 г. на воздушнодиспетчерском центре Индианополис установлена цифровая вычислительная машина ИБМ-650, в которую вводятся перфокарты, заготовленные операторами для каждого полета на основании полученных по радио планов полета. Машина автоматически определяет маршрут и профиль полета, вычисляет ориентировочное время пролета контрольных ориентиров и печатает все карточки, необходимые для работы диспетчеров. Планировалось увеличить пропускную способность системы, установив дополнительную вычислительную машину РАМАК и усовершенствованное устройство для ввода и вывода данных. На диспетчерских центрах в Нью-Йорке и Вашингтоне планировалось летом 1958 г. установить вычислительные машины УНИВАК — ФАЙЛ (Univac File Computer), в которые планы полетов должны вводиться по 2 каналам: или непосредственно по линиям связи, или после кодирования оператором, которое выполняется в том случае, когда текст получается по радио или по линии, не приспособленной для непосредственного ввода данных в машину. Приводится и поясняется блок-схема такой машины. Для усовершенствования процесса ввода планов полетов в вычислительную машину технический центр CAA (CAA—Civil Aeronautics Administration) заказал разработку печатающего аппарата ФЛАЙДЕН (FLIDEN — Flight Data Entry), в которую текст полученного сообщения запоминается на магнитном барабане и индуцируется на экране катодно-лучевой трубки. Предусмотрена возможность в случае ошибки оператора вернуться к месту сбоя и исправить ошибку. Для автоматического контроля правильности приема в конце каждой передачи передается контрольная группа, представляющая результат последовательного суммирования переданных знаков. Если на принимающей стороне получится отличающаяся контрольная группа, то это является сигналом о наличии ошибки в принятом сообщении. И. Д. Алимов

12322. Использование электронных вычислительных машин для обработки данных в ВВС США (L'impiego di calcolatori elettronici nei servizi logistici dell'aviazione americana), Automazione e automatismi, 1958, 2, № 4, 46—48 (итал.)

Сообщается о создании при штабе ВВС США Вычислительного центра, выполняющего различные работы по обработке данных. В центре установлена электронная цифровая вычислительная машина УНИВАК фирмы «Ремингтон Ренд» (США). Приводятся некоторые технические данные этой машины.

А. В. Шилейко

12323. Вычислительная машина революционизирует военные игры (Computer revolutionizes war games), ISA Journal, 1959, 6, № 11, 66—67 (англ.)

Сообщается о постройке и эксплуатации самого крупного из разработанных в последнее время военно-морского тренажера под названием НЭВС (NEWS — Nary Electronic Warfare Simulator) стоимостью 7,25 млн. долл. За каждой из сторон, участвующих в игре, закреплено по 24 боевых единицы, способных к маневрированию и снабженных 4 типами вооружения. Боевыми единицами могут быть отдельный корабль или самолет, соединение, выполняющее задачу, береговые укрепления, аэродромный комплекс или любые другие вооруженные силы, способные завязать бой и нанести урон противнику. Командир боевой единицы, его штаб и отдельные офицеры расположены в 20 командных центрах, отделенных друг от друга и передающих данные о местонахождении единицы через радиолокационный канал, а также скорость, курс, а для реактивных снарядов и самолетов и высоту. Таким образом, каждый командный центр реально отображает некоторое флагманское соединение, команду боевой единицы или воздушно-тактическую команду. Каждый из 20 командиров наблюдает и оценивает складывающуюся обстановку, отдает приказания своим силам и проверяет обоснованность своих маневров. Наиболее важным фактором, решающим исход сражения, в этом тренажере считается взаимодействие боевых сил. Опытные офицеры-судьи должны оценить качество этого взаимодействия. В этом им помогает вычислительная машина, запоминающая характеристики вооружения, мощность огня, повреждения цели и т. д., вычисляющая вероятность попадания и автоматически меняющая скорость движения или эффективность огня, если последние изменились в процессе боя. Быстродействие машины позволяет вести военную игру в масштабе времени, единого для всех вооружен-

ных сил и совпадающего с реальным временем или кратного ему. Театр действий может менять свою протяженность от 72 до 7200 км, а скорости от 5000 до 20 000 узлов (английских). Дорогостоящее современное вооружение и большие затраты на проведение реальных маневров создают затруднения в подготовке командиров и новый тренажер решает эту задачу, имитируя всю обстановку учений. А. Ф. Смирнов

12324. Вычислительная машина для расчета характеристик работы турбогенераторов. Хорнфек, Имсленд (Performance computer for steam-electric generating units. Hornfeck A. J., Imsland T. S.), Power Appar. and Systems, 1958, № 37, 647—653. Discuss., 653—654 (англ.)

Описываются структурные схемы вычислительных устройств, предназначенных для автоматического определения основных рабочих характеристик турбогенераторов: расход топлива на один выработанный киловатт-час, стоимость выработки одного киловатт-часа и др. Описываемые устройства устанавливаются на электростанции и способствуют поддержанию наиболее экономичного режима. В зависимости от рода топлива и схемы станции могут приниматься различные типы вычислительных устройств, сопоставляющих расход топлива с произведенной электроэнергией, определяющих потери тепла в агрегате и т. д. Такие устройства производят перемножение двух или более переменных величин, умножение на постоянный коэффициент, деление одной переменной на другую, сложение и вычитание и т. д. Отдельные элементы вычислительного устройства калибруются с точностью до 0,1%, погрешность самого вычислительного устройства оценивается в 0,5%, а учитывая погрешности при замерах входных параметров, общая погрешность составляет ±1%. А. А. Крюков

12325. Математическое моделирование несимметричных асинхронных машин. Ситник Н. Х., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 8, 28—44

Статья посвящена методике моделирования бесколлекторных машин переменного тока с неявновыраженными полосами. В качестве объекта моделирования выбрана асинхронная машина с несимметрией обмотки статора, являющейся, с одной стороны, вынужденной, а с другой стороны, используемой в специальных электрических машинах, например, асинхронный расщепитель фаз с обмоткой в виде несимметричной звезды. Правильный выбор схемы пуска такого рода машин и ее параметров сопряжен с очень громоздкими расчетами, что вызвано неприменимостью обычного метода временных симметричных составляющих. Излагаются общие соображения по созданию устойчивой структурной схемы моделирования, получения максимальной точности результата и удобств ее эксплуатации. Б. Ш. Беркозич

12326. К расчету функциональных шунтированных потенциометров при чебышевском приближении. Кислицын С. Г., Литвин Ф. Л., Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 11, 1515—1524 (рез. англ.)

Излагается способ расчета шунтированного потенциометра, предназначенного для воспроизведения нелинейной функции. Параметры потенциометра выбираются таким образом, чтобы обеспечить наилучшее (чебышевское) приближение к воспроизводимой функции. Способ иллюстрируется примером расчета. Резюме автора

12327. Применение вычислительных машин для теплового расчета индукционного двигателя. Джонсон (The application of computers to the solution of induction motor thermal circuits. Johnson A. E.), Power Appar. and Systems, 1957, № 28, 1543—1546, Discuss., 1546 (англ.)

12328. Использование моделирующего устройства для определения уровня подъема воды в реках и решения других гидравлических проблем. Лолер (The use of the analog computer in flood routing and other hydraulic problems. Lawler Edward A.), Midwest Res Inst. Pub!s (1956), № 185, 67—108 (англ.)

12329. Требования к емкости устройства, сортирующего почту. Бендер, Голдман (Capacity requirement of a mail sorting device. Bender B. K., Goldman A. J.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, 62, № 4, 171—173 (англ.)

Приводится формула для определения минимальной емкости устройства, сортирующего почту. Устройство работает следующим образом. В него поступают письма, адресованные в r пунктов назначения. После приема k писем устройство определяет, в какой пункт назначения имеется больше писем и выдает эти письма. Затем происходит прием следующих k писем и т. д. Показано, что для того, чтобы устройство не переполнилось, количество писем в устройстве перед t-й выдачей должно быть $x(t) \leqslant (r-1)(k-1)+k$ для всех t. Доказывается, что это число является максимально возможным числом писем в устройстве. А. Н. Чуйкин

12330. Краткое описание электронного коммутационного устройства системы «Белл». Кетчледж (An introduction to the Bell System's first electronic switching office. Ketchledge R. W.), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.). New York. N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 204—208 (англ.)

Описана система коммутации для экспериментальной телефонной станции, построенная целиком на электронных приборах. Помимо увеличения быстродействия, электронная система по сравнению с электромеханической имеет более простые функциональные узлы и позволяет в десятки и сотни раз уменьшить количество соединительных проводов. Путем сбора и обработки информации о количестве телефонных разговоров система производит автоматическое переключение телефонных линий в зависимости от их загрузки. Коммутационное устройство матричного типа выполнено на диодах тлеющего разряда с полым катодом, имеющих отрицательное сопротивление. Это позволяет скомпенсировать потери при передаче звуковых сигналов в других цепях. Большинство логических схем построено на полупроводниковых элементах. В блоках памяти использованы потенциалоскоп с барьерной сеткой и фотоскопическое устройство.

М. И. Гельштейн

12331. Вопросы сообщения в коммутационных системах связи. Бейдер (Traffic aspects of communications switching systems. Bader J. A.), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 208—213 (англ.)

Рассматриваются два возможных подхода при решении задачи выбора емкости коммутационной системы связи. Первый метод базируется на учете той части абонентов, которым не удается получить немедленное соединение; второй метод исходит из допустимой задержки по времени для образования соединения. По обоим методам даются кривые и некоторые формулы для решения практических задач. П. П. Пархоменко

12332. Применение цифровых систем для управления процессами. Фистер (Application of digital systems to process control. Phister Montogomery, Jr.), 1958 Nat. Sympos. Progr. and Trends Chem. and Petrol. Instrum. (Wilmington, Del.). Pittsburgh, Pa, Instrum. Soc. America, 1959, 49—59 (англ.)

Обсуждается вопрос об экономичности цифровых систем управления производственными процессами и порядке их разработки. Стоимость подобной системы достигает 200—400 тыс. долл. и поэтому ее применение оправдывается только в крупных предприятиях с большим потреблением сырья, значительным превышением стоимости готового продукта, по отношению к

стоимости сырья и т. п. Заранее должно быть рассчитано, что новый вид управления и контроля окупит полностью капитальные вложения в определенный срок. Резервы окупаемости при введении цифровой системы управления заключаются в большей возможности увеличивать объем выпускаемой продукции, качественно улучшать процесс, что особенно важно в производстве ценных и дефицитных продуктов, а также уменьшать себестоимость товара, повышать качество продукции. С экономической точки зрения должен существовать некоторый баланс между объемом готовой продукции, стоимостью производства и качеством изделия. Цифровая система управления позволяет гибко менять соотношения между этими тремя основными величинами в зависимости от спроса рынка. При проектировании цифровой системы самой трудной частью работы является разработка уравнений, определяющих функции вычислительной машины — основы цифровой системы. Эти функции могут быть как управляющими, так и вспомогательными, например, для непрерывной регистрации данных или очень важной операции усреднения данных о процессе за некоторый промежуток времени. Далее намечается комплекс приборов и датчиков, сигнализирующих о ходе процесса. В некоторых достаточно медленных процессах в систему управления может быть включен лабораторный анализ. После выбора приборов приступают к созданию необходимых преобразовательных узлов ввода и вывода для сопряжения с реальными датчиками и исполнительными органами. Математическая разработка задачи управления процессом начинается с составления общего выражения «цели» управления, почти всегда понимаемой в экономическом смысле. В упрощенном виде может быть записано в виде уравнения $D = K_1FY - K_2F$, где D — прибыль, F — скорость подачи сырья, Y — количество продукции, K_1, K_2 — величины, пропорциональные количеству продукта и сырья соответственно.

Конечной задачей системы управления является достижение максимума величины D. В такой трактовке имеется одно важное допущение — уравнение, приведенное выше, считается инвариантным во времени. Далее на переменные процесса накладываются ограничения, вызванные технологическими особенностями процесса или предельными параметрами оборудования. В программе управления должны быть предусмотрены специальные меры безопасности в случае достижения этих предельных значений. Решение этого упрощенного процесса иллюстрировано графиками, на которых представлены возможные области работы и приемы достижения максимума D. А. Ф. Смирнов

12333. Промышленные цифровые системы. Отис
(Industrial digital systems. Otis E. J.), IRE Trans. Industr. Electronics, 1958, № 6, 73—79 (англ.)

Автор считает, что системы управления и системы регистрации показаний приборов целесообразнее строить на основе цифровой техники, чем на устройствах непрерывного действия. Дается схема построения системы управления производственным процессом. Работа системы управления производственным процессом сопряжена с обработкой большого объема данных, точность которых находится в пределах 0,1÷0,01%. Этим требованиям наиболее полно удовлетворяет цифровая техника. Типовая система управления фирмы «Daystron Systems» (США) разбивается на четыре части: устройство ввода, имеющее дело с измерением переменных параметров процесса и командами программы; вычислительное устройство, обрабатывающее данные, необходимые для управления работой системы; выходные устройства, которые регистрируют ход процесса и выход его из режима, регулируют параметры процесса, собирают статистическую информацию, указывают основные изменения, которые оператор должен ввести в программирующие инструкции; устройство управления, в котором на основе информации, полученной от выходных устройств и коммерческой информации, производятся основные изменения производственного процесса. Устройство ввода включает сканирующее устройство и преобразователь аналоговых данных в цифровые. В сканирующем устройстве используются ртутные герметизированные реле, допускающие работу со слабыми сигналами, причем производится одновременное подключение обоих токоподводов сигнала. Использование реле также позволяет программировать ход сканирования, обеспечивая более частое сканирование быстроменяющихся переменных и переменных, приближающихся к предельным значениям. Преобразователь аналоговых данных в цифровые должен иметь: вход, защищенный от помех и имеющий высокую электрическую изоляцию (до 1000 *в*); высокую разрешающую способность (порядка 1:10 000) для слабых сигналов; интегрирующие контуры, чтобы сглаживать помехи измерений. Вычислительная секция представляет цифровую вычислительную машину универсального типа, спроектированную с учетом задач управления производственными процессами. Машина полностью построена на транзисторах. Скорость работы машины ниже скорости быстродействующих вычислительных машин, но она полностью удовлетворяет требованиям системы управления. Особые требования предъявляются к надежности всей системы. П. В. Тихонов

12334. Применение цифрового управления для автоматизации производства в промышленности. Брейнард
(Application of numerical control for automatic manufacturing in general industry. Brainard Wallace E. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, № AUT-3, 7 pp., ill.) (англ.)

Рассматриваются вопросы автоматизации мелкосерийного производства, в особенности металлообрабатывающего. Отмечается необходимость подготовки для работы на специализированных программирующих и вычислительных управляющих устройствах специального персонала с математической подготовкой. В. А. Брик

12335. Линейные дифференциальные трансформаторы, их применение к проблемам автоматики. Жели
(Les transformateurs linéaires différentiels, leurs applications aux problèmes d'automatisme. Gélix A.), Ingrs. et techniciens, 1958, № 112, 31, 33, 35, 37, 39—40 (франц.)

Линейный дифференциальный трансформатор (ЛДТ) служит в качестве чувствительного датчика перемещений. Магнитопровод трансформатора разделен на две ветви, на которых размещены две вторичные обмотки, включенные навстречу друг другу. Магнитный поток обеих ветвей замыкается через подвижной сердечник, составляющий часть магнитопровода. При симметричном положении подвижного сердечника магнитные потоки обеих ветвей одинаковы, напряжения, индуктируемые во вторичных обмотках, равны и взаимнопротивоположны, а выходной сигнал равен нулю. При смещении сердечника баланс магнитных потоков нарушается и на выходе появляется сигнал переменного тока, амплитуда и фаза которого характеризуют величину и направление смещения сердечника. Зависимость сигнала от перемещения характеризуется высокой степенью линейности; чувствительность легко доводится до тысячных долей миллиметров. Такие трансформаторы применяются как нулевые индикаторы в измерительных устройствах и как источники управляющих сигналов в различных сервосистемах. Аналогично работает датчик «Вестингауз Нультракс» (Westinghouse Nultrax). Он представляет собой длинный вал с двухзаходной канавкой, в которой уложены прямой и обратный провода первичной обмотки. По валу скользит обойма, на внутренней поверхности которой в двухзаходной канавке уложены прямой и обратный провода вторичной обмотки, по существу представляющие собой две вторичные обмотки, включенные навстречу одна другой. Амплитуда

выходного сигнала зависит от взаимного расположения витков на валу и на обойме. Она меняется по синусоидальному закону в пределах одного шага как от линейного перемещения обоймы относительно вала, так и от поворота вала вокруг оси. Это устройство используется для задания перемещений при автоматическом и программном управлении станками. Магнитный датчик СЭА (Société d'électronique et d'automatisme, Франция) содержит два линейных дифференциальных трансформатора, помещенных в одной каретке. Магнитные потоки замыкаются через линейку из ферромагнитного материала, в которой профрезерованы поперечные пазы прямоугольного сечения. Шаг и форма пазов выдерживаются с высокой точностью; после фрезеровки пазов поверхность линейки заливается пластмассой для предохранения от повреждений. Трансформаторы на каретке сдвинуты один относительно другого так, что сигналы на них имеют сдвиг по фазе на 90°, что упрощает переход от напряжений к перемещению. Сигналы подаются на преобразователь и после усиления на указатель круговой шкалы, показывающей истинную величину перемещения в пределах одного шага линейки. Устройство калибра 19 имеет шаг линейки 2 *мм* при длине 500 *мм*. Ошибка определения координаты не превосходит 10 *мк*, если скорость движения каретки не превышает 800 *мм/мин*, а длина линейки не больше 500 *мм*. При больших длинах точность падает из-за несогласованности отдельных отрезков линейки и влияния местных колебаний температуры. Для точных координатных машин шаг линейки может быть уменьшен до 1,28 *мм* (управление по двоичной системе счета) или 1,25 *мм* (метрический шаг). Устройство питается переменным током 400 *гц*. Колебания напряжения и частоты в пределах 10% не сказываются на работе. Линейный дифференциальный трансформатор работает в пределах одного шага. И. В. Лебедев

12336. О погрешности линейного интерполятора для цифровой системы программного управления. Карибский В. В., Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 6, 748—755 (рез. англ.)

Оценивается максимально возможная погрешность (т. е. максимальное отклонение по перпендикуляру от прямой линии) цифрового линейного интерполятора, построенного на так называемых двоичных умножителях и предназначенного для управления движением по прямой линии на плоскости. Интерполятор состоит из двух двоичных умножителей, имеющих общую пересчетную схему (двоичный счетчик). На двоичных регистрах умножителей задаются в виде кода величины проекций требуемой прямой линии на оси координат. Выходными величинами интерполятора являются две серии импульсов, которые должны вызывать перемещение соответственно по двум осям координат. Каждый импульс имеет одинаковую цену, т. е. соответствует определенному перемещению. Средние значения частот указанных серий пропорциональны проекциям прямой на оси координат. Доказывается, что максимальное отклонение по перпендикуляру от прямой, определяемой введенными в интерполятор проекциями, не превышает (по модулю) $n/\sqrt{2}$, где n — число используемых двоичных разрядов. Эта оценка выражена в единицах младшего разряда, т. е. в единицах перемещений, вызываемых одним импульсом. В. А. Брик

12337. Аналоговый интерполятор как вычислительное устройство для станков с программным управлением. Блюш, Винде (Analogie-Interpolator als Rechenwerk für programmgesteuerte Werkzeugmaschinen. Blüsch H.— Korreferat zum vorstehenden Beitrag. Winde G.), Maschinenbautechnik, 1959, **8**, № 11, 595—603 (нем.)

Рассмотрены принципы проектирования интерполяторов, предназначенных для фиксации формы переходных кривых между двумя точками, задаваемыми программой обработки изделий. Выводится уравнение параболической интерполяции и показывается, что повышение порядка интерполяции нецелесообразно. Показаны возможности технической реализации интерполятора второго порядка в виде трансформаторного интерполятора. Изменяя характер программирования в схеме, можно реализовать линейную, параболическую, круговую или двойную параболическую интерполяцию. Даны условия, определяющие точность интерполяции, требования, предъявленные к точности выполнения элементов схемы интерполяторов, и результаты экспериментальной оценки точности интерполяции при введении компенсационных звеньев и без них. Б. Е. Бердичевский

12338. Цифровые коды для цифровой системы управления. Холден (Digital codes for numerical control. Holden W. H. T.), Electr. Manufact., 1957, **58**, № 6, 105—111 (англ.)

12339. Оптимизация процессов производства. Адамс (Optimisation of precess plant. Adams P.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 49—61 (англ.)
См. РЖЭ, 1959, № 11, 22928.

12340. Что можно ожидать от электронной вычислительной техники в области управления? Кокфилд (What can management expect from an electronic computor? Cockfield T. A.), Industr. Rev. Africa, 1958, **9**, № 7, 28—29, 31, 33—36 (англ.)

12341. Возможности применения современных вычислительных автоматов для решения задач организации производства и планирования производства. Вартман (Anwendungsmöglichkeiten neuzeitlicher Rechenautomaten bei Aufgaben der Betriebswirtschaft und Fertigungsplanung. Wartmann R.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 2, 78—83 (нем.; рез. англ.)

12342. Решение задач на вычислительной машине ЭРМЕТХ. Лёйхли (Lösung auf der ERMETH. Läuchli P.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 302—303 (нем.)

12343. Решение задач на вычислительных машинах УНИВАК-120 и УНИВАК-файл. Хафтер (Lösung auf der UNIVAC 120 und auf dem UNIVAC File Computer. Haffter M.), Mitt Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 316—328 (нем.)

12344. Решение задач на вычислительной машине ИБМ-650. Кеслин (Lösung auf der IBM 650. Käslin W.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 304—315 (нем.)

12345. Применение вычислительных машин в топологии. Оплер (A topological application of computing machines. Opler Ascher), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1956, 86—88 (англ.)
См. РЖЭ, 1959, № 13, 27466.

12346. Решение задач на электронной вычислительной машине ГАММА-3А. Шлаттер (Lösung auf dem Elektronenrechner Gamma 3A. Schlatter A.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 293—298 (нем.)

12347 Д. Статистический анализ систем автоматического управления с применением электронных моделирующих устройств. Тельякснис Л. А. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ин-т автоматики и телемехан. АН СССР, М., 1960

12348 Д. Статические электроинтеграторы для решения дифференциальных уравнений математической физики. Лукьянов А. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казахск. ун-т, Алма—Ата, 1960

См. также: 11129, 11130.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Авраамов И. С. 11729 Д
Агранович М. С. 11608—11610
Агрест М. М. 12152
Адхамов А. 11706
Азбелев Н. В. 12112
Айзенберг Л. А. 11544
Аксентьев Л. А. 11557
Алиев Ф. С. 11539
Алимов Ю. И. 11665
Аменэаде Ю. А. 11569
Андреев Н. А. 11269
Аносов Д. В. 11553
Антипов В. Г. 11734
Арима 11257
Арутюнян Н. Х. 11703
Ахиезер Н. И. 11494

Б

Бабаян Б. А. 12256
Багдоев А. Г. 11671
Бајшански Б. 11489
Бакельман И. Я. 11622
Барон С. 11787
Беленький Н. М. 11744
Белоусов В. Д. 11350
Беляев Б. И. 12210 К
Бєляєв М. Г. 11976
Березовский А. А. 11657
Берман С. Д. 11311
Бирман М. Ш. 11848
Близникас В. И. 12031
Бовді А. А. 11311
Богдан Р. К. 11821
Борисов Ю. Ф. 12045
Бородачев Н. М. 11682
Бохнер С. 11484
Булавский В. А. 12252
Булдырев В. С. 11683
Булеев Н. И. 12125

В

Вандакуров Ю. В. 11718
Ван Чжэнь-юй 11519
Василаке С. 11677
Васильев А. М. 12032
Ватанабэ 12171
Волков Д. М. 11563
Волконский В. А. 11883
Ворович И. И. 11676
Воронков Б. С. 11667
Вульфсон С. З. 11661
Выборный Р. 11635

Г

Галев Л. 11299
Галиуллин А. С. 11746
Гальперн С. А. 11774 К
Ганнинг Р. К. 11529
Гельфанд И. М. 12086
Георгев Г. 12144
Герасимов И. С. 11702
Гилбарг Д. 11625
Гильман А. М. 12253
Гинзбург М. М. 11740
Глаголева Н. Н. 11174 К
Гнеденко Б. 11144
Гольдберг А. А. 11525
Горбунов К. Г. 11995
Гординг Л. 11631
Гордон И. А. 11759
Гофман Ш. М. 12154, 12155
Градштейн И. С. 11232 К
Гранас А. 11432
Грибанов Ю. И. 11830
Гробман Д. М. 11935
Грошев А. А. 12289
Гудков В. М. 11945

Д

Дашниц Л. С. 11844
Дворкин Б. С. 12164
Джанелидзе Г. Ю. 11743
Чэфэров Э. С. 11627
Джеймс И. М. 11439, 11440
Джемс-Леви Г. Е. 12196
Дзядык В. К. 11477
Дивеев Р. Х. 11913
Дикополов Г. В. 11620
Добрушин Р. Л. 11884
Доморяд А. П. 11253
Дубасов В. Т. 11651
Дун Чжун-линь 12172

Е

Еганян В. В. 11575Д
Еремин И. И. 11336
Ермолаев А. М. 11820

Ж

Жак И. Е. 11776 К
Жаутыков О. А. 11611, 11645
Жотиков Г. И. 12037

З

Забавников Б. И. 11701
Зайцев Л. П. 11684
Зенгин А. Р. 12195
Зимин В. А. 12271
Зиновьев А. А. 11223
Зонтшайн С. И., Ред. 11728 К

И

Иванова Л. П. 11649
Ивашев-Мусатов О.С. 11174 К
Истратов В. И. 11174К

К

Каганов В. И. 12115
Каганов С. А. 12048
Кадец М. И. 11833
Каландия А. И. 11561
Калашников А. С. 11642
Каменская М. М. 11376
Камынин С. С. 12251
Кангро Г. 11787
Карасева Т. М. 11794
Каргаполов М. И. 11328
Карибский В. В. 12336
Керес Х. 11722
Ким Е. И. 11649
Кириллов А. А. 12085
Киртадзе Г. А. 11420
Кислицын С. Г. 12326
Клоков Ю. А. 11588
Кобринский Н. Е. 11392
Коваль П. И. 11597
Комамия Я. 11201
Константинеску Ф. 11836
Коробов И. Н. 11235
Королев Н. И. 12300
Космодамианский А. С. 11562
Костычев Г. И. 11745
Кудрявцев Е. П. 11717
Кузнецов В. Г. 11279
Кузьмина Г. В. 11503
Куликов Н. К. 11591
Курода 11497
Курош А. Г. 111

Л

Лакс П. Д. 116
Левин Ю. И. 120
Ледянкин Д. П. 11666
Лемлейн В. Г. 120
Леонтьев М. В. 12199
Ли Дён Ук 11303
Ли Дэ-юань 1163
Линь Цзюнь 118
Литвин Ф. Л. 1
Ли Шу-цин 12163
Лобачева Н. К. 11748
Лукьянов А. Т. 12348 Д
Лумисте Ю. Г. 120
Лупанов О. Б. 11396
Лурье А. И. 11743
Луценко И. Е. 118
Лысков В. П. 117
Любимский Э. З. 12251
Люстерник Л. А. 11155
Лю Тун-цзюе 1145 11478
Лю Цин-шань 121
Ляпунов А. А. 1113 12250
Ляшко І. І. 115

М

Мазмишвили А. 12210 К
Майоров Ф. В. 12318
Макарова Л. Я. 11542
Мальцев А. И. 113
Мандельбройт С. 11485, 11486
Маркушевич А. 11155
Марченко Д. И. 111
Марчук Г. И. 121
Матюхин Н. Я. 122
Мацаев В. И. 1185

Мдивани В. 11132
Медовой М. И. 11148
Мейман Н. Н. 11495
Меннам К. 12132
Милнор Дж. 11443, 11444
Миролюбов А. А. 11496
Михайлов Л. Г. 11513
Моргаевский А. Б. 11690
Морита К. 12200К
Мостовой А. И. 11128
Мостовский А. 11184
Мо Шао-куй 11204, 11205
Мусаев С. Р. 11647

Н

Назаров А. А. 12304
Накамура К. 11316
Наш Дж. 11624
Неймарк Ю. И. 11595
Нечас И. 11629
Нилов Г. Н. 11285

О

Обухов А. М. 12180
Орданович А. Е. 12287
Оруджев Г. А. 11491

П

Павлов А. А. 11662
Пантелеев В. Л. 11652
Парадоксова И. А. 11731
Патрушев В. Л. 11710
Пелекуди Х. 11821
Персидский К. П. 11599
Перчинкова-В'чкова Д. 11577
Петканчин Б. 11178К
Петров Р. 12197
Петров Ю. П. 12304
Петрова Л. Т. 12257
Поволоцкий А. И. 11552
Погребысский И. 11144
Положий Г. Н. 11559
Полякова В. М. 11641
Пономарев А. Т. 11538
Попов Б. С. 11798
Постников Л. В. 11659
Привалов И. И. 11774 К
Пугачев В. С. 11730
Пхакадзе Ш. С. 11456
Пэн Цин-цюань 12137
Пятецкий-Шапиро И. И. 12086

Р

Раков Г. К. 12255
Раковщик Л. С. 12113
Растригин Л. А. 11655
Ревзин И. И. 11223
Решетняк Ю. Г. 12111
Рогозинский В. В. 11480К
Родин Ю. Л. 11512
Розовський М. І. 11738
Ройтенберг Я. Н. 11663
Романовский П. И. 11781 К
Рот К. Ф. 11249
Рыбкин Г. Ф. 11155
Рывкин В. Б. 11771

С

Сакаи Х. 11534
Самарский А. А. 11812, 12120
Сато 11498
Сафонов С. А. 11313
Сельберг А. 11244
Серрин Д. 11625
Синдлер Ю. Б. 11952
Сиокос Ф. 12074
Сиразетдинов Т. К. 11565
Ситник Н. Х. 12325
Скалкина М. А. 11600
Скобелкин В. И. 11711
Скороход А. В. 11878
Слободецкий Л. Н. 11621
Смирнов Ю. И. 11935
Соболев В. В. 11739
Соболев С. Л. 11643
Соркин Ю. И. 11365
Стокер Дж. Дж. 11727 К
Стрелков С. П. 12287
Стяжкин Н. И. 11230
Сульдин А. В. 11866
Сун Цзянь 11664
Сунь Хэ-шэн 12021
Супруненко Д. А. 11322
Сычев А. Д. 12138

Т

Табаровский А. М. 11585
Такэути 11388
Тарасов И. С. 12041
Тарнопольський В. Г. 11845
Текше К. 11970
Тельюснис Л. А. 12347 Д
Темляков А. А. 11536, 11536
Теплов Л. 11141 К
Теплов Н. Л. 11950
Территин Х. Л. 11593
Терсенов С. А. 11632
Тимофеев В. А. 11669
Тихонов А. Н. 11812, 12120
Тода Х. 11441, 11442, 11887
Тодорова Г. С. 11988
Томонага 12044
Топольницкая К. Ф. 11166
Трахтенброт Б. А. 11392
Трикоми Ф. 11741 К
Туаев А. А. 11560

У

У Дин-цзя 11999
Уждавинис Р. В. 11247
Успенский В. А. 11182
У Сюе-моу 11508
У Хун-го 11369
Уэно 11873
У Юань-кай 12163

Ф

Фет А. И. 11742
Фихтенгольц Г. М. 11777 К
Флитман Л. М. 11686
Фридман Г. А. 11520
Фридрикс К. О. 11613
Фролов Н. А. 11775К
Фудзино К. 12145

Х

Хайкович И. М. 11685
Халанай А. 11603, 11604
Халфин Л. А. 11572
Хант Г. А. 11810
Харди Г. Х. 11480 К
Хаскинд М. Д. 11707
Хациревич И. Х. 11568
Хлодовский И. Н. 11196
Хрущев С. Н. 11668

Ц

Цай Суй-линь 11596
Цейтин Г. С. 11180
Цзин Шу-лян 12163
Цинь Юань-сюнь 11605 К, 11606 К
Цю Хуа-цзи 11518

Ч

Чакалов Л. 11505
Чандрасекхаран К. 11484, 11485
Черный Г. Г. 11680
Чернышевский И. К. 11721
Чернышенко Э. А. 11726
Черняк Ю. Б. 11948
Четкин М. В. 11592
Чжан Бин-гэнь 11590
Чжан Су-чэн 11436, 11437
Чжан Ци-жэнь 12209 К
Чжан Цин-да 12163
Чжан Шэн-кай 12163
Чжао Сун 12163
Чжоу Му-си 12019
Чжоу Ця 12192
Чэн Сян-линь 12027

Ш

Шерман Д. Й. 11566, 11567
Шилов Г. Е. 11162о, 11772К
Шура-Бура М. Р. 12251

Э

Эйдельман С. Д. 11648
Эпштейн В. Л. 12296

Ю

Юдович В. И. 11676
Юе Минь-и 11782

Я

Яблонский А. И. 11580
Яглом И. М. 11754
Яковкин М. В. 12211 К, 12242 К
Яно 12089

A

Abdel-Messih M. A. 12121
Abeloos L. 11650
Abian S. 11765
Adams P. 12339
Adriaenssens G. 11921
Adian P. 11802
Agrmon S. 11462
Agostinelli C. 11681
Akutowicz E. J. 11760, 11851
Alexandroff P.
Alexandrow A. D. 12102
Allais M. 11929
Allen D. N. de G. 12203 K
Al-Salam W. A. 11805
Alterman F. J. 12320
Altman M. 11862
Altmann S. L. 11869
Ambrosio S. 12310
Amemiya I. 11380
Amir-Moez R. 11171
Anastassiadis J. 11305 K
Anderson W. H. 12114
Andreatta A. 12004
Andress W. R. 12001
Apfelbacher K. 12204 K
Aragnol A. 12090—12093
Arai H. 11543
Arcache A. 11535
Archibald J. L. 12301
Asser G. 11233 K
Auslander M. 11364
Austin D. G. 11881

B

Babuška I. 11277, 11602
Bachman G. 11318, 11323
Bader J. A. 12331
Baer R. 11329—11331
Bagemihl F. 11467, 11468
Baily W. L. 12088
Baker G. A., Jr 12129—12131
Bal L. 12201 K
Balada F. 11156
Ball R. B. 12114
Banachiewicz T. 12216 K
Bandić I. 11579
Banerjee D. P. 11874
Barankin E. W. 11889
Barker C. C. H. 11757
Bartoš P. 11962
Baskervill M. M. 12182
Bass J. 11762, 11763
Bastiani A. 11825
Bastin E. W. 11304

Bateman E. H. 11966
Bauer W. F. 12315
Baule B. 12205 K
Baumol W. J. 11601
Bear H. S. 11858
Beckmann M. J. 11941
Bel L. 12066
Bell D. A. 12275
Bellert S. 12175
Bellman R. 11770, 11910
Benado M. 11385
Benard A. 11899
Bender B. K. 12329
Bennett C. A. 12283
Benson D. C. 11809
Benson G. C. 12225
Beresford-Rayner C. 12082
Berg L. 11814
Berger R. 11362
Bergman S. 11541
Bergmann P. G. 12070
Berman G. 11378
Bertram G. 12116
Betelman R. 12148
Beth E. W. 11225, 11234 K
Bevan R. W. 11939
Bhatt M. P. 12065
Bhutani O. P. 11719
Bianchi M. 11936
Biermann K. R. 11231
Binet F. E. 11894
Birkhoff G. 11868
Bishop A. B. 11944
Bjerhammar A. 12167
Blachman N. M. 11909, 11931
Blair A. 12136
Blumenthal R. M. 11881
Blüsch H. 12337
Boardman J. 12070
Boboc N. 11551
Bochner S. 11646
Bodenman P. S. 11167
Boehm G. A. W. 12309
Böhm J. 12215 K
Bolinder E. F., 12058
Bonnke H. 12293
Boone W. W. 11183
Borden B. C. 12245
Borwein D. 11786
Bouligand G. 12083
Bourbaki N. 11389 K
Boyd A. V. 11756
Brafman F. 11799
Brainard W. E. 12334
Braithwaite R. B. 11904
Brelot M. 11547, 11549, 11550
Broberg K. B. 11700
Brown A. B. 11765
Brown R. G. 11947
Bruck R. H. 11343
Bruijn N. G. 11352
Buccafurri A. 11418
Buchsbaum D. A. 11364
Burger E. 11942 K
Busemann H. 12109
Butzer P. L. 11732

C

Cairns S. S. 12104
Căluşiţă M. 12291
Capel C. E. 11426
Carlitz L. 11236, 11806
Cartan H. 11531
Castiglioni P. 11919
Cattaneo C. 12056
Caughey T. K. 11653
Causey R. L. 12159
Cavallaro V. G. 11992
Chacon R. V. 11881
Chambers L. G. 11723
Chang Su-cheng 11436, 11437
Chen Mao-Chao 12272
Chernoff H. 11902
Cherubino S. 11925, 11926
Chevalley C. 11276 K, 11359
Chow Sho-kwan 11435
Chow Tse-Sun 11934
Christiano J. G. 11292
Cochină A. 12018
Cockfield T. A. 12340
Cohen E. 11245
Cohen L. J. 11220
Coleman J. J. 11933
Collatz L. 12187
Collins W. D. 11709
Comfort W. W. 11288
Commeau J. 11983
Conkie W. R. 12169
Cooke J. C. 11795
Čopič M. 12190
Corinaldesi E. 11571
Courant R. 11751
Court N. A. 11977
Coz M. 12083
Crandall H. W. 11920
Crandall S. H. 12212 K
Crowe D. W. 11300
Császár A. 11423
Cureton E. E. 11896
Curry H. B. 11194
Curtis P. C., Jr. 12165

D

Dade E. C. 11321
Dallmann H. 11986, 11987
Dantzig D. van 11923
Dautcourt G. 12077
Davis C. 11911
Davis E. E. 11136
Davis P. 11493
Daykin D. E. 11259
Deaux R. 11974
De Kerf J. L. F. 12264, 12265
Delande G. 12028
Dempsey E. 12225
Dennis B. K. 12308
Desmet I. 11275 K
Diaz J. B. 11688
Dicknether 12204 K
Dilgan H. 11147, 11149
Dinghas A. 12101
Dirac P. A. M. 12079
Dixmier J. 11339
Dodd S. C. 11216
Doetsch G. 11817 K
Dolbeault-Lemoine S. 12033
Douglas J., Jr 12127
Dreyfus S. 11910
Duculot C. 11353 Д
Dudin R. 12214 K
Dunbar D. L. 11292
Durif-Varambon A. 12232 K
Dutka J. 11949
Dynkin E. B. 11449, 11450

E

Edrei A. 11526
Edwards R. E. 11827
Eeden C. van 11899
Eells J., Jr 11446
Ehrenpreis L. 11545
Ehrhart E. 11254–11256
Ehrmann H. 1216[2]
Eisenhart L. P. 1204[2]
Ekstrom J. L. 11822
Eliopoulos H. A. 12054
Elster K.-H. 11986, 11987
Elyash E. S. 11481
Emmott W. 11157
Ercoli P. 12266
Erdős P. 11412, 11413, 11470
Eriksson H. A. S. 12064
Exner G. 12184
Exner R. M. 11140 K
Eyraud H. 11784

F

Fadini A. 11374
Falk S. 12153
Fano G. 11418
Farnell A. B. 11294
Federici Casa C. 11737
Feeman G. F. 12046
Fehr H. F. 11168
Fejes Tóth L. 12107
Fenimore G. E. 12321
Fényes T. 11586
Féraud L. 11295
Ferguson C. E. 12166
Fiedler M. 11277
Fiett J. 12247
Fischer G. F., Jr 12270
Flad J. P. 11150
Fleischer I. 11302
Flett T. M. 11789
Fluch W. 11241
Fodor G. 11470
Folta J. 11152
Fontanet P. 11679
Formica G. 12141
Forrat F. 12232 K
Forsythe G. E. 12158, 12178
Foss V. W. 11972
Fourès-Bruhat Y. 12072, 12081
Fourgeaud P. C. 11924
Frank W. L. 12165
Fraser A. S. 12305
Fréchet M. 11824, 11872, 11914, 11916
Freud G. 11419
Freudenthal H. 11340
Freund R. A. 11946
Friest D. T. 11947
Frisch R. 11922
Fröhlich A. 11357
Fronsdal C. 11963
Fuchs W. H. J. 11526
Fukada M. 11658
Funk P. 11159

G

Gal I. S. 11425
Galafassi V. E. 12003
Gallarati D. 12006
Ganea T. 11433
Gantmacher F. R. 11308 K, 11309 K
Garcia J. 12228
Garnier R. 11968 K
Garvin W. W. 11920
Gary J. 11431
Gaskill L. 12207 K
Gauss F. G. 12239 K
Gautier P. 11712
Gehring F. W. 11636
Gélix A. 12335
George F. H. 11130
Gerrish F. 11287
Gheorghiu G. T. 11959
Gherardelli F. 12084
Ghizzetti A. 11773 K
Ghosh N. N. 12071
Giedymin J. 11228
Gilbert J. D. 11326
Ginsburg S. 11424
Gliddon J. E. C. 11714, 11715
Gobbin H. H. 12239 K
Godeaux L. 12005
Godement R. 11532
Gołąb S. 12147
Goldman A. J. 12329
Golomb M. 12183
Gomperts R. J. 12284
Goodstein R. L. 11219, 11282
Gopalakrishnan N. S. 11361
Gordon R. S. 12248
Götz W. 11969
Grabiel F. 11960
Greanias E. C. 12292
Green H. G. 11994
Grenander U. 11901
Greniewski H. 11221
Griffith J. L. 11808
Groot J. de 11417
Grothendieck A. 11445
Guérindon J. 11391 Д
Guggenheimer H. 12096
Guichardet A. 11856
Guillaume M. 11373
Guinand A. P. 11788
Gurk H. M. 11907
Gurland J. 11954

H

Haavind R. 12261
Haber S. 11337
Haffter M. 12343
Hahn E. 12191
Haimovici M. 11918
Hajnal A. 11470
Halanay A. 11603, 11604
Hall M., Jr 11386
Hall P. 11327
Hall W. J. 12226
Hällström G. 11521
Halmos P. R. 11210
Halperin I. 11380
Hamblin C. L. 11222
Hammer P. C. 12142
Hamming R. W. 12312
Hampl M. 12150
Handel S. 12268
Handscomb D. C. 11917
Hannan E. J. 11900
Härtig K. 11209
Hartree D. R. 12221 K
Hasenjaeger G. 11186
Hasumi M. 11832
Heaps H. S. 11951
Heaton R. 11360
Heigl F. 11286
Heimburg E. 11779 K, 11780 K
Heinz E. 11623
Helliwell J. B. 11674
Hellman M. J. 11323
Helmberg G. 11865
Hély J. 12073
Henrici P. 12159
Hermelink H. 11145
Herrmann H. 12286
Hervé R.-M. 11548, 11550
Hewitt E. 11473
Heyda P. G. 12185
Hicks N. 12099
Hieke M. 11691, 11692
Hiorth F. 11217
Hill G. W. 12317

Hirschberg D. 11921
Hirschleber A. J. 12184
Hirst F. 12311
Hirzebruch F. 11448
Hofmann R. 11289
Holden W. H. T. 12338
Holubář J. 11153
Hoppel C. J. 12292
Hörig J. 12299
Hörmander L. 11612
Hornfeck A. J. 12324
Horváth J. 11716
Hosszú M. 11301, 11349
Howe W. G. 11946
Hruša K. 11778 K
Hsiung Chuan Chih 12046
Hu Hou-sung 12053
Hukuhara M. 11598
Hunt P. M. 12258

I

Igusa J. 12014
Iliev I. D. 12288
Imsland T. S. 12324
Inagaki N. 11315
Ioanin G. 11397
Ionescu-Bujor C. 11973
Isaksson H. 12274
Isbell J. R. 11424, 11907
Iséki K. 11427
Ishihara S. 12094
Ito J. 11528
Ito T. 11841, 11846
Izumi S.-I. 11472

J

Jackson J. E. 11946
Jakubík J. 11342
Janković N. 11783
Janowski W. 11499—11502
Jans J. P. 11454
Jarník V. 11153
Jecklin H. 12189
Jeger M. 11979
Jensen A. 11956
John J. B. 11920
Johnson A. E. 12327
Jones H. L. 11886
Jones R. P. N. 11693
Jónsson B. 11383
Jordan P. 11384
Julia G. 12024 K
Jůza M. 12098

K

Kączkowski Z. 12231
Kadner H. 12118
Kakurai S. 11540
Kaliski S. 11689, 11698
Kämmerer 9W. 1225
Käslin W. 12344
Katz M., Jr 11889
Kaufman L. G. II 11290
Kaufmann A. 11943K
Kawamura T. 11875
Keller H. B. 12126
Kelley J. E., Jr 11915
Kendall M. G. 11940
Keogh F. R. 11791
Kerr R. P. 12057
Kerstan J. 11421
Kertész A. 11354
Ketchledge R. W. 12330
Killgrove R. 11386
Kilmister C. W. 11304
Kinokuniya Y. 11215
Kiss E. 11263
Klee V. 11834, 12110
Kleene S. C. 11181
Klein H. 11164
Kleinfeld E. 11367
Klimovsky G. 11469
Klingen H. 11325
Kloomok M. 12292
Knapowski S. 11-38
Kohl H. R. 11224
Koiter W. T. 11564
Kolomý J. 11749
Komatu Y. 11515—11517
Kondô M. 11465, 11466
Kortum H. 12259
Kotal M. 12123
Koutský K. 11143, 11154
Kovalevsky J. 12168
Krée P. 11762
Krein M. G. 11479
Kreiss H.-O. 11860, 12133—12135
Kreyszig E. 11504
Kroupa F. 11704
Kudo A. 11895
Kudryavcev L. 11463
Kuiper N. H. 12108
Kull I. 11203
Kultze R. 11434
Kumari S. 11476
Kuniyoshi H. 11453
Kunz K. S. 12217 K
Kupisch H. 11371
Kuroda I. 11497
Kuroda S. 11187—11193
Kuroda S. T. 11847
Kurzweil J. 11576

L

Lacoste R. 11823
Lagasse J. 11823
Lamprecht E. 11355
Langefors B. 12149
Langer R. E. 11583
Läuchli P. 12342
Laudet M. 11712
Laurikainen K. V. 12227
Lauwerier H. A. 12128
La Vallée Poussin C. 11523
Lawler E. A. 12328
Lees C. H. 12267
Lefschetz S. 11589
Leger G. 11375
Lehmer D. H. 11766, 12297
Lehmer E. 11260
Lekkerkerker C. G. 12106
LeLong P. 12087
Lenoir M. 12078
Lense J. 11985
Lenz H. 11213, 11283
Leray J. 11861
Lester A. 11345
Levine N. 11481
Lindsay P. A. 12117
Lindström S. 11177 K
Lions J. L. 11619
Líotta R. S. 11724
Loewner C. 11859
Lomholt A. 12237 K
Lomont J. S. 12157
Long C. T. 12179
Longo C. 12039

M

Mackie A. G. 11674
McNaughton R. 11395
McWeeny R. 11867
McWilliams R. D. 11831
Maline M. 12261
Maloney C. J. 11953
Mandan S. R. 11989
Mandel J. 11705
Manne A. S. 11932
Maravall Casesnoves D. 11871, 11876
Marchant R. 12194
Marchaud A. 12103
Marcus M. 11291
Marcus R. B. 11218
Marcus S. 11458
Mardešic S. 11281
Mařik J. 11630
Mariot L. 12062
Marmion A. 11981
Marschak T. 11930
Martensen E. 12139
Marx G. 11725
Massaglia B. F. 11735
Mastrogiacomo P. 12038
Masuda K. 11356
Matlis E. 11370
Matsumura H. 12013
Matsushima Y. 11382
Mau J. 11231
Meister E. 11556
Meschkowski H. 11492
Metropolis N. 12136
Meyer-König W. 11793
Mihăilescu E. 11200
Mikolás M. 11764
Mikusiński J. 11813, 11819 K
Mills W. H. 11905
Milnes H. W. 12124
Miron R. 12043
Mitchell B. 11395
Mitrinović (Mitrinovitch) D. S. 11755, 11758, 11803, 11804, 12222
Mitrinović R. S. 12222 K
Mittenzwey L. 11179 K
Mizohata S. 11638, 11640
Moakes A. J. 11753
Moffat J. 12076
Moh Shaw-kwei 11204, 11205
Moisil G. C. 11397, 11400—11408, 11410 K
Montel P. 11488, 11522
Mordell L. J. 11251
Morel A. C. 11471
Morgenstern D. 11699
Moriguti S. 11888
Mornard S. 11921
Mostow G. D. 11341
Mostowski A. 11226
Mott T. E. 11288
Mould R. A. 12061
Moyls B. N. 11291
Mrówka S. 11423
Müller C. 11151
Müller F. 12233 K
Munteanu I. 11594
Murasugi K. 11438
Murdoch D. C. 11307 K
Mutô Y. 12036

N

Nagano T. 12034
Nagata M. 11363
Naïm L. 11546
Naslin P. 12319 K
Nataf A. 11924
Nedelcu M. 11398, 11409
Nedialkov I. P. 12288
Nehari Z. 12122
Neira Combariza H. 11737
Nelson E. 11857
Nering E. D. 11358
Neumann J. de 12136, 12313
Neumann P. G. 12306
Neville E. H. 11971
Newell A. 12246
Newman M. 11324
Newport C. B. 12275
Nickel K. 12119
Nickul K. 11964
Niehaus U. K. 12307
Nielsen K. L. 12220K
Nikodým O. M. 11377
Nishimiya H. 11490
Nöbauer W. 11338
Nocilla S. 11672
Noll H. 11135
Norguet F. 11452
North R. 11293
Nowakowski R. 11267

O

Obata M. 12094
Odanaka T. 11870
Ohashi K. 11206, 11207, 11208
Ohkubo T. 12051
Oliphant T. A. 12129
Onicescu O. 11958
Opler A. 12345
Orchard H. J. 12170
Orlicz H. W. 11829
Orlicz W. 11838
Ormandjiev S. I. 12288
Osborne J. S. 12292
Osiecki J. 11698
Osiński Z. 11656
Otis E. J. 12333
Owen D. B. 11893

P

Pacioni G. 11752
Palacios J. 12075
Panov D. J. 12213 K
Papapetrou A. 12068
Paria G. 11514
Parker E. T. 11314
Parsons C. 11224
Parsons D. H. 11660
Payne L. E. 11688
Pease D. K. 11767
Peetre J. 11644
Peng C. C. 12137
Peres N. J. C. 11967
Perzyna P. 11694
Pethő Á. 11278
Pfouts R. W. 12166
Pham D. 11368
Phister M., Jr 12332
Pickert G. 11379, 11387, 11422
Pimbley G. H. 11720
Pogorzelski W. 11509, 11510
Polášek J. 11965
Pommerenke C. 11483
Popp S. 11570
Porter J. D. 12248
Possel R. de 12023
Potts R. B. 12124
Powell R. L. 12226
Pratelli A. M. 12063
Pratt J. W. 11897
Prescott H. L. 12279
Prior L. E. 11994
Proschan F. 11931
Prywes N. S. 12276
Psota F. 11158
Pták V. 11835, 11838

Q

Quenouille M. H. 11885

R

Radlow J. 11708
Rado F. 12201 K
Radu N. 11551
Raghavacharyulu I. V. V. 11335
Raghavendran R. 11978
Raith F. 12240 K
Rajagopal A. K. 11816
Rajagopalan M. 11854
Ramabhadran N. 11361
Ramspott K.—J. 11447
Rapaport E. S. 11332
Rasiowa H. 11199
Rasmussen P. N. 11175 K
Ray D. 11880
Raymond G. A. 12269
Rayner C. B. 12095
Ree R. 11310, 11372
Rehtman P. G. 11479
Reiner I. 11324
Rembs E. 12022
Reviglio G. 12310
Rigaud M. 11687
Righi R. 11393, 11394
Rim Dock Sang 11319
Rîpianu A. 11997
Riske G. 12177
Robin L. 11800
Rodero Carrasco J. 11815
Rogers C. A. 12105
Rogers W. M. 12226
Röhrl H. 11584
Roseau M. 11678
Rosenfeld A. 11337
Rosmann F. 12281
Ross K. A. 11346
Rossier P. 11990
Rosskopf M. F. 11140 K
Rössler W. 11131
Rothe E. H. 11637
Rottmann K. 12241 K
Roy B. 11411
Roy D. 11675
Rudeanu S. 11399
Rüdiger D. 11750
Rüger B. 11179 K
Rumney M. 11282
Ruse H. S. 12035

S

Saddler W. 12001
Sade A. 11347
Sakaguchi K. 11506
Sakaguchi M. 11906
Šalát T. 11457, 11796
Sales Vallés F. de A. 11879
Salkowski E. 11998K
Salmeri A. 11264
Samelson K. 12249
Sampson J. H. 11451
Sanden H. von 12146
Santaló L. A. 11991
Satake I. 11351
Sawyer W. W. 11163
Scagni G. 12161
Schaefer W. 12234 K
Schappert H. 12306
Schenkman E. 11334
Scheplitz H.-G. 12293
Scherrer W. 12017
Schinzel A. 11265
Schlatter A. 12346
Schmid H. 12290
Schmidt Walter 12219K
Schmidt Wolfgang 11252
Schneider H. 11297
Schoenfeld L. 11769
Schönberg M. 12050
Schröder J. 12176
Schulz G. 12238 K
Schulze W. 11998 K
Schumaker J. A. 11170
Schuster S. 11984
Schütte K. 11185
Schützenberger M. P. 11333
Schwartz L. 11811, 11826
Schwarz Š. 11306K
Scotto Lavina G. 12156
Sedláček J. 11414, 11415, 11416
Segre B. 12015
Seike T. 11870
Selfridge J. L. 11761
Semadeni Z. 11839, 11840
Serrin J. 11507
Severi F. 11574K, 12012
Shah S. M. 11527
Shanks D. 11250
Shaw J. C. 12246
Shields P. C. 11855
Shimura G. 11530
Shiratani K. 11258
Shoenfield J. R. 11202
Sholander M. 11320
Shrivastava K. S. 11474
Sibuya M. 11887
Siegel S. 11957
Sierpiński W. 11270 K, 11975
Sikorski R. 11464K
Silaş G. 12000
Silverman J. N. 12173
Silverman R. J. 11378
Simon A. B. 11849
Simon H. A. 12246
Simonsen S. H. 12173
Singer I. 11837, 11863
Sinha S. R. 11475
Sitting J. 11937
Sluis A. van der 12295
Słupecki J. 11195
Slye J. M. 11430
Smith D. E. 11161K
Smith M. G. 11673
Southwell R. V. 12206K
Sovera G. 11274K
Spampinato N. 12002, 12007—12011
Sparrow E. M. 12140
Spellman R. A. 11920
Sridharan R. 11361
Stainov G. Z. 12288
Stás W. 11240, 1 1243
Steidle G. 11268
Stein F. M. 11801
Stein S. 11348
Stephenson G. 12067
Stern J. 11134
Stesin I. M. 12188
Stetting L. 11175K
Stiefel E. L. 12160
Stiegler K. 12060
Stoïlow S. 11533
Stoka M. 12040
Straube F. 12259
Straus E. G. 11761
Streißler E. 11928
Strickler P. 12189
Strother W. L. 11426
Struble G. 12143
Struik D. J. 11146
Struzik T. 11670
Su Buchin 12030
Surányi J. 11280
Sutherland A. B. 11487
Swift J. D. 11386
Szász G. 11390K
Szeptycki P. 11461
Szmielew W. 12100

T

Takahashi K. 11582
Tanura T. 11344
Tanaka M. 11237
Tanaka N. 12049
Tanimura M. 11614—11618
Tao L. N. 11578
Taub A. H. 12136
Taussky O. 11296
Teichmann H. 11747
Teleman C. 12026
Teodorescu N. 11211, 11212
Ternouth E. J. 11482
Thacher H.C., Jr12181
Theiler G. 11898
Thomée V. 11634
Thullen P. 11955
Thun R. 12314
Titus C. J. 11429
Tocher K. D. 12273
Toda H. 11441, 11442, 11887
Todd J. 11504
Tôgô S. 11375
Tondl A. 11654
Tong Kwang-chang 11511
Törnebohm H. 12059
Toscano L. 11828
Tranter C. J. 11795
Treder H. 12068
Tsai Sui-lin 11596
Tschupik J. P. 11996
Tsingou M. 12136
Tsuchikura T. 11790
Turán P. 11242
Turrittin H. L. 11587

U

Uchiyama M. 11961
Ulčar J. 12198
Umezawa T. 11197, 11198
Underhill A. B. 12230
Urban A. 11993
Urbanik K. 11877, 11882
Uttley A. M. 11129, 12303
Utumi Y. 11381

V

Vala K. 11842
Van der Waerden B. L. 11271K
Vantroys L. 12020
Vaona G. 12016
Varho O. 12227
Varoli G. 11284
Vaughan H. 12186
Venkatarayudu T. 11335
Ventola F. 12208K
Vergoossen H. 11272K
Vesentini E. 12097
Vickrey W. 11908
Vilhelm V. 11153
Ville J. 11927
Vogel T. 11736
Volland H. 11713
Voss J. K. 12114
Vrânceanu G. G. 11262, 12040, 12055K
Vyšín J. 11962

W

Waddell J. H. 12230
Wahde G. 11554
Wakulicz A. 11265
Waldo W. H. 12248
Wall R. E., Jr. 12307
Walsh J. E. 11891
Walsh J. L. 11493
Walter W. 11628
Wang Hao 11229
Wartmann R. 12341
Washnitzer G. 11451
Waters W. E. 12294
Watson G. S. 11894
Weiler H. 11890
Weinacht J. H. 11982
Weinberger H. F. 12183
Wendt A. 11366
West G. P. 12315
Weston J. D. 11298, 11555
Westwick R. 11291
Whyburn G. T. 11428
Wicke H. H. 12142
Widder D. V. 11633, 11818K
Wiener N. 11760
Wienkamp R. 11807Д
Wiesen J. M. 11893
Wijsman R. A. 11892
Willers F. A. 12218K
Willoughby R. A. 12157
Winde G. 12337
Wirszup I. 11162
Witten L. 12069
Włodarski L. 11785
Woltjer L. 11695, 11696, 11697
Woodward D. A. 11733
Wrench J. W., Jr 11250
Wu Wen-tsün 11903

Y

Yamaguti M. 11843
Jamamoto K. 11261
Yates R. C. 11980
Yood B. 11858

Z

Zaccagnini E. 11912
Zaidman S. 11853
Zappa G. 11312
Zassenhaus H. 11296
Zbijewski P. 11839
Zeller K. 11793
Zeuli T. 12202K
Zítek F. 11460
Żorawski M. 12231
Zorski H. 12080
Zubieta R. F. 11214
Zuckerman H. S. 11473